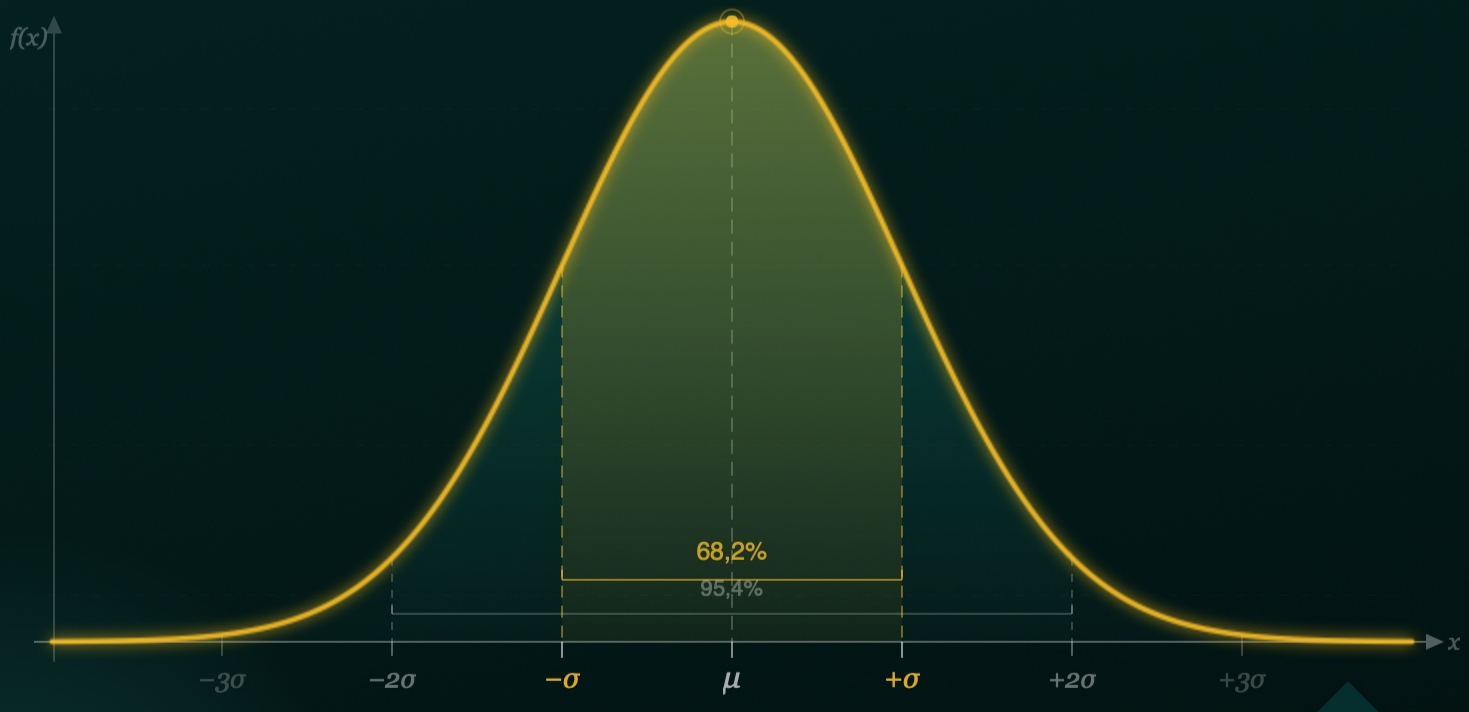
DILSHOD MANSUROV · XALMURZA SAGIDULLAYEV · SUXROB BOZOROV · ALEKSEY MIN

Statistikaga *kirish*

ERKIN FOYDALANISH ASOSIDA



• TARJIMA HAQIDA

Ushbu kitob ingliz tilidan o‘zbek tiliga tarjima qilindi. Tarjima mahalliy ta’lim imkoniyatlaridan kelib chiqib ilmiy tahrir qilindi.

Asl nusxa mualliflari: David Diez · Mine Çetinkaya-Rundel · Christopher D. Barr

Statistikaga kirish – erkin foydalanish asosida

"OpenIntro Statistics" ning to'rtinchi nashri 1-tarjimasi

Tarjima va Uning Ilmiy Tahrir Mualliflari

Dilshod Ravilovich Mansurov (Navoiy Davlat Universiteti)
Xalmurza Saparbaevich Sagidullaev (Toshkent Kimyo Xalqaro Universiteti)
Suxrob Bakhodirovich Bozorov (Guliston Davlat Universiteti)
Aleksey Viktorovich Min (Myunxen Texnika Universiteti)

Asl Mualliflar

David M Diez (OpenIntro)
Mine Çetinkaya-Rundel (Duke University)
Christopher D Barr (Varadoro Capital, L.P.)

Mualliflik huquqi © 2019. To‘rtinchi nashr.
Yangilangan sana: 27-may, 2023 y.

Asl ingliz tilidagi *“OpenIntro Statistics”*ni bepul PDF shaklida **openintro.org/book/os** manzildan yuklab olishingiz mumkin.

Asl *“OpenIntro Statistics”* kitobi shuningdek Creative Commons litsenziyasi ostida mavjud bo‘lib, manba fayllari Github saytida joylashtirilgan.

Mundarija

1 Ma'lumotlarga kirish **10**
1.1 Amaliy misol: insultga qarshi stentlar . . . 12
1.2 Ma'lumotlar asoslari . . . 14
1.2.1 Kuzatuvlar, o'zgaruvchilar va ma'lumotlar matritsalari . . . 14
1.2.2 O'zgaruvchilar turlari . . . 17
1.2.3 O'zgaruvchilar orasidagi munosabatlar . . . 18
1.2.4 Izohlovchi va javob o'zgaruvchilari . . . 19
1.2.5 Kuzatuv tadqiqotlari va eksperimentlarga kirish . . . 20
1.3 Tanlanma olish tamoyillari va strategiyalari . . . 24
1.3.1 Bosh to'plamlar va tanlanmalar . . . 24
1.3.2 Anekdotik dalillar . . . 24
1.3.3 Bosh to'plamdan tanlanma olish . . . 25
1.3.4 Kuzatuv tadqiqotlari . . . 26
1.3.5 To'rt xil tanlanma olish usuli . . . 27
1.4 Eksperimentlar . . . 34
1.4.1 Eksperiment dizayni tamoyillari . . . 34
1.4.2 Insoniy eksperimentlarda xatolikni kamaytirish . . . 36

2 Ma'lumotlarni umumlashtirish **42**
2.1 Sonli ma'lumotlarni tahlil qilish . . . 44
2.1.1 Juft ma'lumotlar uchun sochma diagrammalar . . . 44
2.1.2 Nuqtali diagrammalar va o'rtacha qiymat . . . 45
2.1.3 Gistogrammalar va shakl . . . 48
2.1.4 Dispersiya va standart og'ish . . . 50
2.1.5 Qutili diagramma, kvartillar va mediana . . . 52
2.1.6 Barqaror statistikalar . . . 53
2.1.7 Ma'lumotlarni transformatsiya qilish (maxsus mavzu) . . . 54
2.1.8 Ma'lumotlarni xaritada tasvirlash (maxsus mavzu) . . . 56
2.2 Toifali ma'lumotlarni ko'rib chiqish . . . 63
2.2.1 Kontingensiya jadvallari va ustunli diagrammalar . . . 63
2.2.2 Satr va ustun ulushlari . . . 64
2.2.3 Ikki o'zgaruvchi bilan ustun diagrammadan foydalanish . . . 66
2.2.4 Mozaik diagrammalar . . . 67
2.2.5 Ushbu kitobda ko'radigan yagona doira diagrammasi . . . 68
2.2.6 Guruhlar bo'yicha sonli ma'lumotlarni taqqoslash . . . 68
2.3 Amaliy misol: bezgakka qarshi vaksina . . . 72
2.3.1 Ma'lumotlardagi o'zgaruvchanlik . . . 72
2.3.2 Tadqiqotni simulyatsiya qilish . . . 73
2.3.3 Bog'liqsizlikni tekshirish . . . 74

3 Ehtimollik **80**
3.1 Ehtimollikni ta'riflari . . . 82
3.1.1 Kirish misollari . . . 82
3.1.2 Ehtimollik . . . 82
3.1.3 Birgalikdamas yoki o'zaro istisno natijalar . . . 84
3.1.4 Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimolliklari . . . 85
3.1.5 Ehtimollik taqsimotlari . . . 87
3.1.6 Hodisaning to'ldiruvchisi . . . 88
3.1.7 Bog'liqsizlik . . . 90
3.2 Shartli ehtimollik . . . 95
3.2.1 Kontingensiya jadvali bilan ehtimollarni o'rganish . . . 95
3.2.2 Chegaraviy va qo'shma ehtimollar . . . 96
3.2.3 Shartli ehtimolni aniqlash . . . 97
3.2.4 1721-yilda Boston shahridagi chechak epidemiyasi . . . 99
3.2.5 Umumiy ko'paytirish qoidasi . . . 100
3.2.6 Shartli ehtimollikdagi bog'liqsizlikni hisobga olish . . . 101
3.2.7 Daraxt diagrammalari . . . 102
3.2.8 Bayes teoremasi . . . 103
3.3 Kichik bosh to'plamdan tanlanma olish . . . 110
3.4 Tasodifiy miqdorlar . . . 112
3.4.1 Matematik kutilma (Kutilma qiymat) . . . 113
3.4.2 Tasodifiy miqdorlar o'zgaruvchanligi . . . 114
3.4.3 Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalari . . . 116
3.4.4 Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalaridagi o'zgaruvchanlik . . . 118
3.5 Uzluksiz taqsimotlar . . . 121
3.5.1 Gistogrammalardan uzluksiz taqsimotlarga . . . 122
3.5.2 Uzluksiz taqsimotlardan ehtimollar . . . 122

4 Tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari **127**
4.1 Normal taqsimot . . . 129
4.1.1 Normal taqsimot modeli . . . 129
4.1.2 Z-ballar yordamida standartlashtirish . . . 130
4.1.3 Taqsimotning quyruq qismlarini topish . . . 132
4.1.4 Normal ehtimollik misollari . . . 133
4.1.5 68–95–99,7 qoidasi . . . 136
4.2 Geometrik taqsimot . . . 139
4.2.1 Bernulli taqsimoti . . . 139
4.2.2 Geometrik taqsimot . . . 139
4.3 Binomial taqsimot . . . 142
4.3.1 Binomial taqsimot . . . 142
4.3.2 Binomial taqsimotning normal taqsimotga yaqinlashuvi . . . 145
4.3.3 Kichik intervalda normal yaqinlashuvning ishdan chiqishi . . . 147
4.4 Salbiy binomial taqsimot . . . 150
4.5 Puasson taqsimoti . . . 153

5 Xulosa chiqarish asoslari **158**
5.1 Nuqtaviy baholash va tanlanma o'zgaruvchanligi . . . 160
5.1.1 Nuqtaviy baholar va xatolar . . . 160
5.1.2 Nuqtaviy bahoning o'zgaruvchanligini tushunish . . . 160
5.1.3 Markaziy limit teorema . . . 162
5.1.4 Markaziy limit teoremani haqiqiy hayotga qo'llash . . . 164
5.1.5 Markaziy limit teoremaga oid qo'shimcha tafsilotlar . . . 164
5.1.6 Statistikalar uchun doirani kengaytirish . . . 168
5.2 Nisbat uchun ishonch intervali . . . 170
5.2.1 Bosh to'plam parametlarini aniqlash . . . 170
5.2.2 95% lik ishonch intervallarini qurish . . . 170
5.2.3 Ishonch darajasini o'zgartirish . . . 171
5.2.4 Qo'shimcha holatlar tahlillari . . . 173

5.2.5 Ishonch intervallarini talqin qilish . . . 175
5.3 Nisbat uchun gipotezalar tekshiruvi . . . 177
5.3.1 Gipoteza testlash asoslari . . . 177
5.3.2 Ishonch intervallaridan foydalanib gipotezalarni testlash . . . 179
5.3.3 Qaror xatolari . . . 181
5.3.4 p-qiymatdan foydalanib rasmiy sinov . . . 182
5.3.5 Ahamiyatlilik darajasini tanlash . . . 186
5.3.6 Statistik ahamiyat va amaliy ahamiyat . . . 187
5.3.7 Bir tomonli gipoteza testlari (maxsus mavzu) . . . 188

6 Toifali ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish 193
6.1 Bitta nisbat uchun xulosalar . . . 195
6.1.1 Tanlanma nisbatining normalga yaqinligini aniqlash . . . 195
6.1.2 Nisbat uchun ishonch intervallari . . . 195
6.1.3 Nisbat uchun gipoteza testlari . . . 196
6.1.4 Bir yoki bir nechta shartlar bajarilmagan holatlarda . . . 198
6.1.5 Nisbatni baholashda tanlanma hajmini tanlash . . . 198
6.2 Ikki nisbat farqi . . . 202
6.2.1 Ikki nisbat farqining tanlanma taqsimoti . . . 203
6.2.2 Ikki nisbat farqi uchun ishonch intervallari . . . 203
6.2.3 Ikki nisbat farqi uchun gipoteza testlari . . . 205
6.2.4 Ikki nisbatli gipoteza testlari haqida ko'proq (maxsus mavzu) . . . 207
6.2.5 Standart xatolik formulasi bo'yicha izlanish (maxsus mavzu) . . . 209
6.3 Xi-kvadrat usuli yordamida moslikni tekshirish . . . 213
6.3.1 Bir yo'nalishli jadvallar uchun test statistikasi yaratish . . . 213
6.3.2 Xi-kvadrat test statistikasi . . . 214
6.3.3 Xi-kvadrat taqsimoti va sohalarni topish . . . 215
6.3.4 Xi-kvadrat taqsimoti uchun p-qiymatni topish . . . 216
6.3.5 Taqsimotga moslikni baholash . . . 219
6.4 Ikki yo'nalishli jadvallarda bog'liqsizlikni tekshirish . . . 222
6.4.1 Ikki yo'nalishli jadvallarda kutilgan qiymatlarni hisoblash . . . 223
6.4.2 Ikki yo'nalishli jadvallar uchun Xi-kvadrat testi . . . 225

7 Miqdoriy ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish 231
7.1 t-taqsimot yordamida bir tanlanmali o'rtachalar . . . 233
7.1.1 $\bar{x}$ taqsimoti . . . 233
7.1.2 $\bar{x}$ ni modellashtirish uchun talab qilinadigan ikkita shartni baholash . . . 233
7.1.3 t-taqsimot bilan tanishish . . . 235
7.1.4 Bitta tanlanmali t-ishonch intervali . . . 237
7.1.5 Yagona tanlanmali t-testlar . . . 239
7.2 Juft ma'lumotlar . . . 243
7.2.1 Juft kuzatuvlar . . . 243
7.2.2 Juft ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish . . . 244
7.3 Ikkita o'rtacha qiymatlarning farqi . . . 248
7.3.1 O'rtacha qiymatlar farqi uchun ishonch intervallari . . . 248
7.3.2 Ikki o'rtacha qiymat farqi uchun gipoteza testlari . . . 250
7.3.3 Amaliy misol: kurs imtihonining ikki xil varianti . . . 253
7.3.4 Qo'shma standart chetlanish bahosi (maxsus mavzu) . . . 254
7.4 O'rtacha qiymatlar farqi uchun quvvatni hisoblash . . . 258
7.4.1 Sinov jarayonlarini tushunish . . . 258
7.4.2 Ikki tanlanma testi uchun quvvatni hisoblash . . . 260
7.4.3 Mos tanlanma hajmini aniqlash . . . 261
7.5 Ko'p o'rtacha qiymatlarni solishtirish, ANOVA . . . 264
7.5.1 ANOVAning asosiy g'oyalari . . . 264
7.5.2 MLBda o'yinchi pozitsiyasi va zarba ko'rsatkichlari o'rtasida bog'liqlik bormi? 266
7.5.3 Dispersiyani tahlil qilish (ANOVA) va $\boldsymbol{F}$-test . . . 268
7.5.4 ANOVA jadvalini dasturiy ta'minotdan o'qish . . . 269
7.5.5 ANOVA tahlili uchun grafik diagnostika . . . 270

7.5.6 Ko‘p taqqoslashlar va Tip 1 xato darajasini boshqarish 270

8 Chiziqli regressiyaga kirish 281
8.1 Chiziqli moslashtirish, qoldiqlar va korrelyatsiya 283
8.1.1 Ma’lumotlarga chiziqni moslashtirish 283
8.1.2 Chiziqli regressiyadan foydalanib possum bosh uzunligini bashorat qilish . . . 284
8.1.3 Qoldiqlar 286
8.1.4 Chiziqli bog‘liqlikni korrelyatsiya bilan tavsiflash 288
8.2 Eng kichik kvadratlar usuli yordamida regressiya 294
8.2.1 Elmhurst kollejining birinchi kurs talabalari uchun yordam 294
8.2.2 Eng mos to‘g‘ri chiziqni topishning obyektiv mezoni 294
8.2.3 Eng kichik kvadratlar chizig‘i uchun shartlar 295
8.2.4 Eng kichik kvadratlar chizig‘ini topish 296
8.2.5 Regressiya modelidagi parametrlarni baholashni talqin qilish 298
8.2.6 Ekstrapolyatsiya xavflidir 299
8.2.7 R^2 yordamida moslashuv kuchini tavsiflash 299
8.2.8 Ikki darajali toifali bashoratlovchi o‘zgaruvchilar 300
8.3 Chiziqli regressiyadagi chetlashgan nuqtalarning turlari 304
8.4 Chiziqli regressiya uchun xulosalar 307
8.4.1 O‘rta muddatli saylovlar va ishsizlik darajasi 307
8.4.2 Dasturiy ta’minotdan regressiya natijalarini tushunish 308
8.4.3 Regressiya koeffitsiyenti uchun ishonch intervali 309

9 Ko‘p o‘lchovli va logistik regressiya 316
9.1 Ko‘p o‘lchovli regressiyaga kirish 318
9.1.1 Indikator va toifali o‘zgaruvchilar bashoratlovchi sifatida 319
9.1.2 Modelga ko‘plab o‘zgaruvchilarni kiritish va baholash 321
9.1.3 Tuzatilgan R^2 ko‘p o‘lchovli regressiya uchun yaxshiroq baholash vositasi . . 323
9.2 Modelni tanlash 326
9.2.1 Modelda foydali bo‘lmasligi mumkin bo‘lgan o‘zgaruvchilarni aniqlash 326
9.2.2 Modelni tanlashning ikkita strategiyasi 327
9.2.3 p-qiymat yondashuvi, R^2_{tuz} ga muqobil alternativ 329
9.3 Grafiklar yordamida model shartlarini tekshirish 331
9.3.1 Diagnostik grafiklar 332
9.3.2 Modelni moslashtirishni yaxshilash uchun variantlar 333
9.4 Ko‘p o‘lchovli regressiya bo‘yicha ish: Mario Kart 338
9.4.1 Ma’lumotlar to‘plami va to‘liq model 339
9.4.2 Modelni tanlash 340
9.4.3 Grafiklardan foydalanib model sharoitlarini tekshirish 341
9.5 Logistik regressiyaga kirish 343
9.5.1 Rezyume ma’lumotlari 343
9.5.2 Hodisa ehtimolini modellashtirish 345
9.5.3 Ko‘p o‘zgaruvchili logistik modelni qurish 347
9.5.4 Chaqiruv stavkasi modeli uchun diagnostika 349
9.5.5 Turli o‘lchamdagi guruhlar o‘rtasidagi kamsitishni o‘rganish 350

A Mashqlar yechimlari 356

B Matnda keltirilgan ma’lumotlar to‘plamlari 375

C Taqsimot jadvallari 381

So‘z boshi

“OpenIntro Statistics” statistikaga kirish kursini qamrab oladi va amaliy statistikaga aniq, ixcham va hammabop tarzda qat’iy kirish beradi. Ushbu kitob bakalavriat darajasi uchun yozilgan, biroq u o‘rta maktablarda va magistratura kurslarida ham keng foydalaniladi.

Biz umid qilamizki, o‘quvchilar ushbu kitobdan statistik tafakkur va usullar uchun poydevor shakllantirishdan tashqari, uchta g‘oyani o‘zlari bilan olib ketadilar:

- Statistika keng doiradagi amaliy qo‘llanilishga ega soha;
- Haqiqiy, qiziqarli ma’lumotlardan o‘rganish uchun siz matematika dahosi bo‘lishingiz shart emas;
- Ma’lumotlar tartibsiz, statistik vositalar esa mukammal emas. Ammo, ushbu vositalarning kuchli va zaif tomonlarini tushunib olganingizda, ulardan dunyoni o‘rganish uchun foydalana olasiz.

Darslik haqida umumiy ma’lumot

Ushbu kitobning boblari quyidagicha:

1. **Ma’lumotlarga kirish.** Ma’lumotlar tuzilmalari, o‘zgaruvchilar va ma’lumot to‘plashning asosiy usullari;
2. **Ma’lumotlarni umumlashtirish.** Ma’lumotlarning statistik umumlashmalari, grafik ko‘rinishlari va tasodifiylashtirish usuli orqali xulosa chiqarishga kirish;
3. **Ehtimollik.** Ehtimollikning asosiy prinsiplari;
4. **Tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari.** Normal taqsimot va boshqa asosiy taqsimotlar;
5. **Xulosa chiqarish asoslari.** Umumiy aholi ulushini baholash misolida statistik xulosa chiqarishning umumiy tamoyillari;
6. **Toifali ma’lumotlar uchun xulosalar chiqarish.** Normal va χ^2 (Xi-kvadrat)- taqsimotlari yordamida ulush va jadvallar uchun xulosa chiqarish;
7. **Miqdoriy ma’lumotlar uchun xulosalar chiqarish.** $t-$taqsimot funksiya yordamida bir yoki ikkita tanlanma o‘rtachalari uchun xulosa chiqarish, ikki guruhni solishtirishda statistik quvvat va shuningdek, ANOVA yordamida ko‘p o‘rtachalarni solishtirish;
8. **Chiziqli regressiyaga kirish.** Bitta bashoratlovchi o‘zgaruvchi bilan sonli natijani regressiya tahlili. Bobning aksariyat qismi 1-bobdan keyin o‘rganilishi mumkin;
9. **Ko‘p o‘lchovli va logistik regressiya.** Ko‘plab bashoratlovchi o‘zgaruvchilari yordamida sonli va kategoriyali ma’lumotlarni regressiya tahlili.

“OpenIntro Statistics” darsligi mavzularni tanlash va tartiblashda moslashuvchanlikni qo‘llab-quvvatlaydi. Agar asosiy maqsad iloji boricha tezroq 9-bobdagi “Ko‘p o‘lchovli regressiya” ga yetishish bo‘lsa, quyidagi boblar zaruriy asos hisoblanadi:

- 1-bob, 2.1- va 2.2-bo‘limlar – butun kitob davomida qo‘llaniladigan ma’lumotlar strukturasi va statistik umumlashmalarga mustahkam kirish;
- 4.1-bo‘lim – normal taqsimotni yaxshi tushunish uchun;

- 5-bob – asosiy xulosa chiqarish vositalari to‘plamini shakllantirish uchun;
- 7.1-bo‘lim – $t-$taqsimoti uchun asos yaratish;
- 8-bob - bitta bashoratlovchi o‘zgaruvchi bilan regressiya tahlili uchun g‘oya va tamoyillarni shakllantirish.

Misol va mashqlar

Usullarni qanday qo‘llashni tushunish uchun misollar taqdim etiladi.

M **0.1-MISOL**

Mana bu bir misol. Bu yerda savol berilganda, javobni qayerdan topish mumkin?

Javobni shu yerda, misollarning yechimlari bo‘limidan topish mumkin!

Biz o‘quvchi misolning yechimini topishga tayyor deb hisoblaganimizda, buni **yo‘naltirilgan mashq** shaklida beramiz.

Y **0.2-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

O‘quvchi har qanday yo‘naltirilgan mashqlarning javobini tekshirishi yoki o‘rganishi uchun pastki izohda keltirilgan to‘liq yechimni ko‘rib chiqishi mumkin.[1]

Har bir bo‘lim oxirida, shuningdek har bir bob oxirida takrorlash mashqlari ham taqdim etiladi. Toq sonli mashqlarning yechimlari A ilovada keltirilgan.

Qo‘shimcha resurslar

Ingliz tilidagi video sharhlar, slaydlar, statistik dasturiy ta’minot laboratoriyalari, darslikda qo‘llanilgan ma’lumotlar to‘plamlari va boshqa ko‘plab materiallarni quyidagi manzildan osongina topishingiz mumkin:

openintro.org/os.

Shuningdek, biz ushbu nashrda B ilova qo‘shilgan bo‘lib, u ma’lumotlarga kirish imkoniyatini yanada yaxshilaydi. U asosiy matnda qo‘llanilgan har bir ma’lumotlar to‘plami uchun qo‘shimcha tushuntirish taqdim etadi va bu to‘rtinchi nashrga yangi qo‘shilgan bo‘limdir. Ushbu ma’lumotlar to‘plamlarining har biri bo‘yicha onlayn qo‘llanmalar **openintro.org/data** sahifasida va maxsus R paketi shaklida ham taqdim etilgan.

Biz veb-sayt orqali beriladigan barcha fikr-mulohazalar va matndagi har qanday xatoliklar haqidagi xabarlarni qadrlaymiz. Yangi topilgan xatolarni xabar qilish yoki ma’lum xatolarni ko‘rib chiqish uchun qisqa havola: **openintro.org/os/typos**.

Maktab darajasidagi statistika bilan shug‘ullanuvchilar uchun **ingliz tilidagi** *“Advanced High School Statistics”* ni tavsiya etamiz. Bu “OpenIntro Statistics” asosida Leah Dorazio tomonidan maktab kurslari va AP® Statistics dasturi uchun chuqur moslashtirilgan nashridir.

Minnatdorchilik

Ushbu loyiha mualliflar ro‘yxatidan tashqarida bo‘lgan ko‘plab kishilarning shijoati va fidoyiligi bo‘lmaganida amalga oshmay qolgan bo‘lardi. Mualliflar OpenIntro xodimlariga ularning ishtiroki va doimiy hissalari uchun minnatdorchilik bildiramiz. Shuningdek, biz 2009-yilda darslik mazmunini birinchi marta e’lon qilganimizdan boshlab bizga qimmatli fikr-mulohazalar bergan yuzlab talabalar va o‘qituvchilardan minnatdormiz.

Shuningdek, ushbu nashrni ko‘rib chiqishda yordam bergan ko‘plab o‘qituvchilarga minnatdorchilik bildirmoqchimiz, jumladan: Laura Acion, Matthew E. Aiello-Lammens, Jonathan Akin, Stacey C. Behrensmeyer, Juan Gomez, Jo Hardin, Nicholas Horton, Danish Khan, Peter H.M. Klaren, Jesse Mostipak, Jon C. New, Mario Orsi, Steve Phelps, va David Rockoff. Ularning barcha fikr-mulohazalari uchun minnatdormiz, ular matnga muhim tuzatishlar kiritishga yordam berdilar. Natijada ushbu kitobni sezilarli darajada yaxshiladilar.

[1] Yo‘naltirilgan mashqlar sizning fikrlashingizni rivojlantirishga qaratilgan bo‘lib, siz har qanday yo‘naltirilgan mashqlar uchun pastki izohdagi yechimni ko‘rib chiqib o‘zingizni tekshirishingiz mumkin.

Tarjima va uning ilmiy tahriri mualliflarining so‘zboshi va minnatdorchiligi

Tarjima mualliflari shuni ta’kidlashni istaydilarki, ushbu kitob ochiq va erkin foydalaniladigan ta’limiy resurslarni targ‘ib qiluvchi “OpenIntro” loyihasining bir qismi hisoblanadi. Kitobning ingliz tilidagi “OpenIntro Statistics” nomi uning ochiq manbali xususiyatini hamda statistikadan avvalgi tayyorgarligi kam yoki umuman bo‘lmagan o‘quvchilar uchun mo‘ljallangan kirish darajasidagi darslik ekanini aks ettiradi. Shu bois ushbu kitob

“Statistikaga kirish - erkin foydalanish asosida”

deb nomlandi.

Ushbu kitob tarjimasini tayyorlash jarayonida matnning dastlabki lingvistik tarjimasi yaratib olindi va hosil qilingan ushbu dastlabki versiya keyinchalik mualliflar tomonidan sinchiklab ko‘rib chiqildi, verifikatsiya qilindi va tahrirlandi. Mazkur tarjimaning mazmuni, aniqligi va sifati uchun to‘liq mas’uliyat mualliflar zimmasida qoladi. Zamonaviy yordamchi vositalari (jumladan ChatGPT) dan foydalanilganiga qaramay, kitob ustida katta hajmdagi qo‘shimcha ishlar bajarildi. Xususan, barcha grafiklar qayta chizildi va ularda o‘nli kasrlarni ajratishda asl kitobda qo‘llanilgan nuqta o‘rniga, o‘zbek tilida qabul qilingan vergul ishlatildi. Xuddi shu tarzda kitobdagi barcha sonlar va jadvallar ham mos ravishda o‘zgartirildi va o‘zbek tilining yozuv me’yorlariga moslashtirildi.

Ingliz tilidagi asl nashrga openintro nomli rasmiy **R** paketi hamrohlik qiladi va u OpenIntro jamoasi tomonidan qo‘llab-quvvatlanadi. Ushbu paket bilan ishlash jarayonida yuzaga kelishi mumkin bo‘lgan chalkashliklarning oldini olish maqsadida, ma’lumotlar to‘plamlaridagi o‘zgaruvchilarning asl nomlarini ham keltirib o‘tildi. Kitob matnida ushbu o‘zgaruvchilarning o‘zbekcha tarjimalari hamda ularning batafsil tavsiflari keltirilgan. Shuni alohida ta’kidlash lozimki, statistikada tarjima qilinishi maqsadga muvofiq bo‘lmagan bir qator terminlar mavjud. Masalan, AIC (Akaike Information Criterion) shular jumlasidandir. Shu sababli statistikada umumiy qabul qilingan ayrim terminlar ushbu matnda tarjima qilinmadi. Nihoyat, shuni ta’kidlash joizki, ayrim inglizcha statistik tushunchalar hamda ayrim ingliz so‘zlar tarjima mualliflarining kasbiy amaliyotida uchramagan. Shu sababli, ularning ma’nolari o‘zbekcha izohli lug‘at asosida (**https://izoh.uz/**), asl mazmunga imkon qadar yaqin holda ifodalandi.

Mualliflar ushbu kitob ustida o‘zlarining bo‘sh vaqtlarida – kechqurunlari, tunlari va dam olish kunlari ishlashdi. Shu sababli ular odatdagidek o‘z yaqinlari va azizlariga yetarlicha vaqt ajrata olmadilar. Shuning uchun mualliflar o‘z yaqinlari va azizlariga tushunishlari, sabr-toqatlari hamda doimiy qo‘llab-quvvatlaganlari uchun samimiy minnatdorlik bildiradilar. Bundan tashqari, mualliflar Toshkent Kimyo xalqaro universiteti talabalari – Azani Muslim, Matkarimova Aziza, Murodov Aziz, Niyazova Zebo, Shuxratova Saliha, Xudoynazarova Madina, Yakubova Yasmina va Yoqubova Madinaga, shuningdek, “Aniq fanlar” kafedrasi xodimlari – Arabbayev Azimjon, Nazarov Zuhriddin, Umaraliyeva Diyora, Umurova Shalola va Zoyidov A’zamga matnni sinchkovlik bilan o‘qib chiqqanlari hamda bildirgan fikr-mulohazalari uchun minnatdorchilik bildiradilar. Biz ularning hissasini mamnuniyat bilan e’tirof etamiz. Aleksey Min 2026-yil aprel oyidagi ilmiy tashrif uchun moliyaviy ko‘mak ko‘rsatgan Toshkent Kimyo xalqaro universitetiga o‘z minnatdorchiligini bildiradi.

1-BOB

Ma’lumotlarga kirish

1.1 Amaliy misol: insultga qarshi stentlar

1.2 Ma’lumotlar asoslari

1.3 Tanlanma olish tamoyillari va strategiyalari

1.4 Eksperimentlar

Olimlar qat'iy usullar va sinchkovlik bilan qilingan kuzatuvlar yordamida savollarga javob topishga intiladilar. Dala qaytlarida, so‘rovnomalarda va tajribalarda to‘plangan ushbu kuzatuvlar statistik tadqiqotning asosini tashkil etadi va **ma'lumotlar** deb ataladi. Statistika ma'lumotlarni qanday to‘plash, tahlil qilish va ulardan xulosa chiqarishni o‘rganadigan fan bo‘lib, biz ushbu birinchi bobda ma'lumotlarning xususiyatlari hamda ularni to‘plash usullariga e'tibor qaratamiz.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

1.1 Amaliy misol: insultga qarshi stentlar

1.1-bo'lim statistikadagi klassik muammo hisoblanadigan tibbiy muolajaning samaradorligini qanday baholashni tanishtiradi. Ushbu bo'limdagi atamalar, hatto ushbu bobning katta qismi bo'ylab uchraydigan tushunchalar ham matnning keyingi qismlarida yana qayta ko'rib chiqiladi. Hozircha maqsadimiz – statistikaning amaliyotda qanday rol o'ynashi haqida umumiy tasavvur hosil qilish.

Bu bo'limda biz insult xavfi yuqori bo'lgan bemorlarni davolashda stentlarning ta'sirchanligini o'rganadigan bir tajribani ko'rib chiqamiz. Stentlar – qon tomirlarining ichiga o'rnatiladigan qurilmalar bo'lib, yurak bilan bog'liq hodisalardan (masalan, infarkt) keyin bemorning tiklanishiga yordam beradi va takroriy yurak xuruji yoki o'lim xavfini kamaytiradi. Ko'plab shifokorlar insult xavfi yuqori bemorlar uchun ham shunga o'xshash foyda bo'lishiga umid qilgan. Avvalo, tadqiqotchilar javob topishni umid qilayotgan asosiy savolni bayon etamiz:

Stentlardan foydalanish insult xavfini kamaytiradimi?

Tadqiqotchilar ushbu savolga javob topish uchun 451 nafar insult xavfi ostidagi bemorlar bilan tajriba o'tkazishdi. Har bir ko'ngilli bemor tasodifiy ravishda ikkita guruhdan biriga ajratildi:

Davolash guruhi. Davolash guruhidagi bemorlarga stent o'rnatildi va ular tibbiy nazorat ostida bo'lishdi. Tibbiy nazorat tarkibiga dori vositalarini qabul qilish, xavf omillarini boshqarish hamda turmush tarzini o'zgartirish bo'yicha tavsiyalar va yordam kiritilgan.

Nazorat guruhi. Nazorat guruhidagi bemorlar davolash guruhidagilar bilan bir xil tibbiy nazoratni oldilar, biroq ularga stentlar o'rnatilmaydi.

Tadqiqotchilar tasodifiy tarzda 224 nafar bemorni davolash guruhiga va 227 nafar bemorni nazorat guruhiga taqsimladilar. Ushbu tadqiqotda nazorat guruhi davolash guruhidagi stentlarning tibbiy ta'sirini o'lchash uchun taqqoslash nuqtasi sifatida xizmat qiladi.

Tadqiqotchilar stentlarning ta'sirini ikki marta o'rganishdi: ro'yxatga kiritilgandan 30 kun o'tib va 365 kun o'tib. 5 nafar bemorning natijalari 1.1-rasmda keltirilgan. Bemorlarning natijalari "insult" yoki "hodisa kuzatilmadi" tarzida qayd etilgan bo'lib, bu bemorlarda belgilangan vaqt oralig'i oxirida insult yuz bergan yoki bermaganini bildiradi.

Bemor	Guruh	0-30 kunlar	0-365 kunlar
1	davolash	hodisa kuzatilmadi	hodisa kuzatilmadi
2	davolash	insult	insult
3	davolash	hodisa kuzatilmadi	hodisa kuzatilmadi
⋮	⋮	⋮	
450	nazorat	hodisa kuzatilmadi	hodisa kuzatilmadi
451	nazorat	hodisa kuzatilmadi	hodisa kuzatilmadi

1.1-rasm. Stent tadqiqotidagi besh bemorning natijalari.

Har bir bemor ma'lumotlarini alohida ko'rib chiqish dastlabki tadqiqot savoliga javob topish uchun juda uzun va noqulay yo'l hisoblanadi. Buning o'rniga, ma'lumotlarni statistik tahlilini bajarish barcha ma'lumotlarni birdaniga ko'rib chiqish imkonini beradi. 1.2-rasm xom ma'lumotlarni ancha foydali tarzda jamlaydi. Ushbu jadvalda butun tadqiqot davomida nimalar sodir bo'lganini tezda ko'rishimiz mumkin. Masalan, 30 kun ichida insult kuzatilgan davolash guruhidagi bemorlar sonini aniqlash uchun, jadvalning chap tomonida davolash va insult kesishgan joyga qaraymiz: 33.

Y

1.1-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Davolash guruhidagi 224 bemordan 45 nafari birinchi yil oxiriga kelib insultga uchragan. Ushbu ikkita son yordamida, birinchi yil oxiriga kelib insultga uchragan davolash guruhidagi bemorlar ulushini hisoblang. (Eslatma: barcha yo'naltirilgan mashqlar uchun javoblar izohlar yordamida taqdim etiladi.)[1]

	0-30 kunlar		0-365 kunlar	
	insult	hodisa kuzatilmadi	insult	hodisa kuzatilmadi
davolash	33	191	45	179
nazorat	13	214	28	199
Jami	46	405	73	378

1.2-rasm. Stent tadqiqoti uchun tavsifiy statistika.

Biz jadvaldan umumlashtiruvchi statistikani hisoblashimiz mumkin. **Umumlashtiruvchi statistika** katta hajmdagi ma'lumotni bir raqam bilan ifodalovchi son hisoblanadi. Masalan, tadqiqotning bir yil davomidagi asosiy natijalari ikkita umumlashtiruvchi statistika yordamida tavsiflanishi mumkin. Bular davolash va nazorat guruhlarida insultga uchraganlar ulushi.

Davolash (stent) guruhida insultga uchraganlar ulushi: $45/224 = 0{,}20 = 20\%$.

Nazorat guruhida insultga uchraganlar ulushi: $28/227 = 0{,}12 = 12\%$.

Ushbu ikkita umumlashtiruvchi statistika guruhlar orasidagi farqlarni aniqlashda foydali. Bu yerda bizni kutilmagan holat qarshi oladi: davolash guruhida qo'shimcha 8% bemorda insult sodir bo'lgan! Bu ikki sababga ko'ra muhim. Birinchidan, bu shifokorlar kutganiga zid: stentlar insult chastotasini kamaytirishi kerak edi. Ikkinchidan, bu statistik savolni tug'diradi: ma'lumotlar guruhlar o'rtasida "haqiqiy" farq borligini ko'rsata oladimi?

Ushbu ikkinchi savol nozikdir. Tasavvur qiling, tanga 100 marta tashlanadi. Har bir tashlashda tanganing gerb tomoni tushish ehtimoli 50% bo'lsa-da, biz aniq 50 marta gerb tushishini kuzatmasligimiz mumkin. Bunday o'zgaruvchanlik deyarli har qanday ma'lumot yaratish jarayonining bir qismidir. Stent tadqiqotidagi 8% farq ushbu tabiiy o'zgaruvchanlik natijasi bo'lishi mumkin. Biroq, kuzatilgan farq qanchalik katta bo'lsa (ma'lum bir namunaviy hajm uchun), bu farqning tasodif tufayli yuzaga kelganiga shunchalik kam ishoniladi. Shunday qilib, aslida so'rayotganimiz shuki: farq shunchalik kattami, uni tasodif natijasi deb hisoblash g'oyasini rad etishimiz kerakmi?

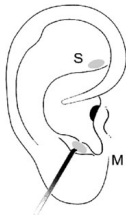
Bizda ushbu savolni mustaqil ravishda to'liq hal qilish uchun hali statistik vositalar mavjud emas, biroq e'lon qilingan tahlil xulosalarini anglay olamiz. Ushbu insult bemorlari tadqiqotida stentlarning zararli ekanligi to'g'risida ishonarli dalillar mavjud edi.

Diqqat qiling! Ushbu tadqiqot natijalarini barcha bemorlarga va barcha stentlarga umumlashtirmang. Ushbu tadqiqot juda aniq xususiyatlarga ega bo'lgan va tadqiqotda ishtirok etishga ixtiyoriy rozilik bildirgan bemorlarni ko'rib chiqdi xolos. Ular barcha insult bemorlarini to'liq ifodalamasligi mumkin. Bundan tashqari, stentlarning ko'plab turlari mavjud va bu tadqiqot faqat o'z-o'zidan kengayuvchi Vingspan stenti (Boston Scientific)ni ko'rib chiqdi. Shunga qaramay, bu tadqiqot muhim saboq beradi. Kutilmagan holatlarga doimo tayyor turishimiz kerak.

Mashqlar

1.1 Migren va akupunktur, 1-qism. Migren – bu bosh og'rig'ining ayniqsa og'riqli turi bo'lib, bemorlar ba'zida uni akupunktur bilan davolashni xohlashadi. Akupunktur migren og'rig'ini yengillashtiradimi yoki yo'qligini aniqlash uchun tadqiqotchilar migren bosh og'rig'i tashxisi qo'yilgan 89 ta ayolni tasodifiy ravishda ikkita davolash va nazorat guruhlariga ajratgan holda tadqiqot olib bordilar. Davolash guruhidagi 43 ta bemor migrenni davolash uchun maxsus mo'ljallangan akupunktur oldi. Nazorat guruhidagi 46 ta bemor plasebo akupunktur (ignalarni akupunktur nuqtalari bo'lmagan joylarga sanchish) oldi. Bemorlar akupunktur olganidan 24 soat o'tgach, ulardan og'riqsiz yurganligi so'raldi. Natijalar quyidagi kontingentlik jadvalida umumlashtirildi.[2]

		Og'riqsiz		
		Ha	Yo'q	Jami
Guruh	Davolash	10	33	43
	Nazorat	2	44	46
	Jami	12	77	89



Ushbu rasm asl maqoladan olingan bo'lib, migren xurujlarini davolash uchun ishlatilgan mos (M) va mos bo'lmagan (S) joylarni ko'rsatadi.

[1] 365 kun ichida insultga uchragan 224 bemorning ulushi: $45/224 = 0{,}20$.

[2] G. Allais et al. "Ear acupuncture in the treatment of migraine attacks: a randomized trial on the efficacy of appropriate versus inappropriate acupoints". In: *Neurological Sci.* 32.1 (2011), pp. 173–175.

(a) Davolash guruhidagi bemorlarning necha foizida akupunktur olganidan 24 soat o'tgach og'riq qoldi?
(b) Nazorat guruhida necha foiz bemorlarda og'riq qoldi?
(c) Qaysi guruhda akupunktur olganidan 24 soat o'tgach ko'proq foiz bemorlarda og'riq qoldi?
(d) Sizning hozirgacha topgan natijalaringiz shuni ko'rsatadiki, akupunktur migrendan aziyat chekayotgan barcha bemorlar uchun samarali davo usulidir. Biroq, hozirgacha kuzatilgan dalillarga asoslanib chiqarilishi mumkin bo'lgan yagona xulosa bu emas. Ikki guruhda akupunktur olganidan 24 soat o'tgach og'riqsiz bo'lgan bemorlarning foizlari o'rtasidagi farqni tushuntiruvchi yana qanday boshqa ehtimoliy izoh bo'lishi mumkin?

1.2 Sinusit va antibiotiklar, 1-qism. O'tkir sinusitni antibiotiklar bilan davolashning samaradorligini simptomatik davolash usullari bilan solishtirish maqsadida tadqiqotchilar, o'tkir sinusit tashxisi qo'yilgan 166 ta katta yoshli bemorlarni tasodifiy ravishda davolash va nazorat guruhlariga ajratdilar. Ishtirokchilar 10 kunlik amoksitsillin (antibiotik) kursini yoki tashqi ko'rinishi va ta'mi o'xshash bo'lgan plaseboni oldilar. Plasebo acetaminofen va burun tiqilishiga qarshi dori kabi simptomatik davolash usullaridan iborat edi. 10 kunlik davr oxirida bemorlardagi simptomlarning yaxshilangan yoki yaxshilanmaganligi so'raldi. Javoblarning taqsimoti quyida keltirilgan.[3]

		O'z-o'zidan yaxshilanish haqida ma'lumot simptomlar bo'yicha		
		Ha	Yo'q	Jami
Guruh	Davolash	66	19	85
	Nazorat	65	16	81
	Jami	131	35	166

(a) Davolash guruhidagi bemorlarning necha foizi simptomlarning yaxshilanishini his qildi?
(b) Nazorat guruhidagi bemorlarning necha foizi simptomlarning yaxshilanishini his qildi?
(c) Qaysi guruhda bemorlarning yuqori foizi simptomlarning yaxshilanishini his qildi?
(d) Sizning hozirga qadar olgan natijalaringiz antibiotik va plasebo davolash usullarining sinusit simptomlarini yaxshilash samaradorligida haqiqiy farq borligini ko'rsatishi mumkin. Biroq, hozirgi ma'lumotlarga asoslanib chiqarilishi mumkin bo'lgan yagona xulosa bu emas. Antibiotik va plasebo davolash guruhlarida sinusit simptomlarini yaxshilanishini his qilgan bemorlarning foizlari o'rtasidagi farqni tushuntiruvchi yana qanday izoh bo'lishi mumkin?

1.2 Ma'lumotlar asoslari

Ma'lumotlarni samarali tartiblash va tavsiflash – aksariyat tahlillarning birinchi bosqichidir. Ushbu bo'limda ma'lumotlarni tartibga solish uchun *ma'lumotlar matritsasi* tushunchasi hamda butun kitob davomida ishlatiladigan turli shakldagi ma'lumot turlari haqidagi atamalar keltiriladi.

1.2.1 Kuzatuvlar, o'zgaruvchilar va ma'lumotlar matritsalari

1.3-rasm "Lending Club" orqali taklif qilingan tasodifiy tanlangan 50 ta kredit uchun ma'lumotlar to'plamining 1-, 2-, 3- va 50-qatorlarini ko'rsatadi. Lending Club tengdoshdan-tengdoshga (peer-to-peer) kreditlash kompaniyasidir. Ushbu kuzatuvlar `loan50` ma'lumotlar to'plami deb ataladi. Jadvaldagi har bir qator bitta kreditni ifodalaydi. Qatorning rasmiy nomi **qayd** yoki **kuzatuv birligi** deb ataladi. Ustunlar esa har bir kredit uchun **o'zgaruvchilar** deb nomlanadigan xususiyatlarni ifodalaydi. Masalan, birinchi qator umumiy miqdori 22000 AQSh dollar, yillik foiz stavkasi 10,9% bo'lgan kreditni ifodalaydi. Qarz oluvchi Nyu-Jersi (New Jersey, NJ) shtatida yashaydi va uning yillik daromadi 59000 AQSh dollari.

Y **1.2-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

1.3-rasmdagi birinchi kreditning darajasi (`grade`) qanday? Shu birinchi kredit bo'yicha qarz oluvchining uy-joyga egalik huquqi (`homeownership`) qanday holatda? Ushbu yo'naltirilgan mashq javoblarini pastki izohda tekshirishingiz mumkin.[4]

[3] J.M. Garbutt et al. "Amoxicillin for Acute Rhinosinusitis: A Randomized Controlled Trial". In: *JAMA: The Journal of the American Medical Association* 307.7 (2012), pp. 685–692.

Amaliyotda ma'lumotlarning muhim jihatlarini to'g'ri tushunish uchun aniqlovchi savollar berish zarur. Masalan, har bir o'zgaruvchi nimani anglatishini va o'lchov birliklarini tushunish har doim muhimdir. `loan50` ma'lumotlar to'plamidagi o'zgaruvchilar tavsiflari 1.4-rasmda keltirilgan.

	loan_amount	interest_rate	term	grade	state	total_income	homeownership
1	22000	10,90	60,00	B	NJ	59 000,00	ijara
2	6000	9,92	36,00	B	CA	60 000,00	ijara
3	25000	26,30	36,00	E	SC	75 000,00	ipoteka
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
50	15000	6,08	36,00	A	TX	77 500,00	ipoteka

1.3-rasm. `loan50` ma'lumotlar matritsasining to'rtta qatori.

O'zgaruvchi	**Tavsif**
`loan_amount`	Olingan kredit miqdori, AQSh dollarida.
`interest_rate`	Kredit bo'yicha yillik foiz stavkasi.
`term`	Kredit muddati, har doim butun oylar soni sifatida belgilangan.
`grade`	Kredit darajasi, bu A dan G gacha qiymatlarni qabul qiladi va kredit sifatini hamda uni qaytarilish ehtimolini ifodalaydi.
`state`	Qarz oluvchi istiqomat qiluvchi AQSh shtati.
`total_income`	Qarz oluvchining umumiy daromadi, istalgan ikkinchi daromadni ham o'z ichiga olgan holda, AQSh dollarida.
`homeownership`	Shaxsning uy-joyga egaligi, ipoteka bilan egaligi yoki ijarada ekanligini bildiradi.

1.4-rasm. `loan50` ma'lumotlar to'plamining o'zgaruvchilari va ularning tavsifi.

1.3-rasmdagi ma'lumotlar **ma'lumotlar matritsasi**ni ifodalaydi. Bu ma'lumotlarni tartibga solishning qulay va keng tarqalgan usuli bo'lib, ayniqsa ma'lumotlarni elektron jadvalda to'plashda qo'llaniladi. Ma'lumotlar matritsasining har bir qatori noyob holatga (kuzatuv birligiga), har bir ustuni esa bir o'zgaruvchiga to'g'ri keladi.

Ma'lumotlarni yozishda, agar boshqa tuzilmani qo'llash uchun juda yaxshi sabab bo'lmasa, ma'lumotlar matritsasidan foydalaning. Ushbu tuzilma yangi holatlarni qator sifatida yoki yangi o'zgaruvchilarni ustun sifatida qo'shishga imkon beradi.

Y **1.3-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Kursdagi topshiriqlar, testlar va imtihonlar uchun baholar ko'pincha ma'lumotlar matritsasi shaklida baholar daftarida yozib boriladi. Baholarni ma'lumotlar matritsasi yordamida qanday tartibga solishingiz mumkin?[5]

Y **1.4-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Biz AQShdagi 3142 ta okrug to'g'risidagi ma'lumotlarni ko'rib chiqamiz, ularga har bir okrugning nomi, joylashgan shtati, 2017-yilgi aholi soni, 2010-yildan 2017-yilgacha bo'lgan aholi o'zgarishi, qashshoqlik darajasi va yana oltita qo'shimcha xususiyati kiradi. Ushbu ma'lumotlar ma'lumotlar matritsasida qanday tartibga solinishi mumkin?[6]

1.4-yo'naltirilgan mashqda tavsiflangan ma'lumotlar `county` (okrug) ma'lumotlar to'plamini ifodalaydi va ular 1.5-rasmda ma'lumotlar matritsasi shaklida ko'rsatilgan. o'zgaruvchilar esa 1.6-rasmda tavsiflangan.

[4]Kreditning darajasi B va qarz oluvchi uy-joy egasi emas, ya'ni u ijarachi.

[5]Amalga oshirish mumkin bo'lgan bir nechta yondashuvlar mavjud. Keng tarqalgan usullardan biri shundan iboratki, har bir talaba alohida qator bilan ifodalanadi va har bir topshiriq, test yoki imtihon uchun ustun qo'shiladi. Ushbu tizimda har bir talabaning baholari tarixini bir qatorni ko'rib chiqish orqali osongina tahlil qilish mumkin. Bundan tashqari, talabalar haqidagi ma'lumotlarni (masalan, talabalarning ism-sharifi kiritiladigan ustun) kiritish uchun ham qo'shimcha ustunlar bo'lishi kerak.

[6]Har bir okrug kuzatuv birligi sifatida ko'rib chiqilishi mumkin bo'lib, har biri uchun o'n bir turdagi ma'lumot yozib olingan. 3142 ta qator va 11 ta ustundan iborat jadval ushbu ma'lumotlarni saqlashi mumkin. Bunda har bir qator bitta okrugni, har bir ustun esa ma'lum bir ma'lumot turini ifodalaydi.

	name	state	pop	pop_change	poverty	homeownership	multi_unit	unemp_rate	metro	median_edu	median_hh_income
1	Autauga	Alabama	55504	1,48	13,7	77,5	7,2	3,86	yes	some_college	55317
2	Baldwin	Alabama	212628	9,19	11,8	76,7	22,6	3,99	yes	some_college	52562
3	Barbour	Alabama	25270	−6,22	27,2	68,0	11,1	5,90	no	hs_diploma	33368
4	Bibb	Alabama	22668	0,73	15,2	82,9	6,6	4,39	yes	hs_diploma	43404
5	Blount	Alabama	58013	0,68	15,6	82,0	3,7	4,02	yes	hs_diploma	47412
6	Bullock	Alabama	10309	−2,28	28,5	76,9	9,9	4,93	no	hs_diploma	29655
7	Butler	Alabama	19825	−2,69	24,4	69,0	13,7	5,49	no	hs_diploma	36326
8	Calhoun	Alabama	114728	−1,51	18,6	70,7	14,3	4,93	yes	some_college	43686
9	Chambers	Alabama	33713	−1,20	18,8	71,4	8,7	4,08	no	hs_diploma	37342
10	Cherokee	Alabama	25857	−0,60	16,1	77,5	4,3	4,05	no	hs_diploma	40041
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3142	Weston	Wyoming	6927	−2,93	14,4	77,9	6,5	3,98	no	some_college	59605

1.5-rasm. `county` ma'lumotlar to'plamidan o'n bir qator.

O'zgaruvchilar	**Tavsif**
`name`	Okrug (county) nomi.
`state`	Okrug joylashgan shtat yoki Kolumbiya okrugi (District of Columbia).
`pop`	2017-yildagi aholi soni.
`pop_change`	2010–2017 yillar oralig'ida aholi sonining foiz hisobidagi o'zgarishi. Masalan, birinchi qatordagi 1,48 qiymati ushbu okrugda 2010 dan 2017 gacha aholi 1,48% ga oshganini anglatadi.
`poverty`	Qashshoqlikda yashayotgan aholining foizi.
`homeownership`	O'z uyida yashaydigan yoki uy egasi bilan birga yashaydigan aholining foizi (masalan, uyni egallagan ota-onasi bilan yashovchi bolalar).
`multi_unit`	Ko'p xonadonli inshootlarda (masalan, kvartiralarda) joylashgan turar-joy birliklarining foizi.
`unemp_rate`	Ishsizlik darajasi (foizda).
`metro`	Okrug tarkibida yirik shahar aglomeratsiyasi mavjudligi: `yes` va `no`.
`median_edu`	Ta'lim darajasi medianasi. Quyidagi qiymatlardan birini qabul qiladi: `below_hs`, `hs_diploma`, `some_college`, va `bachelors`.
`median_hh_income`	Okrug uchun uy xo'jaligi daromadi medianasi; bu yerda uy xo'jaligi daromadi 15 yosh yoki undan katta barcha a'zolarning jami daromadiga teng.

1.6-rasm. `county` ma'lumotlar to'plamidagi o'zgaruvchilar va ularning tavsiflari.

1.2.2 O‘zgaruvchilar turlari

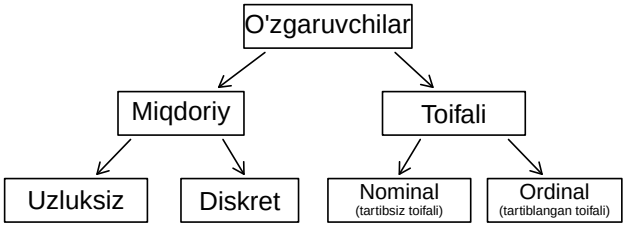
`county` ma'lumotlar to‘plamidagi ishsizlik darajasi (`unemp_rate`), aholi soni (`pop`), shtat (`stat`) va ta'lim medianasi (`median_edu`) o‘zgaruvchilarini ko‘rib chiqing (*1.6-rasmda o‘zgaruvchilar haqidagi batafsil izohlar keltirilganligi uchun bundan keyin ularni o‘zbek tilidagi tavsifi bilan keltiramiz*). Ushbu o‘zgaruvchilarning har biri o‘ziga xosdir, lekin ayrimlari bir-biriga o‘xshash xususiyatlarga ega.

Avval ishsizlik darajasi o‘zgaruvchisini ko‘rib chiqing. Bu o‘zgaruvchi **miqdoriy o‘zgaruvchi** deb ataladi, chunki u keng diapazondagi sonli qiymatlar qabul qilishi mumkin va bu qiymatlar bilan qo‘shish, ayirish yoki o‘rtacha hisoblash mantiqiydir. Boshqa tomondan, telefon raqamlari kodi kabi o‘zgaruvchilar miqdoriy deb tasniflanmaydi, chunki kodlarning o‘rtacha qiymati, yig‘indisi yoki farqi hech qanday mantiqiy ma'noga ega emas.

Aholi soni o‘zgaruvchisi ham miqdoriy o‘zgaruvchi, lekin u `ishsizlik darajasi` ga qaraganda biroz boshqacha ko‘rinadi. Aholi soni o‘zgaruvchisi faqat butun va manfiy bo‘lmagan sonlarni (`0`, `1`, `2`, ...) qabul qilishi mumkin. Shu sababli, aholi soni o‘zgaruvchisi **diskret o‘zgaruvchi** deb ataladi, chunki u faqat sakrashlar bilan sonli qiymatlar qabul qiladi. Boshqa tomondan, ishsizlik darajasi **uzluksiz o‘zgaruvchi** deb ataladi.

Shtat o‘zgaruvchisi Vashington, Kolumbiya okrugini (District of Columbia, DC) hisobga olinganda 51 ta qiymat qabul qilishi mumkin: `AL`, `AK`, ... va `WY`. Qiymatlari kategoriyalar bo‘lgani uchun, shtat **toifali o‘zgaruvchi** deb ataladi va mumkin bo‘lgan qiymatlari **o‘zgaruvchining darajalari** deb ataladi.

Nihoyat, ta'lim medianasi o‘zgaruvchisini ko‘rib chiqing. Bu o‘zgaruvchi okrug aholisi uchun o‘rtacha ta'lim darajasini ifodalaydi va har bir okrugda `below_hs`, `hs_diploma`, `some_college`, yoki `bachelors` qiymatlarini qabul qiladi. Bu o‘zgaruvchi birlashgan xususiyatga ega. U toifali o‘zgaruvchi, lekin darajalari tabiiy tartibga ega. Bunday xususiyatlarga ega o‘zgaruvchi **ordinal o‘zgaruvchi** deb ataladi, oddiy toifali o‘zgaruvchi esa **nominal o‘zgaruvchi** deb ataladi. Tahlillarni soddalashtirish uchun, ushbu kitobdagi har qanday ordinal o‘zgaruvchi nominal o‘zgaruvchi sifatida qaraladi.



1.7-rasm. O‘zgaruvchilarning tegishli turlar bo‘yicha ajratilishi.

M **1.5-MISOL**

Statistika kursida talabalardan ma'lumotlar yig‘ildi. Har bir talaba uchun uchta o‘zgaruvchi qayd etildi. Aka-uka yoki opa-singillar soni, talabaning bo‘yi va talabaning ilgari statistika kursini o‘tgan yoki o‘tmaganligi. Har bir o‘zgaruvchini uzluksiz, diskret yoki toifali sifatida tasniflang.

Aka-uka yoki opa-singillar soni va talabaning bo‘yi miqdoriy o‘zgaruvchilarni ifodalaydi. Aka-uka yoki opa-singillar soni diskret hisoblanadi. Bo‘y uzluksiz o‘zgaruvchan bo‘lgani sababli, bu uzluksiz o‘zgaruvchidir. So‘nggi o‘zgaruvchi talabalarning ikki toifaga – statistika kursini o‘tganlar va o‘tmaganlarga – bo‘linishini tasniflaydi. Bu o‘zgaruvchi toifali hisoblanadi.

Y **1.6-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Migrenlarni davolash uchun yangi dori samaradorligini baholovchi eksperiment o‘tkazilmoqda. Har bir bemor uchun guruh (`group`) o‘zgaruvchisi eksperiment guruhini davolash yoki nazorat ekanligini belgilaydi. Migren soni (`num_migraines`) o‘zgaruvchisi bemor 3 oy davomida boshdan kechirgan migrenlar sonini bildiradi. O‘zgaruvchilarni miqdoriy yoki toifali ekanligini aniqlang?[7]

[7]Guruh o‘zgaruvchisi faqat ikki guruh nomidan birini qabul qiladi, shuning uchun u toifali. migren soni o‘zgaruvchisi migrenlar sonini tavsiflaydi. U uchun oddiy arifmetik amallar ma'noga ega bo‘ladi, demak bu miqdoriy o‘zgaruvchi. Yanada aniqroq aytganda, u sanoqni ifodalagani uchun diskret miqdoriy o‘zgaruvchi.

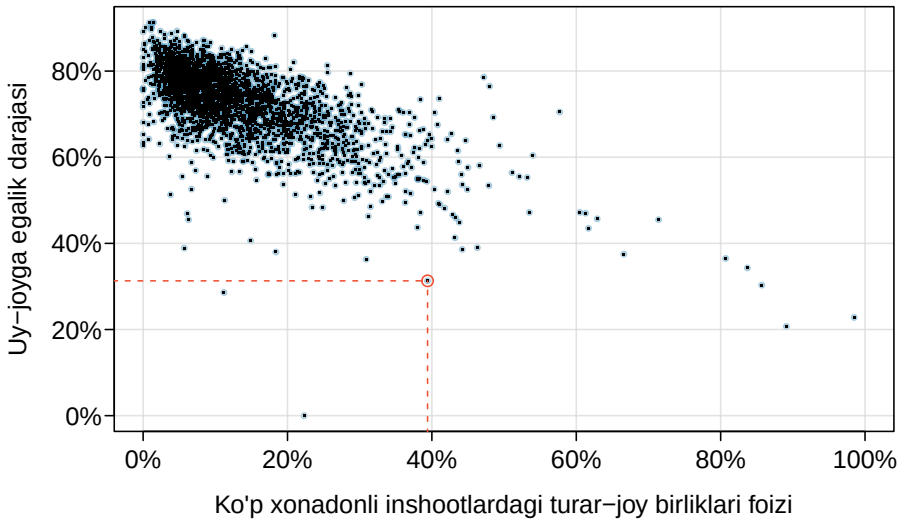
1.2.3 O‘zgaruvchilar orasidagi munosabatlar

Ko‘plab tahlillar tadqiqotchining ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchilar orasidagi munosabatni izlashidan kelib chiqadi. Ijtimoiy fanlar bo‘yicha tadqiqotchi quyidagi savollardan ayrimlariga javob topishni istashi mumkin:

1) Agar bir okrugda o‘z uyida yashovchilar ulushi milliy o‘rtachadan past bo‘lsa, o‘sha okrugdagi ko‘p xonadonli inshootlar ulushi milliy o‘rtachadan yuqori bo‘ladimi yoki pastmi?
2) Okrug aholisi sonining o‘rtachadan yuqori o‘sishi uy-xo‘jaligi daromadining medianasi yuqori bo‘lgan okruglarga mos keladimi yoki past bo‘lgan okruglarga mos keladimi?
3) AQSh okruglari bo‘yicha uy-xo‘jaligi daromadining medianasini bashorat qilishda ta'lim darajasi medianasi qanchalik foydali bashoratlovchi o‘zgaruvchi (prediktor)?

Ushbu savollarga javob berish uchun ma'lumotlar to‘plami kerak, masalan, 1.5-rasmdagi `county` ma'lumotlar to‘plami. Tavsifiy statistikalarni ko‘rib chiqish okruglar haqidagi ushbu uch savol bo‘yicha tushunchalar berishi mumkin. Bundan tashqari, ma'lumotlarni vizual tadqiq qilish uchun grafiklardan ham foydalaniladi.

Sochma diagrammalar – bu ikki miqdoriy o‘zgaruvchi orasidagi munosabatni o‘rganishda qo‘llaniladigan grafik turlaridan biridir. 1.8-rasmda uy-joyga egalik (`homeownership`) va ko‘p xonadonli inshootlar (`multi_unit`, o‘rnatilgan birliklarning ko‘p xonadonli inshootlarda joylashgan ulushi, masalan, kvartiralar) o‘zgaruvchilari taqqoslanadi. Grafikdagi har bir nuqta bitta okrugni ifodalaydi. Masalan, ajratib ko‘rsatilgan nuqta `county` to‘plamidagi 413-okrukka, ya'ni AQShning Jorjiya shtatidagi Chattahoochee okrugiga mos keladi. Unda ko‘p xonadonli inshootlardagi birliklar ulushi 39,4% va o‘z uyida yashash darajasi 31,3% ni tashkil etadi. Sochma diagramma bu ikki o‘zgaruvchi orasida ma'lum munosabat borligini ko‘rsatadi: ko‘p xonadonli birliklar ulushi yuqoriroq bo‘lgan okruglarda o‘z uyida yashash darajasi odatda pastroq bo‘ladi. Nega bunday munosabat mavjudligini muhokama qilib ko‘rishimiz va har bir g‘oyani tekshirib, eng mantiqiy izohlarni aniqlashimiz mumkin.

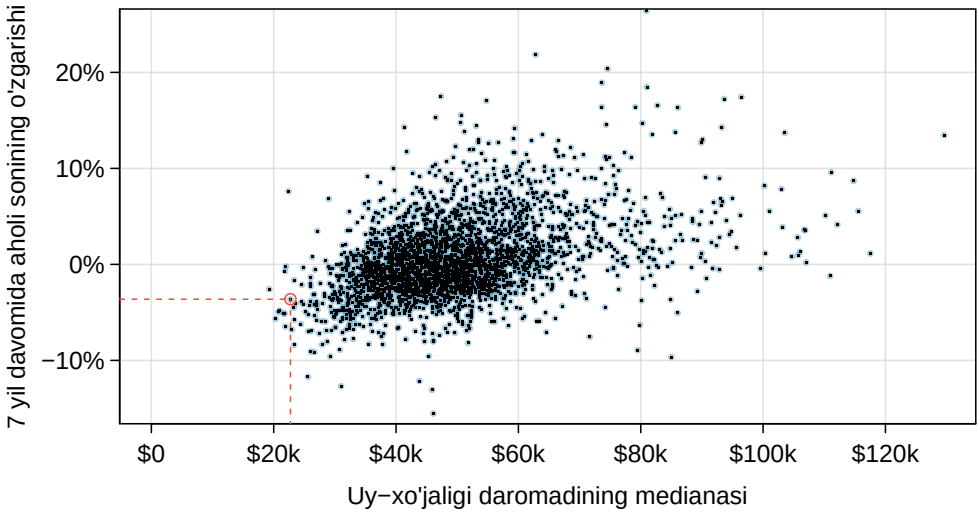


1.8-rasm. AQSh okruglari bo‘yicha o‘z uyida yashash darajasi va ko‘p xonadonli inshootlardagi turar-joy birliklari ulushi o‘rtasidagi sochma diagramma. Ajratib ko‘rsatilgan nuqta Jorjiya shtatidagi Chattahoochee okrugini bildiradi. Unda ko‘p xonadonli birliklar ulushi 39,4 % va o‘z uyida yashash darajasi 31,3 %.

Ko‘p xonadonli birliklar ulushi va o‘z uyida yashash darajasi grafikda ko‘zga tashlanarli naqsh (andoza) ko‘rsatayotgani sababli bog‘liq deyiladi. Ikki o‘zgaruvchi o‘zaro qandaydir aloqani namoyon etsa, ular **bog‘liq o‘zgaruvchilar** deb ataladi. Bog‘liq o‘zgaruvchilarni **erksiz o‘zgaruvchilar** deb ham atash mumkin va aksincha.

Y **1.7-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

`loan50` ma'lumotlar to‘plamidagi o‘zgaruvchilarni ko‘rib chiqing. Ular 15-betdagi 1.4-rasmda tavsiflangan. `loan50` dagi o‘zgaruvchilar orasidagi mumkin bo‘lgan munosabatlar haqida sizni



1.9-rasm. Aholi soni o‘zgarishi (`pop_change`)ning uy xo‘jaligi daromadining medianasi (`median_hh_income`) ga nisbatan sochma diagrammasi. Kentukki shtati, Ousli okrugi ajratib ko‘rsatilgan. Unda 2010–2017 yillarda aholi 3,63 % ga kamaygan va uy xo‘jaligi daromadining medianasi 22736 AQSh dollari bo‘lgan.

qiziqtiradigan ikkita savol tuzing.[8]

M

1.8-MISOL

Ushbu misol 2010-yildan 2017-yilgacha okrug aholisi sonining o‘zgarishi va uy xo‘jaligi daromadining medianasi o‘rtasidagi munosabatni o‘rganadi. Bu munosabat 1.9-rasmdagi sochma diagramma yordamida vizual ko‘rsatilgan. Ushbu o‘zgaruvchilar bog‘liqmi?

Okrugda uy-xo‘jaligi daromadining medianasi qanchalik yuqori bo‘lsa, aholi o‘sishi shunchalik yuqori bo‘lishi kuzatiladi. Bu tendensiya har bir okrug uchun qat'iy amal qilmasligi mumkin, biroq grafikda umumiy yo‘nalish yaqqol ko‘rinadi. O‘zgaruvchilar o‘rtasida ma'lum aloqa kuzatilgani sababli, ular bog‘liqdir.

1.8-rasmda pastga yo‘nalgan tendensiya mavjud. Ko‘p xonadonli inshootlardagi birliklar ulushi ko‘proq bo‘lgan okruglarda o‘z uyida yashash darajasi pastroq bo‘ladi. Shu sabab bu o‘zgaruvchilar **manfiy bog‘liq** deyiladi. **Ijobiy bog‘liqlik** esa 1.9-rasmdagi uy xo‘jaligi daromadining medianasi va aholi soni o‘zgarishi o‘rtasidagi munosabatda ko‘rinadi. Uy-xo‘jaligi daromadining medianasi yuqoriroq bo‘lgan okruglarda aholi o‘sishi sur'ati odatda yuqoriroq bo‘ladi.

Agar ikki o‘zgaruvchi bog‘liq bo‘lmasa, ular **bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar** deyiladi. Ya'ni, ikki o‘zgaruvchi orasida aniq munosabat kuzatilmasa, ular bog‘liqsiz hisoblanadi.

BOG‘LIQ YOKI BOG‘LIQSIZ, IKKALASI BIRGA EMAS

O‘zgaruvchilar jufti yoki qandaydir tarzda bog‘liq yoki bog‘liqsiz bo‘ladi. Hech bir juftlik bir vaqtning o‘zida ham bog‘liq, ham bog‘liqsiz bo‘la olmaydi.

1.2.4 Izohlovchi va javob o‘zgaruvchilari

Ikki o‘zgaruvchi orasidagi munosabat haqida savol berganimizda, ba'zan bir o‘zgaruvchidagi o‘zgarish boshqasida ham o‘zgarish keltirib chiqaradimi-yo‘qmi, ya'ni sababiy ta'sir bormi-yo‘qligini ham aniqlamoqchi bo‘lamiz. `county` ma'lumotlar to‘plami haqidagi avvalgi savolni quyidagicha qayta ifodalash mumkin:

Agar bir okrugda uy-xo‘jaligi daromadining medianasi oshsa, bu o‘sha okrugda aholi

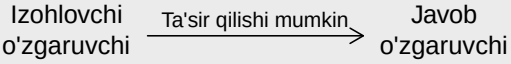
[8] Ikkita namunaviy savol: 1) Kredit miqdori bilan jami daromad o‘rtasidagi munosabat qanday? 2) Agar kimningdir daromadi o‘rtachadan yuqori bo‘lsa, uning foiz stavkasi o‘rtachadan yuqorimi yoki pastmi?

sonining o'sishiga turtki bo'ladimi?

Bu savolda biz bir o'zgaruvchi boshqasiga ta'sir qiladimi-yo'qmi, shuni so'rayapmiz. Agar bizning asosiy farazimiz shunday bo'lsa, unda *uy-xo'jaligi daromadi medianasi* — **izohlovchi o'zgaruvchi**, *aholi sonining o'zgarishi* esa — **javob o'zgaruvchi** bo'ladi.[9]

IZOHLOVCHI VA JAVOB O'ZGARUVCHILARI

Agar bir o'zgaruvchi boshqasiga sababiy ta'sir ko'rsatishi mumkin deb gumon qilsak, birinchisini **izohlovchi o'zgaruvchi**, ikkinchisini esa **javob o'zgaruvchi** deb belgilaymiz.



Ko'plab o'zgaruvchilar juftliklari uchun hech qanday faraz qilingan munosabat yo'q, shuning uchun bunday hollarda bu nomlar (izohlovchi va javob) qo'llanilmaydi.

Shuni yodda tutingki, o'zgaruvchilarni shunday nomlash ularning orasida sababiy bog'liqlik mavjudligini kafolatlamaydi. Bir o'zgaruvchi boshqasida o'zgarish keltirib chiqaradimi-yo'qmi, degan masalani rasmiy tekshirish uchun tajriba talab etiladi.

1.2.5 Kuzatuv tadqiqotlari va eksperimentlarga kirish

Ma'lumot to'plashning ikki asosiy turi mavjud. Bular kuzatuv tadqiqotlari va eksperimentlar.

Tadqiqotchilar **kuzatuv tadqiqoti**ni ma'lumotlarning paydo bo'lish jarayoniga bevosita aralashmagan holda ma'lumot yig'ishni amalga oshiradilar. Masalan, ular so'rovnomalar orqali ma'lumot to'plashlari, tibbiy yoki kompaniya yozuvlarini ko'rib chiqishlari, yoki ko'plab o'xshash shaxslardan iborat **kohorta**ni kuzatishlari va shu asosda ayrim kasalliklar nima sababdan rivojlanishi mumkinligi haqida gipotezalar shakllantirishlari mumkin. Bu holatlarning barchasida tadqiqotchilar paydo bo'layotgan ma'lumotlarni shunchaki *kuzatadilar*. Umuman olganda, kuzatuv tadqiqotlari o'zgaruvchilar orasida tabiiy ravishda yuz beradigan bog'liqlik borligi haqida dalil keltirishi mumkin, biroq o'z-o'zicha sababiy aloqani ko'rsata olmaydi.

Tadqiqotchilar sababiy aloqa ehtimolini o'rganmoqchi bo'lsalar, **eksperiment** o'tkazadilar. Odatda bunda izohlovchi va javob o'zgaruvchilari mavjud bo'ladi. Masalan, dori berish yurak xuruji bo'lgan bemorlarning keyingi yil davomidagi o'lim darajasini kamaytiradi, deb taxmin qilishimiz mumkin. Izohlovchi o'zgaruvchi bilan javob o'zgaruvchisi orasida haqiqatan ham sababiy aloqa bormi-yo'qligini tekshirish uchun tadqiqotchilar bir guruh shaxslarni tanlab olib, ularni guruhlarga ajratadilar. Har bir guruhdagi shaxslarga biror davolash usuli *biriktiriladi*. Agar shaxslar guruhlarga tasodifiy ravishda biriktirilsa, eksperiment **tasodifiylashtirilgan eksperiment** deb ataladi. Masalan, dori sinovidagi har bir yurak xuruji bemori tanga tashlash kabi usul orqali ikki guruhdan biriga tasodifiy biriktirilishi mumkin. Birinchi guruh **plasebo** (soxta davolash) oladi, ikkinchi guruh esa dori oladi. Yana bir eksperiment misoli uchun 1.1-bo'limdagi tadqiqotni ko'ring, garchi o'sha o'rganishda *plasebo* qo'llanilmagan bo'lsa-da.

BOG'LIQLIK $\neq$ SABABIYAT

Umuman olganda, bog'liqlik sababiyatni anglatmaydi va sababiyat faqat tasodifiylashtirilgan eksperimentdan xulosa qilinishi mumkin.

Mashqlar

1.3 Havo ifloslanishi va tug'ilish natijalari tadqiqotning tarkibiy qismlari. Tadqiqotchilar Janubiy Kaliforniyada havo ifloslanishi bilan muddatidan oldin tug'ruqlar o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganish uchun ma'lu-

[9] Ba'zan izohlovchi o'zgaruvchi **bog'liqsiz o'zgaruvchi**, javob o'zgaruvchi esa **bog'liq o'zgaruvchi** deb ataladi. Biroq bu chalkashlik keltirishi mumkin, chunki o'zgaruvchilar bog'liqsiz yoki bog'liq bo'lishi mumkin. Shu sabab bu atamalardan foydalanmaslikka harakat qilamiz (yoki erkli, erksiz atamalari ishlatiladi).

motlar to‘plashdi. Tadqiqot davomida havo ifloslanishi darajalari havo sifatini kuzatish stansiyalari yordamida o‘lchandi. Xususan, karbon monoksid millionga nisbatan qismlar (ppm), azot dioksid va ozon yuz millionga nisbatan qismlar (pphm) hamda yirik zarrachalar miqdori (PM_{10}) $\mu g/m^3$ da qayd etildi. 1989 yildan 1993 yilgacha bo‘lgan davrda 143196 ta tug‘ilish bo‘yicha homiladorlik davomiyligi haqidagi ma'lumotlar yig‘ildi va har bir tug‘ilish uchun homiladorlik davrida havo ifloslanishiga ta'sir miqdori hisoblandi. Tahlillar shuni ko‘rsatdiki, PM_{10} va kichikroq darajada CO konsentratsiyalarining oshishi muddatidan oldin tug‘ruqlar bilan bog‘liq bo‘lishi mumkin.[10]

(a) Tadqiqotning asosiy savolini aniqlang.

(b) Ushbu tadqiqotdagi subyektlar kimlar va ularning soni nechta?

(c) Tadqiqotdagi o‘zgaruvchilarni aniqlang. Har bir o‘zgaruvchini miqdoriy yoki toifali ekanini belgilang. Agar o‘zgaruvchi miqdoriy bo‘lsa — u diskret yoki uzluksiz ekanini, agar toifali bo‘lsa — u tartibli (ordinal) yoki tartibsiz (nominal) ekanini ko‘rsating.

1.4 Buteyko metodi tadqiqotning tarkibiy qismlari. Buteyko metodi – bu 1952 yilda rus shifokori Konstantin Buteyko tomonidan ishlab chiqilgan sayoz nafas olish texnikasi. Anekdotik dalillar Buteyko metodining astma simptomlarini kamaytirishi va hayot sifatini yaxshilashi mumkinligini ko‘rsatadi. Ushbu metodning samaradorligini aniqlash uchun o‘tkazilgan ilmiy tadqiqotda, tadqiqotchilar 600 nafar astma bilan og‘rigan, davolash uchun dori vositalariga tayanadigan 18-69 yoshdagi bemorlarni jalb qilishdi. Ushbu bemorlar tasodifiy ravishda ikkita tadqiqot guruhiga bo‘lindi. Biri Buteyko metodini mashq qilgan, ikkinchisi esa ushbu metodni qo‘llamagan. Barcha bemorlar hayot sifati, faollik, astma alomatlari va dori iste'molini kamaytirishi bo‘yicha 0 dan 10 gacha bo‘lgan shkalada baholandi. Natijalar shuni ko‘rsatdiki, Buteyko usulini qo‘llagan ishtirokchilar o‘rtacha hisobda astma alomatlarining sezilarli kamayishini va hayot sifati yaxshilanishini boshdan kechirdilar.[11]

(a) Tadqiqotning asosiy savolini aniqlang.

(b) Ushbu tadqiqotdagi subyektlar kimlar va ular qancha?

(c) Tadqiqotdagi o‘zgaruvchilarni aniqlang. Har bir o‘zgaruvchini miqdoriy yoki toifali deb aniqlang. Agar miqdoriy bo‘lsa, o‘zgaruvchi diskret yoki uzluksiz ekanligini ko‘rsating. Agar toifali bo‘lsa, o‘zgaruvchi ordinal yoki nominal ekanligini ko‘rsating.

1.5 Aldovchilar tadqiqotning tarkibiy qismlari. Tadqiqotchilar halollik, yosh va o‘zini nazorat qilish o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganish maqsadida 5 dan 15 yoshgacha bo‘lgan 160 nafar bola ishtirokida eksperiment o‘tkazdilar. Ishtirokchilar o‘z yoshlari, jinsi va yagona farzand ekanliklari yoki yo‘qligi haqida ma'lumot berdilar. Har bir bolaga tanga berilib, ular shaxsiy ravishda tanga tashlab, natijani (oq yoki qora) qog‘ozga yozishlari so‘raldi. Tadqiqotchilar ularga faqat oq chiqdi deb bildirgan bolalar mukofotlanishini aytishdi. Tadqiqot natijalari quyidagicha umumlashtirilgan: ishtirokchilarning yarmi “aldamang” deb aniq ko‘rsatma olgan, qolgan yarmi esa hech qanday ko‘rsatma olmagan. Ko‘rsatmasiz guruhda — bolalarning shaxsiy xususiyatlariga (yosh, jins va hokazo) qarab aldash ehtimoli bir xil (ya'ni, teng taqsimlangan) bo‘lgan. “Aldamang” deb ogohlantirilgan guruhda esa, qizlar o‘g‘illarga qaraganda kamroq aldashga moyil bo‘lgan; o‘g‘illar uchun yoshga qarab aldash darajasi o‘zgarmagan; qizlar uchun esa yosh ortgani sayin aldash ehtimoli kamaygan.[12]

(a) Tadqiqotning asosiy savolini aniqlang.

(b) Ushbu tadqiqotdagi subyektlar kimlar va ular qancha?

(c) Ushbu tadqiqotda mazkur natijalarga erishish uchun har bir subyekt bo‘yicha necha o‘zgaruvchi qayd etilgan? Ushbu o‘zgaruvchilar va ularning turlarini aniqlang.

1.6 O‘g‘rilar tadqiqotning tarkibiy qismlari. Ijtimoiy-iqtisodiy sinf va noaxloqiy xatti-harakatlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganish maqsadida, Kaliforniya universitetining (Berkeley) 129 nafar bakalavr talabasi ishtirokida tadqiqot o‘tkazildi. Ishtirokchilardan o‘zlarini ijtimoiy sinf nuqtai nazaridan baholash so‘raldi. Ya'ni, ular o‘zlarini eng ko‘p (yoki eng kam) pulga, eng yuqori (yoki eng past) ma'lumot darajasiga, va eng hurmatli (yoki eng kam hurmatli) kasbga ega odamlarga nisbatan taqqoslashdi. Shu asosda ular o‘zlarini yuqori yoki past ijtimoiy sinfga mansub deb belgiladilar. Keyin ularga har biri alohida o‘ralgan shirinliklar (konfetlar) solingan idish ko‘rsatildi. Tadqiqotchilar bu shirinliklar yaqin atrofdagi laboratoriyadagi bolalar uchun mo‘ljallanganini, biroq agar istasalar, bir nechtasini olishlari mumkinligini aytishdi. Keyinchalik, ishtirokchilar bilan bog‘liq bo‘lmagan ba'zi vazifalarni bajargandan so‘ng, har bir ishtirokchi o‘zi olgan konfetlar sonini ma'lum qildi.[13]

[10] B. Ritz et al. “Effect of air pollution on preterm birth among children born in Southern California between 1989 and 1993”. In: *Epidemiology* 11.5 (2000), pp. 502–511.

[11] J. McGowan. “Health Education: Does the Buteyko Institute Method make a difference?” In: *Thorax* 58 (2003).

[12] Alessandro Bucciol and Marco Piovesan. “Luck or cheating? A field experiment on honesty with children”. In: *Journal of Economic Psychology* 32.1 (2011), pp. 73–78.

[13] P.K. Piff et al. “Higher social class predicts increased unethical behavior”. In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* (2012).

(a) Tadqiqotning asosiy savolini aniqlang.

(b) Ushbu tadqiqotda subyektlar kimlar va qancha ishtirokchi qatnashgan?

(c) Tadqiqotda o'zini yuqori ijtimoiy sinfga mansub deb bilgan talabalar boshqalarga qaraganda ko'proq konfet olgani aniqlangan. Ushbu xulosaga kelish uchun har bir ishtirokchi bo'yicha nechta o'zgaruvchi qayd etilgan? O'zgaruvchilarni va ularning turlarini ko'rsating.

1.7 Migren va akupunktura, 2-qism. 1.1-mashqda akupunkturaning migrenlarga ta'siri bor-yo'qligini o'rganishga bag'ishlangan tadqiqot keltirilgan edi. Tadqiqotchilar tasodifiy nazoratli tadqiqot o'tkazib, bemorlarni tasodifiy ravishda ikkita guruhga bo'lishdi: davolash guruhi va nazorat guruhi. Davolash guruhidagi bemorlarga migrenni davolashga mo'ljallangan akupunktura qo'llanildi. Nazorat guruhidagi bemorlarga esa soxta akupunktura (ya'ni ignalar akupunktura nuqtalariga emas, boshqa joylarga kiritilgan) qo'llandi. Bemorlar akupunkturadan 24 soat o'tib, og'riqdan butunlay xalos bo'lgan yoki bo'lmaganliklari haqida so'raldi. Ushbu tadqiqotda izohlovchi va javob o'zgaruvchilar qaysi?

1.8 Sinusit va antibiotiklar, 2-qism. 1.2-mashqda o'tkazilgan tadqiqotda o'tkir sinusitni antibiotik bilan davolashning samarasi o'rganilgan. Tadqiqot ishtirokchilari 10 kunlik antibiotik kursi (davolash guruhi) yoki tashqi ko'rinishi va ta'mi bo'yicha bir xil soxta dori (nazorat guruhi) qabul qilishgan. 10 kunlik davolash davri yakunida bemorlardan alomatlarida yaxshilanish kuzatildimi-yo'qmi deb so'ralgan. Ushbu tadqiqotda izohlovchi va javob o'zgaruvchilar qaysi?

1.9 Fisherning iris gullari. Ser Ronald Aylmer Fisher — ingliz statistigi, evolyutsion biolog va genetik bo'lib, u iris gullarining uch turi *(setosa, versicolor va virginica)* bo'yicha ma'lumotlar to'plami ustida ishlagan. Ushbu ma'lumotlar to'plamida har bir turning 50 tadan guli bo'lib, har bir gul uchun gultojining uzunligi va eni hamda bargchalarining uzunligi va eni qayd etilgan.[14]

(a) Ma'lumotlar to'plamida nechta kuzatuv birligi mavjud?

(b) Ma'lumotlarda nechta miqdoriy o'zgaruvchi mavjud? Ularni sanab chiqing va ular uzluksizmi yoki diskret ekanini ko'rsating.

(c) Ma'lumotlarda nechta toifali o'zgaruvchi mavjud va ular qanday? Ularning darajalarini ko'rsating.



Rasm: Ryan Claussen (http://flic.kr/p/6QTcuX) CC BY-SA 2.0 license

1.10 Buyuk Britaniya aholisi orasidagi chekish odatlari. Buyuk Britaniya aholisi orasida chekish odatlarini o'rganish maqsadida so'rov o'tkazilgan. Quyida ushbu so'rov orqali to'plangan ma'lumotlarning bir qismi ma'lumotlar matritsasi ko'rinishida keltirilgan. Bu yerda "£" — ingliz funt sterlingi, "sig" — sigaret (chekiladigan dona sigaret) va "N/A" — ma'lumot yo'qligini (yetishmayotgan qiymatni) bildiradi.[15]

	Jinsi	Yoshi	Turmushi	Yalpi daromad	Chekish	Dam olish kuni	Hafta davomida
1	Ayol	42	Yolg'iz	£2,600 dan past	Ha	12 sig/kun	12 sig/kun
2	Erkak	44	Yolg'iz	£10,400 dan £15,600 gacha	Yo'q	N/A	N/A
3	Erkak	53	Uylangan	£36,400 dan yuqori	Ha	6 sig/kun	6 sig/kun
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1691	Erkak	40	Yolg'iz	£2,600 dan £5,200 gacha	Ha	8 sig/kun	8 sig/kun

(a) Ma'lumotlar matritsasining har bir qatori nimani ifodalaydi?

(b) So'rovda nechta ishtirokchi qatnashgan?

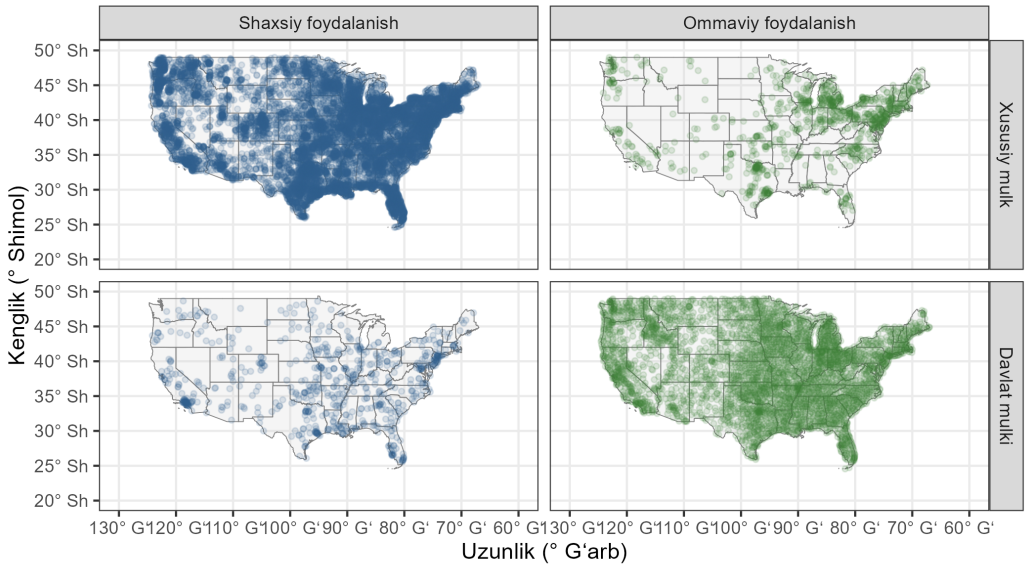
(c) Tadqiqotdagi har bir o'zgaruvchini miqdoriy yoki toifali ekanligini aniqlang. Agar miqdoriy bo'lsa, uzluksiz yoki diskret ekanligini aniqlang. Agar toifali bo'lsa, u tartiblimi?

1.11 AQSh aeroportlari. Quyidagi vizualizatsiya Qo'shma Shtatlarning asosiy hududlari (ya'ni, bir-biriga tutashgan shtatlar) va Vashington, Kolumbiya okrugi (Washington, D.C.) dagi aeroportlarning geografik taqsimotini ko'rsatadi. Ushbu vizualizatsiya har bir kuzatuv birligi aeroport bo'lgan ma'lumotlar to'plamiga asoslanib yaratilgan.[16]

[14] R.A Fisher. "The Use of Multiple Measurements in Taxonomic Problems". In: *Annals of Eugenics* 7 (1936), pp. 179–188.

[15] National STEM Centre, Large Datasets from stats4schools.

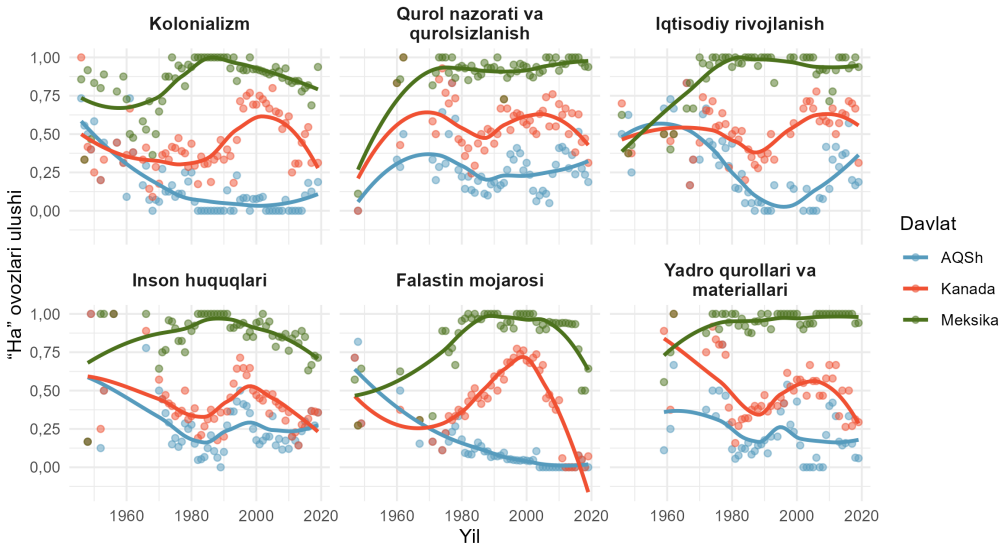
[16] Federal Aviation Administration, www.faa.gov/airports/airport_safety/airportdata_5010.



(a) Ushbu vizualizatsiyani yaratishda foydalanilgan o'zgaruvchilarni sanab bering.

(b) Har bir o'zgaruvchini miqdoriy yoki toifali ekanligini belgilang. Agar miqdoriy bo'lsa, uzluksiz yoki diskret ekanligini, agar toifali bo'lsa, u tartibli ekanligini aniqlang.

1.12 BMT ovozlari. Quyidagi vizualizatsiya Qo'shma Shtatlar, Kanada va Meksikaning Birlashgan Millatlar Tashkiloti (BMT) Bosh Assambleyasida turli mavzular bo'yicha ovoz berish tendensiyalarini ko'rsatadi. Xususan, 1946 yildan 2015 yilgacha bo'lgan davrda ma'lum bir mavzu bo'yicha mamlakatlarning "Ha" deb ovoz bergan foizlari tasvirlangan. Ushbu vizualizatsiya har bir kuzatuv mamlakat/yil juftligiga to'g'ri keladigan ma'lumotlar to'plamiga asoslanib yaratilgan.[17]



(a) Ushbu vizualizatsiyani yaratishda ishlatilgan o'zgaruvchilarni sanab o'ting.

(b) Tadqiqotdagi har bir o'zgaruvchini miqdoriy yoki toifali ekanligini ko'rsating. Agar miqdoriy bo'lsa, uzluksiz yoki diskretligini aniqlang. Agar toifali bo'lsa, uning tartibli ekanligini aniqlang.

1.3 Tanlanma olish tamoyillari va strategiyalari

[17] David Robinson. *unvotes: United Nations General Assembly Voting Data*. R package version 0.2.0. 2017. URL: https://CRAN.R-project.org/package=unvotes.

Tadqiqot o'tkazishning birinchi bosqichi — o'rganiladigan mavzu yoki savollarni aniqlashdir. Aniq ifodalangan tadqiqot savoli qaysi subyektlar yoki kuzatuv birliklari o'rganilishi va qaysi o'zgaruvchilar muhimligini belgilashga yordam beradi. Shuningdek, ma'lumotlar qanday to'planishini ko'rib chiqish ham muhim. Shunda ular ishonchli bo'ladi va tadqiqot maqsadlariga erishishga xizmat qiladi.

1.3.1 Bosh to'plamlar va tanlanmalar

Quyidagi uchta tadqiqot savolini ko'rib chiqing:

1. Atlantika okeanidagi qilichbaliqlarda o'rtacha simob miqdori qancha?
2. So'nggi 5 yil ichida Duke universiteti bakalavr talabalari uchun darajani yakunlashning o'rtacha muddati qancha?
3. Yangi dori og'ir yurak kasalligi bo'lgan bemorlarda o'limlar sonini kamaytiradimi?

Har bir tadqiqot savoli maqsadli **bosh to'plam**ga taalluqlidir. Birinchi savolda maqsadli bosh to'plam – Atlantika okeanidagi barcha qilichbaliqlar va har bir baliq bitta kuzatuv birligini ifodalaydi. Ko'pincha bosh to'plamdagi har bir birlik uchun ma'lumot yig'ish juda qimmatga tushadi. Buning o'rniga, **tanlanma** olinadi. Tanlanma – bu kuzatuv birliklarining qism-to'plami bo'lib, odatda bosh to'plamning kichik bir qismi hisoblanadi. Masalan, bosh to'plamdan 60 ta qilichbaliq tanlab olinishi mumkin va ushbu tanlanma ma'lumotlari bosh to'plam o'rtacha qiymatini baholash hamda tadqiqot savoliga javob berish uchun ishlatiladi.

Y

1.9-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Yuqoridagi ikkinchi va uchinchi savollar uchun maqsadli bosh to'plamni va alohida kuzatuv birligini nima ifodalashini aniqlang.[18]

1.3.2 Anekdotik dalillar

Quyidagi ehtimoliy javoblarni yuqoridagi uch tadqiqot savoliga nisbatan ko'rib chiqing:

1. Yangiliklarda bir kishi qilichbaliq yeb simobdan zaharlangan ekan, demak qilichbaliqlarda simobning o'rtacha kontsentratsiyasi xavfli darajada yuqori.
2. Men Dukeda 7 yildan ko'proq o'qib bitirgan ikkita talabani uchratdim, demak Dukeda ko'plab boshqa kollejlar bilan taqqoslaganda bitirish vaqti uzoqroq.
3. Do'stimning otasi unga yangi yurak kasalligi dorisini berganlaridan keyin yurak xuruji bo'lib vafot etdi, demak dori foyda bermaydi.

Har bir xulosa ma'lumotlarga tayangan. Biroq bu yerda ikkita muammo bor. Birinchidan, ma'lumotlar atigi bir-ikkita holatni ifodalaydi. Ikkinchidan va eng muhimi, bu holatlar bosh to'plamni haqiqatan ham ifodalaydimi-yo'qmi – bu noaniq. Bunday tartibsiz tarzda to'plangan ma'lumotlar **anekdotik dalillar** deb ataladi.

ANEKDOTIK DALILLAR

Tartibsiz tarzda yig'ilgan ma'lumotlardan ehtiyot bo'ling. Bunday dalillar haqiqat va tasdiqlangan bo'lishi mumkin, ammo ular faqat favqulodda holatlarni ifodalashi mumkin.

Anekdotik dalillar odatda o'zining g'ayrioddiy xususiyatlari bilan e'tiborni tortuvchi noodatiy holatlardan iborat bo'ladi. Masalan, biz 7 yil davomida o'qishni tugatgan ikkita kishini, to'rt yil ichida o'qishni tugatgan boshqa olti kishiga qaraganda ko'proq eslashimiz mumkin. Noodatiy holatlarga e'tibor qaratish o'rniga, bosh to'plamni ifodalovchi ko'plab holatlardan iborat tanlanma o'rganilishi kerak.

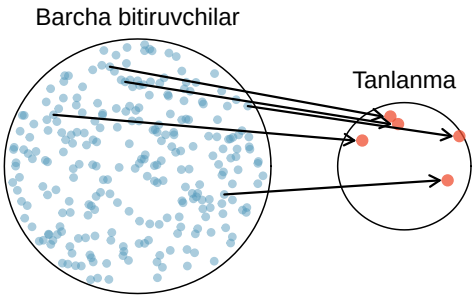
[18] 2) Savol faqat darajasini yakunlagan talabalarga tegishli. O'rtacha qiymatni o'qishni hech qachon tugatmagan talaba asosida hisoblab bo'lmaydi. Demak, ko'rib chiqilayotgan bosh to'plamda faqat so'nggi besh yil ichida bitirgan Duke bakalavr talabalari kuzatuv birliklarini ifodalaydi. Har bir shunday talaba — alohida kuzatuv birligi. 3)-har bir og'ir yurak kasalligiga chalingan shaxs — bitta kuzatuv birligi. Bosh to'plamga og'ir yurak kasalligi bo'lgan barcha shaxslar kiradi.



1.10-rasm. 2010-yil fevralida ayrim media sharhlovchilari bitta yirik qor bo‘ronini global isishga qarshi haqiqiy dalil sifatida keltirishdi. Komik Jon Styuart ta’kidlaganidek, ”Bu – bitta bo‘ron, bitta mintaqada, bitta mamlakat ichida”.

1.3.3 Bosh to‘plamdan tanlanma olish

So‘nggi 5 yil ichida Duke universiteti bakalavr talabalari uchun bitirish muddatini baholash maqsadida talabalardan *tanlanma* yig‘ishimiz mumkin. So‘nggi 5 yilda bitirganlarning barchasi *bosh to‘plam*ni tashkil etadi, ko‘rib chiqish uchun tanlab olingan bitiruvchilar esa birgalikda *tanlanma* deb ataladi. Umuman olganda, biz har doim tanlanmani bosh to‘plamdan *tasodifiy* tanlashga intilamiz. Eng sodda tasodifiy tanlash usuli lotereya o‘tkazishga o‘xshaydi. Masalan, bitiruvchilarni tanlashda har bir bitiruvchining ismini lotereya chiptasiga yozib, 100 ta chiptani tortib olishimiz mumkin. Tanlangan ismlar 100 nafar bitiruvchidan iborat tasodifiy tanlanmani ifodalaydi. Tanlanmani tasodifiy tanlash – og‘ishlarni kiritib yuborish ehtimolini kamaytiradi.



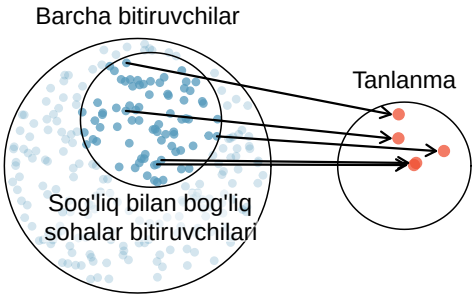
1.11-rasm. Ushbu grafikda bosh to‘plamdan tasodifiy tarzda besh nafar bitiruvchi tanlanmaga kiritilgan.

1.10-MISOL

Tasavvur qiling, biz to‘g‘ri ovqatlanish (nutrition) yo‘nalishida o‘qiydigan bir talabadan tadqiqot uchun bir nechta bitiruvchini tanlab berishni so‘radik. U qaysi turdagi talabalarni tanlashi mumkin? Uning tanlanmasi barcha bitiruvchilarni vakili (reprezentativ) bo‘la oladimi?

Ehtimol, u sog‘liq bilan bog‘liq sohalar bo‘yicha bitiruvchilarni nomutanosib ko‘p olib qo‘yishi mumkin. Yoki uning tanlovi bosh to‘plamni yaxshi ifodalar. Tanlanmalarni qo‘lda tanlaganda, hatto niyatda og‘ish bo‘lmasa ham, **og‘ishgan** tanlanma olish xavfi mavjud.

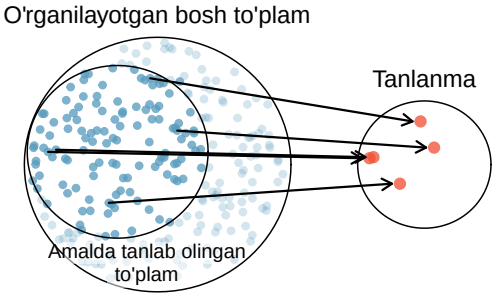
Agar kimdurga tanlanmaga qaysi bitiruvchilarni kiritishni o‘zi aniq belgilashga ruxsat berilsa, tanlanma o‘sha kishining qiziqishlariga tomon *egilishi* mumkin, bu butunlay beixtiyor bo‘lsa ham. Bu holat tanlanmaga **og‘ish** (inglizcha: bias) kiritadi. Tasodifiy tanlash bu muammoni bartaraf etishga yordam beradi. Eng sodda tasodifiy tanlanma **oddiy tasodifiy tanlanma** deb ataladi. Bu usul kuzatuv birliklarini lotereya orqali tanlashga ekvivalent. Bunda bosh to‘plamdagi har bir birlik tanlanmaga tushish uchun teng imkoniyatga ega bo‘ladi va tanlanmadagi birliklar orasida hech



1.12-rasm. Tanlanma tuzish so‘ralganda, to‘g‘ri ovqatlanish yo‘nalishidagi talaba bilmagan holda sog‘liq bilan bog‘liq yo‘nalishlardan nomutanosib ko‘p bitiruvchini tanlab qo‘yishi mumkin.

qanday yashirin bog‘liqlik nazarda tutilmaydi.

Oddiy tasodifiy tanlanma olish og‘ishni minimallashtiradi. Biroq og‘ish boshqa yo‘llar bilan ham paydo bo‘lishi mumkin. Masalan, so‘rovlar uchun odamlardan tasodifiy tanlab olingan taqdirda ham, agar **javob bermaslik ulushi** yuqori bo‘lsa, ehtiyot bo‘lish kerak. Agar so‘rov uchun tasodifiy tanlanganlarning faqat 30% i javob bergan bo‘lsa, natijalar butun bosh to‘plam uchun **reprezentativ** (vakil) ekanligi noaniq qoladi. Bu **javob bermaslik og‘ishi** natijalarni egib yuborishi mumkin.



1.13-rasm. Javob bermaslik ehtimoli sababli, so‘rovlar ko‘pincha bosh to‘plamning faqat ma’lum bir qismigagina yetib boradi. Bu muammoni butunlay tuzatish qiyin, ba’zan esa imkonsiz.

Yana bir keng tarqalgan kamchilik — **qulay tanlanma**, ya’ni oson yetib boriladigan shaxslar tanlanmaga ko‘proq tushib qoladigan holat. Masalan, siyosiy so‘rov faqat Bronks ko‘chalarida yurgan odamlardan olinadigan bo‘lsa, u butun Nyu-York shahrini ifodalamaydi. Qulaylik tanlanmaning qaysi qism-to‘plamni ifodalayotganini aniqlash ko‘pincha mushkul.

Y **1.11-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Veb-saytlar orqali mahsulotlar, sotuvchilar va kompaniyalar reytinglarini oson topamiz. Bu reytinglar faqat baho berishga alohida vaqt ajratgan odamlarga asoslanadi. Agar internetdagi sharhlarning 50% i salbiy bo‘lsa, bu xaridorlarning 50% i mahsulotdan norozi deganimi?[19]

1.3.4 Kuzatuv tadqiqotlari

Hech qanday davolash (ta’sir) ochiqchasiga qo‘llanilmagan yoki ataylab qo‘llanilmay qolgan ma’lumotlar **kuzatuv ma’lumotlari** deb ataladi. Masalan, 1.2-bo‘limda tasvirlangan kreditlar (loan) va okruglar (county) haqidagi ma’lumotlar — kuzatuv ma’lumotlariga misol bo‘la oladi. Eksperimentlar asosida sababiy xulosalar chiqarish ko‘pincha mantiqan asosli bo‘ladi. Biroq, xuddi

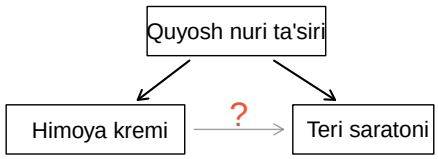
[19] Javoblar turlicha bo‘lishi mumkin. O‘zimizning shaxsiy kuzatuvlarimizga ko‘ra, odamlar odatda kutilganidan yomonroq chiqqan mahsulotlar haqida ko‘proq shikoyat qiladilar, kutilganidek ishlagan mahsulotlar haqida esa kamroq maqtov bildiradilar. Shu sababli, biz Amazon kabi saytlardagi mahsulot reytinglarida salbiy og‘ish (inglizcha: bias) mavjud bo‘lishi mumkin, deb taxmin qilamiz. Biroq, bizning kuzatuvlarimiz bosh to‘plamni to‘liq ifodalamay qolgan bo‘lishi ehtimoldan xoli emas, shu sabab turli ehtimollarga ochiq munosabatda bo‘lamiz.

shunday sababiy xulosalarni kuzatuv ma'lumotlariga tayangan holda chiqarish xavfli va tavsiya etilmaydi. Shuning uchun, kuzatuv tadqiqotlari odatda faqat o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlikni ko'rsatish yoki keyinchalik eksperimentlar yordamida tekshiriladigan gipotezalarni shakllantirish uchun yetarli bo'ladi.

Y **1.12-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Faraz qilaylik, bir kuzatuv tadqiqotida quyosh nuridan himoyalovchi krem ishlatish va teri saratoni o'rtasidagi bog'liqlik o'rganilgan bo'lib, natijada shunday xulosa chiqqan: kim ko'proq krem ishlatsa, unda teri saratoni uchrashi ehtimoli ham yuqoriroq. Bu quyosh nuridan himoya kremi teri saratoniga sabab bo'lishini anglatadimi?[20]

Avvalgi tadqiqotlar shuni ko'rsatadiki, quyoshdan himoyalovchi kremdan foydalanish aslida teri saratoni xavfini kamaytiradi. Shunday ekan, krem ishlatish va teri saratoni o'rtasidagi bu faraziy bog'liqlikni boshqa bir o'zgaruvchi bilan tushuntirish mumkin. Bu yerda yo'q bo'lgan muhim ma'lumot — bu quyosh nuri ta'siri darajasidir. Agar kimdir kun bo'yi quyosh ostida bo'lsa, u kremni tez-tez ishlatishga moyil bo'ladi va shu bilan birga teri saratoni rivojlanish ehtimoli ham yuqoriroq bo'ladi. Demak, quyosh nuri ta'siri bu oddiy tahlilda hisobga olinmagan o'zgaruvchidir.



Quyosh nuri ta'siri shunday o'zgaruvchidirki, u **chalkashtiruvchi o'zgaruvchi**[21] deb ataladi. Chalkashtiruvchi o'zgaruvchi — bu izohlovchi o'zgaruvchi hamda javob o'zgaruvchisi bilan bir vaqtning o'zida bog'liq bo'lgan o'zgaruvchidir. Kuzatuv tadqiqotlaridan sababiy xulosa chiqarishning bitta usuli — barcha mumkin bo'lgan chalkashtiruvchi o'zgaruvchilarni aniqlashga urinishdir. Biroq, barcha chalkashtiruvchi o'zgaruvchilarni to'liq aniqlash yoki o'lchashning kafolati yo'q.

Y **1.13-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

1.8-rasmda okruglardagi uy-joyga egaligi bilan ko'p xonadonli binolarda yashovchilar ulushi o'rtasida manfiy bog'liqlik ko'rsatilgan edi. Biroq, bu ikki o'zgaruvchi orasida sababiy bog'liqlik mavjud deb xulosa qilish mantiqan to'g'ri emas. Ushbu manfiy bog'liqlikni tushuntirishi mumkin bo'lgan boshqa bir o'zgaruvchini taklif qiling.[22]

Kuzatuv tadqiqotlari ikki shaklda bo'ladi: prospektiv va retrospektiv tadqiqotlar. **Prospektiv tadqiqot** — bu hodisalar kechayotgan paytda shaxslar aniqlanib, ulardan ma'lumotlar to'planadigan tadqiqotdir. Masalan, tibbiyot tadqiqotchilari saraton xavfiga xulq-atvorning mumkin bo'lgan ta'sirini baholash maqsadida bir guruh bemorlarni ko'p yillar davomida kuzatib borishlari mumkin. Bunday tadqiqotga misol sifatida "Hamshiralar salomatligi tadqiqoti" (The Nurses' Health Study) ni keltirish mumkin. Ushbu tadqiqot 1976-yilda boshlangan va 1989-yilda kengaytirilgan. Bu prospektiv tadqiqot ro'yxatdan o'tgan hamshiralarni jalb qilib, ulardan so'rovnomalar orqali ma'lumot to'playdi. **Retrospektiv tadqiqot**lar esa hodisalar sodir bo'lib bo'lgandan keyin ma'lumot to'playdi, masalan, tadqiqotchilar tibbiy yozuvlarda o'tgan holatlarni tahlil qilishlari mumkin. Ba'zi ma'lumotlar to'plamlarida esa prospektiv va retrospektiv yo'l bilan to'plangan o'zgaruvchilar birgalikda mavjud bo'lishi mumkin.

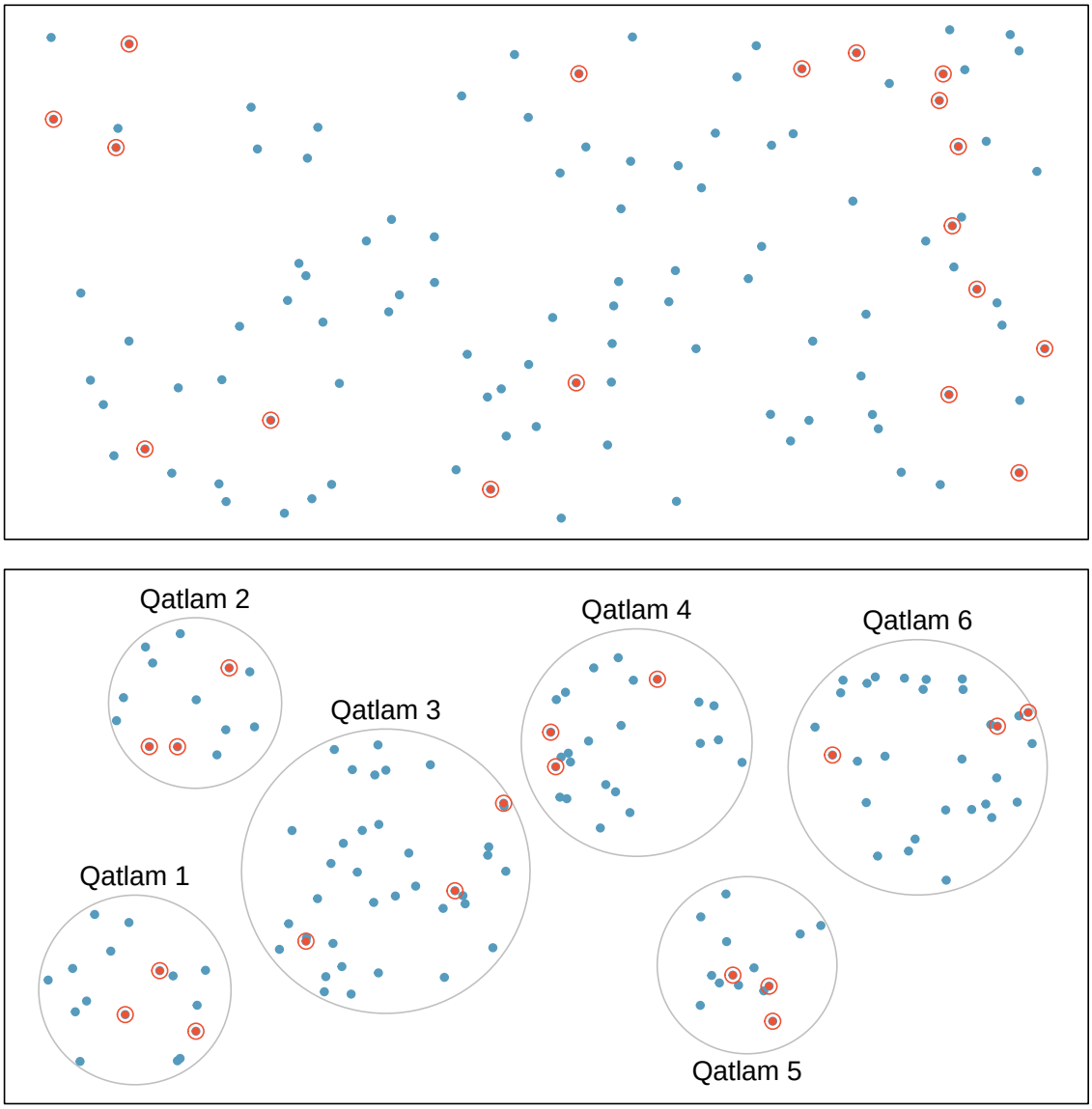
1.3.5 To'rt xil tanlanma olish usuli

Deyarli barcha statistik usullar tasodifiylik g'oyasiga asoslanadi. Agar kuzatuv ma'lumotlari bosh to'plamdan tasodifiy tanlash asosida to'plangan bo'lmasa, bunday ma'lumotlar asosida olingan statistik baholar va ularga tegishli xatoliklar ishonchli bo'lmaydi. Ushbu bo'limda to'rtta tasodifiy tanlanma olish usuli ko'rib chiqiladi. Bular oddiy, qatlamli, klasterli va ko'p bosqichli tanlash. 1.14- va 1.15-rasmlar ushbu usullarning grafik tasvirlarini ko'rsatadi.

[20] Yo'q. Tushunish uchun ushbu masaladan keyingi matnga qarang.

[21] Shuningdek, bu o'zgaruvchi **yashirin o'zgaruvchi**, **chalkashtiruvchi omil** yoki **chalkashtiruvchi** deb ham yuritiladi.

[22] Javoblar turlicha bo'lishi mumkin. Masalan, aholi zichligi muhim omil bo'lishi mumkin. Agar bir okrug aholisi juda zich joylashgan bo'lsa, bu ko'plab aholining ko'p xonadonli uylarda yashashini talab qilishi mumkin. Bundan



1.14-rasm. Oddiy tasodifiy tanlash va qatlamli tanlashga misollar. Yuqoridagi holatda – oddiy tasodifiy tanlash usuli yordamida 18 ta kuzatuv birligi tasodifiy ravishda tanlab olingan. Quyidagi holatda esa – qatlamli tanlash qo'llangan. Kuzatuv birliklari avval qatlamlarga ajratilgan, so'ngra har bir qatlam ichida oddiy tasodifiy tanlash amalga oshirilgan.

Oddiy tasodifiy tanlash – bu tasodifiy tanlashning eng intuitiv, ya'ni eng oson tushuniladigan shaklidir. Masalan, Katta ligadagi beysbol (ingliz tilida "Major League Baseball", qisqacha MLB) o'yinchilarining maoshlarini olaylik, bu yerda har bir o'yinchi liganing 30 ta jamoasidan biriga tegishli. 120 nafar beysbol o'yinchisi va ularning maoshlarini o'z ichiga olgan oddiy tasodifiy tanlanma olish uchun, biz o'sha mavsumdagi barcha o'yinchilarning ismlarini alohida qog'ozlarga yozib, ularni bir chelakka solamiz, yaxshilab aralashtiramiz va so'ngra 120 ta ism chiqmaguncha qog'ozlarni tasodifiy tarzda tortamiz. Umuman olganda, agar bosh to'plamdagi har bir kuzatuv birligi yakuniy tanlovga teng ehtimol bilan tushsa va biror kuzatuvning tanlanganini bilish boshqa kuzatuvlarning tanlanganiga oid foydali ma'lumot bermasa, u holda bunday tanlov oddiy tasodifiy tanlov deb ataladi.

Qatlamli tanlash esa "bo'lib oling va yeng" tamoyiliga asoslangan tanlash strategiyasidir. Bunda bosh to'plam **qatlamlar** deb ataluvchi guruhlarga bo'linadi. Qatlamlar shunday tanlanadiki, o'xshash kuzatuv birliklari bir guruhda jamlanadi. So'ngra har bir qatlam ichida, odatda, oddiy tasodifiy tanlash usuli qo'llaniladi. Beysbol maoshlariga oid misolda, jamoalarni qatlam sifatida qarash mumkin, chunki ba'zi jamoalarda boshqalarnikidan to'rt baravar ko'p mablag' mavjud. Shunda har bir jamoadan tasodifiy tarzda 4 nafar o'yinchini tanlab, jami 120 nafar o'yinchini olish mumkin.

Qatlamli tanlash ayniqsa shunda foydali bo'ladi – agar har bir qatlam ichidagi kuzatuv birliklari natija o'zgaruvchisi nuqtai nazaridan bir-biriga juda o'xshash bo'lsa. Biroq, bu usulning kamchiligi shundaki, qatlamli tanlov orqali olingan ma'lumotlarni tahlil qilish oddiy tasodifiy tanlovdagi tahlilga qaraganda murakkabroq bo'ladi. Shu sababli, ushbu kitobda keltirilgan tahlil usullarini qatlamli tanlov ma'lumotlariga tatbiq etish uchun kengaytirish talab qilinadi.

Ⓜ **1.14-MISOL**

Nima uchun har bir qatlam ichidagi kuzatuv birliklari bir-biriga juda o'xshash bo'lishi foydali?

Agar qatlam ichidagi kuzatuv birliklari bir-biriga juda o'xshash bo'lsa, u holda biz shu qatlam (ya'ni kichik bosh to'plam) uchun barqarorroq baho olishimiz mumkin bo'ladi. Bu esa har bir guruh ichida aniqroq statistik baholar bo'lishiga olib keladi. So'ngra biz ushbu aniq baholarni yagona umumiy bahoga birlashtirganimizda, bosh to'plam uchun yakuniy baho ham yanada aniqlik bilan ifodalanadi, chunki har bir guruhning o'z bahosi allaqachon aniq hisoblangan bo'ladi.

Klasterli tanlash usulida bosh to'plam ko'plab guruhlarga – **klaster**larga bo'linadi. So'ngra ma'lum miqdordagi klasterlar tasodifiy tanlab olinadi va ularning har biridagi barcha kuzatuv birliklari tanlanmaga kiritiladi. **Ko'p bosqichli tanlash** esa klaster tanlashga o'xshash, biroq bunda har bir tanlangan klaster ichidagi barcha kuzatuvlarni emas, balki har bir klaster ichidan yana tasodifiy kichik tanlov olish amalga oshiriladi.

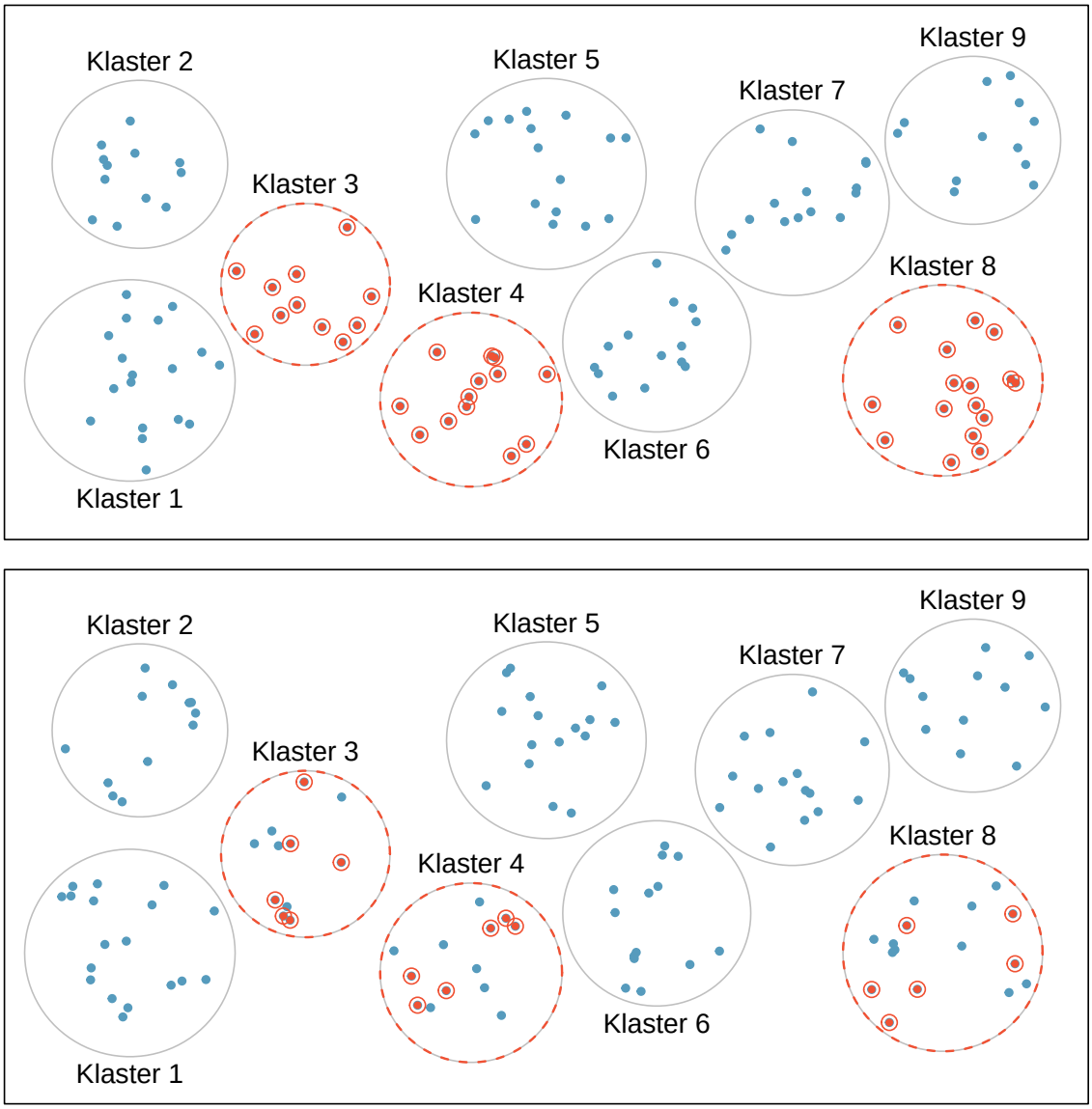
Ba'zan klasterli yoki ko'p bosqichli tanlash usullari boshqa tanlash usullariga nisbatan iqtisodiy jihatdan tejamkorroq bo'lishi mumkin. Shuningdek, qatlamli tanlashdan farqli ravishda, bu yondashuvlar klaster ichidagi kuzatuv birliklari o'rtasida katta farqlar mavjud bo'lganda, ammo klasterlarning o'zaro farqi uncha katta bo'lmaganda eng samarali natija beradi. Masalan, agar mahallalar klaster sifatida qaralsa, unda klasterli yoki ko'p bosqichli tanlash usullari mahallalar ichida turli xil aholi guruhlari mavjud bo'lganda eng yaxshi ishlaydi. Biroq, bu usullarning kamchiligi shundaki, ma'lumotlarni tahlil qilish uchun odatdagidan murakkabroq statistik usullar talab qilinadi. Shunga qaramay, ushbu kitobda keltirilgan tahlil usullari bunday ma'lumotlarni ham qayta ishlashga moslashtirilishi mumkin.

Ⓜ **1.15-MISOL**

Faraz qilaylik, biz Indoneziyaning tropik o'rmonlaridagi qishloq hududida bezgak bilan kasallanish darajasini baholashni xohlaymiz. Bizga ma'lumki, bu hududda 30 ta qishloq mavjud bo'lib, ularning har biri taxminan bir-biriga o'xshash. Bizning maqsadimiz – 150 nafar kishini bezgakka tekshirishdir. Qaysi tanlash usulidan foydalanish kerak?

Oddiy tasodifiy tanlov natijasida ehtimol barcha 30 ta qishloqdan odamlar tanlanadi, bu esa ma'lumot to'plashni juda qimmat va mashaqqatli qiladi. Qatlamli tanlash esa murakkab bo'ladi, chunki o'xshash shaxslar qatlamlarini qanday tuzishni aniqlash qiyin. Biroq, klasterli yoki ko'p bosqichli tanlash bu holatda juda yaxshi g'oya bo'lishi mumkin. Agar biz ko'p bosqichli tanlash

tashqari, yuqori aholi zichligi ko'chmas mulk narxining oshishiga olib keladi, bu esa ko'plab aholi uchun uy sotib olishni imkonsiz holga keltiradi.



1.15-rasm. Klasterli tanlash va ko'p bosqichli tanlashga misollar. Yuqoridagi holatda – klasterli tanlash qo'llanilgan. Ma'lumotlar to'plami to'qqizta klasterga ajratilgan, ulardan uchtasi tanlab olingan va ushbu uchta klaster ichidagi barcha kuzatuv birliklari tanlanmaga kiritilgan. Quyidagi holatda esa – ko'p bosqichli tanlash qo'llanilgan bo'lib, u klaster tanlashdan faqat bitta jihat bilan farq qiladi. Ya'ni har bir tanlangan klaster ichida barcha kuzatuvlarni o'lchash o'rniga, klasterning tasodifiy kichik qismi tanlovga kiritiladi.

usulini qo‘llasak, avvalo 30 ta qishloqdan yarmini tasodifiy tanlaymiz, so‘ngra har bir tanlangan qishloqdan 10 kishini tasodifiy tanlaymiz. Bu yondashuv ma’lumot yig‘ish xarajatlarini sezilarli darajada kamaytiradi va klasterli tanlash asosida olingan tanlov bizga ishonchli natijalar beradi. Faqat shuni yodda tutish kerakki, bu holatda ma’lumotlarni tahlil qilish uchun ushbu kitobda ko‘rib chiqilgan oddiy usullardan biroz murakkabroq tahlil usullarini qo‘llash talab qilinadi.

Mashqlar

1.13 Havoning ifloslanishi va tug‘ilish natijalari, xulosa doirasi. 1.3-mashqda Janubiy Kaliforniyada havoning ifloslanishi va muddatidan oldin tug‘ilishlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganish uchun ma’lumot yig‘ilgan tadqiqotni tanishtiradi. Tadqiqot davomida havo ifloslanishi darajalari havo sifatini kuzatish stansiyalari tomonidan o‘lchandi. 1989 yildan 1993 yilgacha bo‘lgan 143196 ta tug‘ilish bo‘yicha homiladorlikning davomiyligi haqidagi ma’lumotlar yig‘ildi va har bir tug‘ilish bo‘yicha havo ifloslanishining homiladorlik davriga ta’siri baholandi.

(a) Ushbu tadqiqotda o‘rganilayotgan bosh to‘plam va tanlanmani aniqlang.

(b) Tadqiqot natijalari bosh to‘plamga umumlashtirilishi va natijalar sababiy bog‘liqlikni o‘rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi yoki yo‘qligini izohlang.

1.14 Aldovchilar, xulosa doirasi. 1.5-mashqda halollik, yosh va o‘z-o‘zini boshqarish o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganadigan tadqiqotni tanishtiradi. Tadqiqotchilar 5 yoshdan 15 yoshgacha bo‘lgan 160 nafar bolalarda eksperiment o‘tkazishdi. Bolalardan har biri o‘z xonasida adolatli tanga tashlab, natijani yozib olishni so‘rashdi (oq yoki qora). Oq rangni bildirganlarga mukofot berilishi aytildi. Bolalarning yarmi aldashni taqiqlash haqida aniq ko‘rsatma oldi, qolgan yarmi esa hech qanday aniq ko‘rsatma olmadi.

(a) Ushbu tadqiqotda o‘rganilayotgan bosh to‘plam va tanlanmani aniqlang.

(b) Tadqiqot natijalari bosh to‘plamga umumlashtirilishi va natijalar sababiy bog‘liqlikni o‘rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi yoki yo‘qligini izohlang.

1.15 Buteyko usuli, xulosa doirasi. 1.4-mashqda Buteyko chuqur nafas olish usulini astma alomatlarini kamaytirish va hayot sifatini yaxshilashda foydalanish tadqiqotini tanishtiradi. Ushbu tadqiqot doirasida astmani davolash uchun dori-darmonga tayanadigan 18-69 yoshdagi 600 nafar astma bemorlari yollandi va tasodifiy ravishda ikki guruhga bo‘lindi. Biri Buteyko usulini qo‘lladi, ikkinchisi esa qo‘llamadi. Buteyko guruhidagi ishtirokchilar, o‘rtacha, astma alomatlarida sezilarli kamayish va hayot sifatining yaxshilanishini boshdan kechirishdi.

(a) Ushbu tadqiqotda o‘rganilayotgan bosh to‘plam va tanlanmani aniqlang.

(b) Tadqiqot natijalari bosh to‘plamga umumlashtirilishi va natijalar sababiy bog‘liqlikni o‘rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi yoki yo‘qligini izohlang.

1.16 O‘g‘rilar, xulosa doirasi. 1.6-mashqda ijtimoiy-iqtisodiy sinf va axloqsizlik xulq-atvori o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganadigan tadqiqotni tanishtiradi. Ushbu tadqiqot doirasida Kaliforniya Universitetining 129 nafar talabasi o‘zlarini yuqori yoki past ijtimoiy sinfga mansub ekanligini aniqlash uchun o‘zlarining moliyaviy holati, ta’lim darajasi va lavozimiga taqqoslashdi. Ularga bolalar laboratoriyasi uchun mo‘ljallangan qandlar berildi va ular xohlasa, qandlarni olishlari mumkinligi aytildi. Tadqiqot natijalari yuqori sinfga mansub bo‘lganlarning boshqalarga qaraganda ko‘proq qand olganligini ko‘rsatdi.

(a) Ushbu tadqiqotda o‘rganilayotgan bosh to‘plam va tanlanmani aniqlang.

(b) Tadqiqot natijalari bosh to‘plamga umumlashtirilishi va natijalar sababiy bog‘liqlikni o‘rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi yoki yo‘qligini izohlang.

1.17 Ishdan keyingi dam olish. Umumiy Ijtimoiy So‘rov (General Social Survey) “O‘rtacha ish kunidan keyin qancha vaqt dam olish yoki o‘zingizni qiziqtirgan faoliyat bilan shug‘ullanishga vaqt topasiz?” degan savolni 1155 nafar tasodifiy amerikaliklar tanlanmasi orasida so‘raldi. O‘rtacha dam olish vaqti 1,65 soat ekanligi aniqlandi. Quyidagilardan qaysi biri kuzatuv, o‘zgaruvchi, tanlanma statistikasi yoki bosh to‘plam parametri ekanligini aniqlang.

(a) Tanlanmadagi bir amerikalik;

(b) O‘rtacha ish kunidan keyin dam olish soatlari;

(c) 1,65;

(d) Barcha amerikaliklarning o‘rtacha ish kunidan keyin dam olish vaqti.

1.18 YouTubedagi mushuklar. Faraz qiling, YouTubedagi videolarning qanchasi mushuklar haqida ekanligini baholamoqchisiz. YouTubedagi barcha videolarni tomosha qilish imkonsiz bo'lganligi sababli, siz tasodifiy video tanlovchidan foydalanib, 1000 ta video tanlaysiz. Ushbu videolarning 2% i mushuklar haqida ekanligini aniqlaysiz. Quyidagilarning qaysi biri kuzatuv, o'zgaruvchi, tanlama statistikasi (kuzatilgan tanlama asosida hisoblangan qiymat) yoki bosh to'plam parametri ekanligini aniqlang.

(a) YouTubedagi barcha videolarning mushuklar haqida ekanligi foizi;

(b) 2%;

(c) Tanlangan bir video;

(d) Video mushuklar haqida ekanligi yoki yo'qligi.

1.19 Kursdan qoniqish bo'limlar bo'yicha. Katta hajmli kollej darsida 160 nafar talaba qatnashadi. Barcha 160 talaba ma'ruzada birga qatnashadi. Lekin ular 4 ta guruhga (har bir guruhda 40 nafar talaba) bo'linadi. Laboratoriya bo'limlari turli o'qituvchi yordamchilari tomonidan olib boriladi. Professor talabalarni kursdan qanchalik qoniqish darajasi haqida so'rovnoma o'tkazmoqchi. Talabalar bo'limlari ularning umumiy qoniqishiga ta'sir qilishi mumkin deb hisoblaydi.

(a) Bu qanday tadqiqot turi?

(b) Ushbu tadqiqotni o'tkazish uchun tanlanma olish strategiyasini taklif qiling.

1.20 Yotoqxona bo'yicha turar-joy takliflari . Katta kollej kampusida birinchi kurs talabalari va ikkinchi kurs talabalari kampusning sharqiy qismidagi yotoqxonalarda yashaydi. Uchinchi kurs va to'rtinchi kurs talabalari esa kampusning g'arbiy qismidagi yotoqxonalarda yashaydi. Kollej ma'muriyati tomonidan taklif etilayotgan yangi yotoqxona tuzilishi haqida talabalar fikrini yig'ishni xohlaydi. Ular barcha kurslardagi talabalar fikrlarini teng darajada ifoda etishni xohlaydilar.

(a) Bu qanday tadqiqot turi?

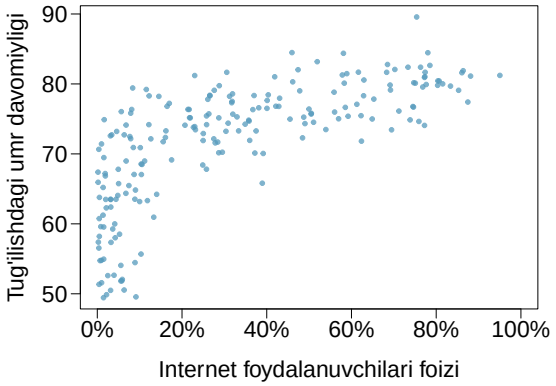
(b) Ushbu tadqiqotni o'tkazish uchun tanlanma olish strategiyasini taklif qiling.

1.21 Internetdan foydalanish va umr ko'rish davomiyligi. Quyidagi sochma diagrammasi 208 mamlakat bo'yicha taxminiy umr ko'rish davomiyligi (2014 yil holatiga) va internet foydalanuvchilari ulushi (2009 yil holatiga) o'rtasidagi munosabatni baholash uchun olib borilgan tadqiqotning bir qismi sifatida yaratilgan.[23]

(a) Umr ko'rish davomiyligi va internet foydalanuvchilari ulushi o'rtasidagi munosabatni tasvirlab bering.

(b) Bu qanday tadqiqot turi?

(c) Ushbu munosabatni tushuntirishi mumkin bo'lgan aralashuvchi o'zgaruvchini va uning potentsial ta'sirini ayting.



1.22 Stress va mushak tirishishi, I qism. Tasodifiy tanlangan sog'lom o'rta maktab o'quvchilari bilan o'tkazilgan tadqiqotda ularning stress holatida mushak tirishishini ko'proq boshdan kechirishlari aniqlangan. Tadqiqot shuningdek, stress holatida talabalarning ko'proq qahva ichishini va kamroq uxlashini qayd etgan.

(a) Bu qanday tadqiqot turi?

(b) Ushbu tadqiqot stressning oshishi va mushak tirishishi o'rtasidagi sabab-oqibat munosabatini aniqlash uchun ishlatilishi mumkinmi?

(c) Stressning oshishi va mushak tirishishi o'rtasidagi kuzatilgan munosabatni tushuntirishi mumkin bo'lgan aralashuvchi o'zgaruvchilarni ayting.

1.23 Tanlanma olish usullarini baholash. Universitet talabalarning yangi talabalar uyushmasini yaxshilash uchun taklif qilingan $25 yillik to'lovni qo'llab-quvvatlash ulushini aniqlamoqchi. Quyida taklif qilingan usullarni ko'rib chiqib, ularning asosli yoki asossiz ekanligini belgilang:

(a) 500 talabadan iborat oddiy tasodifiy tanlanmani so'rovnoma qiling.

(b) Talabalarni ularning o'qish yo'nalishlari bo'yicha qatlamlang, so'ngra har bir qatlamdan 10% talabani tanlang.

[23] CIA Factbook, Country Comparisons, 2014.

(c) Talabalarni yoshi bo‘yicha klasterlang (masalan, 18 yoshdagilar bitta klasterda, 19 yoshdagilar bitta klasterda va h.k.), so‘ngra uchta klasterni tasodifiy tanlab, ushbu klasterlardagi barcha talabalardan so‘rovnoma qiling.

1.24 Tasodifiy raqamlar bilan qo‘ng‘iroq qilish. Gallup Poll Amerikadagi barcha hududiy kodlar ro‘yxatiga va har bir hududiy koddagi yashash xonadonlari soniga asoslangan holda telefon raqamlarini yaratadigan tasodifiy raqamlar bilan qo‘ng‘iroq qilish usulidan foydalanadi. Gallup Poll telefon raqamlarini telefon kitobidan tanlash o‘rniga, nega tasodifiy raqamlar bilan qo‘ng‘iroq qilish usulini tanlayotganiga mumkin bo‘lgan sababni ko‘rsating.

1.25 Nafrat qiluvchilar doim nafratlanadi, tadqiqot tasdiqlaydi. *Journal of Personality and Social Psychology* jurnalida e’lon qilingan tadqiqotda tasodifiy tanlangan 200 nafar erkak va ayoldan iborat guruh turli mavzular, masalan, kamping, sog‘liqni saqlash, arxitektura, taksidekmiya, krossvordlar va Yaponiya haqidagi fikrlarini o‘rganish uchun so‘ralgan. So‘ngra ishtirokchilarga yangi mahsulot – mikroto‘lqinli pech haqida ma’lumot taqdim etilgan. Ushbu mikroto‘lqinli pech aslida mavjud emas, lekin ishtirokchilar bundan xabardor emas edilar va ularga uchta ijobiy va uchta salbiy soxta sharhlar berildi. Dispozitsion munosabatni o‘lchashda ijobiy javob berganlar mikroto‘lqinli pechga ham ijobiy munosabat bildirishga moyil bo‘lgan, salbiy munosabat bildirganlar esa salbiy munosabat ko‘rsatgan. Tadqiqotchilar quyidagicha xulosaga kelishdi: “ba’zi odamlar narsalarni yoqtirishga moyil, boshqalari esa yoqtirmaslikka moyil va ushbu tendensiyani chuqurroq tushunish munosabatlar psixologiyasini yaxshiroq tushunishga olib keladi.”[24]

(a) Ishtirokchilar kimlar?

(b) Ushbu tadqiqotdagi javob o‘zgaruvchisi (lari) nima?

(c) Ushbu tadqiqotdagi izohlovchi o‘zgaruvchi(lar) nima?

(d) Ushbu tadqiqot tasodifiy tanlanma olishni qo‘llayaptimi?

(e) Bu kuzatuv tadqiqotimi yoki eksperiment? Sababini tushuntiring.

(f) Izohlovchi va javob o‘zgaruvchilari o‘rtasida sabab-oqibat aloqasini aniqlash mumkinmi?

(g) Ushbu tadqiqot natijalarini keng aholi qatlamiga umumlashtirish mumkinmi?

1.26 Oila hajmi. Faraz qilaylik, biz “uy xo‘jaligi”ni bir joyda birga yashaydigan va yashash joylarini baham ko‘radigan odamlar deb aniqlab, ularning hajmini baholamoqchimiz. Agar biz tasodifiy ravishda boshlang‘ich maktabdagi o‘quvchilarni tanlab, ulardan oila hajmlari haqida so‘rasak, bu uy xo‘jaligi hajmini yaxshi o‘lchovi bo‘ladimi? Yoki bizning o‘rtacha qiymatimiz noto‘g‘ri bo‘ladimi? Agar shunday bo‘lsa, bu haqiqiy qiymatdan yuqori yoki past baholanadimi?

1.27 Tanlanma olish strategiyalari. Ijtimoiy tarmoqlarda o‘tkazilgan vaqt va o‘quvchilarni o‘qishdagi muvaffaqiyati o‘rtasidagi munosabatga qiziqqan statistik talaba tadqiqot o‘tkazishga qaror qiladi. Ma’lumotlarni to‘plash uchun turli tadqiqot strategiyalari quyida tavsiflangan. Har birida, taklif qilingan tanlanma olish usulini aniqlang va kutilishi mumkin bo‘lgan noto‘g‘ri talqinlarni belgilang.

(a) U tadqiqot bosh to‘plamidan tasodifiy 40 ta talaba tanlab, ularga so‘rovnoma beradi va uni ertasi kuni to‘ldirib olib kelishni so‘raydi.

(b) U faqat o‘z do‘stlariga so‘rovnoma tarqatadi va har biri uni to‘ldirishiga ishonch hosil qiladi.

(c) U Facebookda onlayn so‘rovnoma havolasini joylashtiradi va do‘stlaridan uni to‘ldirishlarini so‘raydi.

(d) U tasodifiy ravishda 5 ta sinfni tanlaydi va o‘sha sinflardan tasodifiy talabalardan so‘rovnomani to‘ldirishni so‘raydi.

1.28 Gazeta maqolalarini o‘qish. Quyida *NY Times* gazetasida chop etilgan ikkita maqoladan parchalar keltirilgan:

(a) *“Xavflar: Chekuvchilarda demensiya rivojlanishi ehtimoli yuqoriroq”* nomli maqolada quyidagilar aytiladi:[25]

> “Tadqiqotchilar 1978–1985 yillarda ixtiyoriy tibbiy ko‘rik va sog‘liqni saqlash xulqi bo‘yicha so‘rovda qatnashgan, yoshi 50–60 yosh oralig‘ida bo‘lgan sog‘liqni saqlash rejasi ishtirokchilari — jami 23123 kishi — haqidagi ma’lumotlarni tahlil qildilar. 23 yil o‘tgach, guruh a’zolarining qariyb 25% ida demensiya aniqlangan, jumladan 1136 nafarida Altsgeymer kasalligi va 416 nafarida tomir (vaskulyar) demensiya qayd etilgan. Boshqa omillarni inobatga olgan holda tadqiqotchilar kuniga bir quti sigaret chekuvchilarda demensiya rivojlanish ehtimoli chekmaydiganlarga nisbatan 37% yuqori degan xulosaga keldilar va chekish kuchaygani sari xavf ham ortgan: kuniga bir-bir yarim quti chekadiganlar uchun 44%, kuniga ikki qutidan ko‘p chekuvchilar uchun esa xavf ikki baravar yuqori.”

[24] Justin Hepler and Dolores Albarracín. “Attitudes without objects - Evidence for a dispositional attitude, its measurement, and its consequences”. In: *Journal of personality and social psychology* 104.6 (2013), p. 1060.

[25] R.C. Rabin. “Risks: Smokers Found More Prone to Dementia”. In: *New York Times* ().

Ushbu tadqiqotga asoslanib, chekish keyinchalik demensiyaga olib keladi, ya'ni demensiyaga sabab bo'ladi, degan xulosaga kelishimiz mumkinmi? O'zingizning fikr-mulohazalaringizni tushuntirib bering.

(b) *Maktab bezorisi uyquchan* nomli boshqa maqolada quyidagilar keltirilgan:[26]

> "Michigan universiteti tadqiqotida har bir bolaning uyqu odatlari haqida ota-onalardan so'rov ma'lumotlari yig'ildi va ota-onalar ham, o'qituvchilar ham bolalarning xulq-atvoridagi muammolarni baholashlari so'raldi. O'rganilgan o'quvchilarning qariyb uchdan bir qismi ota-onalar yoki o'qituvchilar tomonidan tartibni buzuvchi xulq yoki bezorilik (bullying) muammolariga ega deb aniqlangan. Tadqiqotchilar xulq-atvor muammolari bor, shuningdek bezori sifatida aniqlangan bolalarda uyqu buzilishlari alomatlari ikki baravar ko'proq uchrashini aniqladilar."

Ushbu maqolani o'qigan do'stingiz shunday deydi: "Tadqiqot shuni ko'rsatadiki, uyqu buzilishlari maktab o'quvchilarida bezorilikka olib keladi." Bu bayonot asoslimi? Agar yo'q bo'lsa, ushbu tadqiqotdan chiqarish mumkin bo'lgan xulosani qanday qilib eng to'g'ri va ehtiyotkorlik bilan ifodalash mumkinligini tushuntirib bering.

1.4 Eksperimentlar

Tadqiqotchilar davolash usullarini kuzatuv birligiga o'zlari tayinlaydigan tadqiqotlar **eksperiment**lar deb ataladi. Agar bu tayinlash tasodifiylashtirishni, masalan, bemorga qaysi davolashni olishni aniqlash uchun tanga tashlashni o'z ichiga olsa, bu **tasodifiylashtirilgan eksperiment** deb ataladi. Tasodifiylashtirilgan eksperimentlar ikki o'zgaruvchi o'rtasida sabab-oqibat bog'lanishini ko'rsatishda juda muhimdir.

1.4.1 Eksperiment dizayni tamoyillari

Tasodifiylashtirilgan eksperimentlar odatda to'rtta tamoyilga asoslanadi.

Nazorat. Tadqiqotchilar davolashni kuzatuv birliklariga taqsimlaydilar va guruhlar o'rtasidagi boshqa farqlarni imkon qadar **nazorat** qilishga harakat qiladilar.[27] Masalan, bemorlar dori-darmonlarni tabletka shaklida qabul qilganda, ba'zi bemorlar tabletkani faqat bir qultum suv bilan ichsa, boshqalari esa to'liq bir stakan suv bilan ichishi mumkin. Suv iste'molining ta'sirini nazorat qilish uchun shifokor barcha bemorlardan tabletkani 12 untsiyali stakan bilan ichishni so'rashi mumkin.

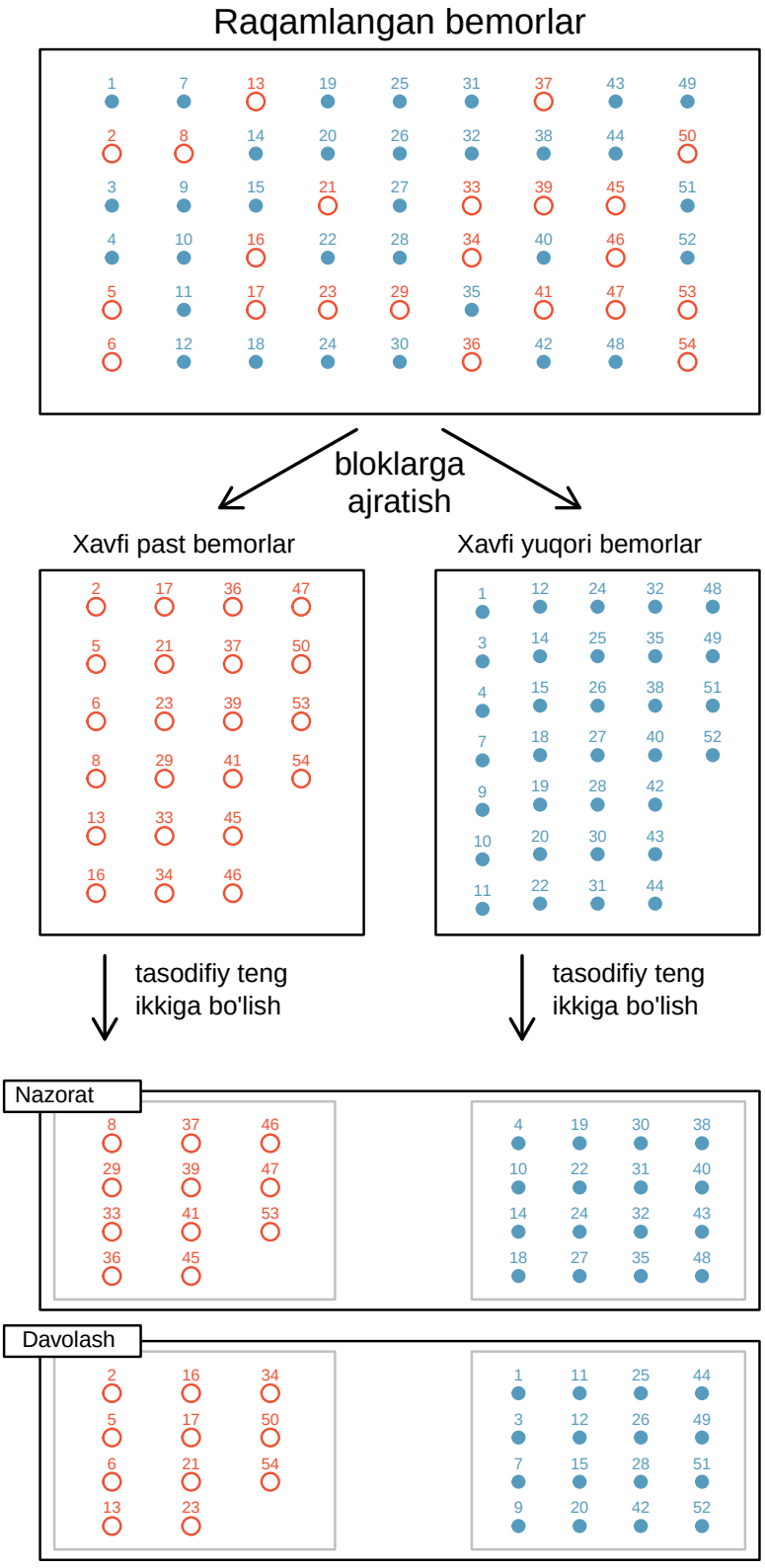
Tasodifiylashtirish. Tadqiqotchilar nazorat qilib bo'lmaydigan o'zgaruvchilarni hisobga olish uchun bemorlarni tasodifiy ravishda davolash guruhlariga taqsimlaydi. Masalan, ba'zi bemorlar o'zlarining ovqatlanish odatlari tufayli kasallikka boshqalarga qaraganda ko'proq moyil bo'lishi mumkin. Bemorlarni davolash yoki nazorat guruhlariga tasodifiy ravishda ajratish bunday farqlarni bartaraf etishga yordam beradi va tadqiqotga tasodifiy xatolar kirishining oldini oladi.

Replikatsiya. Tadqiqotchilar qancha ko'p holatlarni kuzatsa, izohlovchi o'zgaruvchining javob o'zgaruvchiga ta'sirini shunchalik aniq baholashlari mumkin. Yagona tadqiqotda biz yetarlicha katta tanlanma yig'ish orqali **replikatsiya** qilamiz. Bundan tashqari, olimlar guruhi avvalgi natijani tasdiqlash uchun butun bir tadqiqotni qayta o'tkazishi mumkin.

Bloklash. Tadqiqotchilar ba'zida davolashdan tashqari boshqa o'zgaruvchilarning javob o'zgaruvchiga ta'sir qilishini biladi yoki gumon qiladi. Bunday holatlarda ular avval shaxslarni ushbu o'zgaruvchiga asoslangan holda **bloklar**ga guruhlab, keyin har bir blok ichidagi holatlarni davolash guruhlariga tasodifiy ravishda ajratishi mumkin. Ushbu strategiya odatda **bloklash** deb ataladi. Masalan, agar biz dori yurak xurujlariga qanday ta'sir qilishini o'rganayotgan bo'lsak, tadqiqotdagi bemorlarni avval past xavf va yuqori xavf bloklariga ajratamiz, so'ngra har bir blokdagi bemorlarning yarmini nazorat guruhiga va qolgan yarmini davolash guruhiga tasodifiy ajratamiz. Bu 1.16-rasmda ko'rsatilgan. Ushbu strategiya har bir davolash guruhida past xavf va yuqori xavf toifalaridan teng sonli bemorlar mavjud bo'lishini ta'minlaydi.

[26] T. Parker-Pope. "The School Bully Is Sleepy". In: *New York Times* (June 2, 2011).

[27] Bu *nazorat guruhi* tushunchasidan farq qiladi, bu ikkinchi tamoyilda va 1.4.2-bo'limda muhokama qilinadi.



1.16-rasm. Bemor xavfi ko‘rsatadigan o‘zgaruvchini bloklash. Bemorlar avval past xavf va yuqori xavf bloklariga ajratiladi, so‘ngra har bir blok ichidagi holatlar davolash guruhlariga tasodifiy ravishda ajratiladi. Ushbu strategiya har bir davolash guruhida past xavf va yuqori xavf toifalaridan teng sonli bemorlarning vakillik qilishini ta’minlaydi.

Eksperiment dizaynining birinchi uchta tamoyilini har qanday tadqiqotga qo'shish muhimdir. Ushbu kitob bunday eksperimentlardan olingan ma'lumotlarni tahlil qilish uchun qo'llaniladigan usullarni tavsiflaydi. Bloklash esa biroz ilg'or texnikadir va ushbu kitobda kiritilgan statistik usullar bloklash yordamida to'plangan ma'lumotlarni tahlil qilish uchun kengaytirilishi mumkin.

1.4.2 Insoniy eksperimentlarda xatolikni kamaytirish

Tasodifiylashtirilgan eksperimentlar ma'lumot yig'ishning oltin standarti hisoblanadi, ammo ular barcha hollarda sabab va ta'sir munosabatiga xolis qarashni ta'minlamaydi. Insoniy tadqiqotlar xatolik kutilmagan tarzda yuzaga kelishi mumkin bo'lgan mukammal misollar hisoblanadi. Bu yerda yurak xuruji bemorlarini davolash uchun yangi doridan foydalanilgan tadqiqotni qayta ko'rib chiqamiz. Xususan, tadqiqotchilar dorining bemorlardagi o'limni kamaytirishini bilishni xohlashadi.

Tadqiqotchilar asosli xulosalarni chiqarish uchun tasodifiylashtirilgan eksperimentni rejalashtirgan. Tadqiqot ishtirokchilari[28] tasodifiy ravishda ikkita tadqiqot guruhiga joylashtirilgan. Bir guruh, **davolash guruhi**, dori qabul qilgan. Ikkinchi guruh, **nazorat guruhi**, hech qanday dori qabul qilmagan.

O'zingizni ushbu tadqiqotdagi bir ishtirokchining o'rnida tasavvur qiling. Agar siz davolash guruhida bo'lsangiz, sizga yordam beradi deb kutilayotgan yangi dorini olasiz. Boshqa tomondan, nazorat guruhidagi odam hech qanday dori olmaydi. Shuningdek, uning ishtiroki o'lim xavfini oshirmasligiga umid qiladi. Ushbu qarashlar shuni ko'rsatadiki, aslida ikki ta'sir mavjud: biri dorining samaradorligi, ikkinchisi esa miqdor jihatidan ifodalash qiyin bo'lgan hissiy ta'sir.

Tadqiqotchilar odatda hissiy ta'sirga qiziqmaydi, chunki u tadqiqotga xatolik olib kelishi mumkin. Ushbu muammoni bartaraf etish uchun tadqiqotchilar bemorlarning qaysi guruhda ekanliklarini bilmasliklarini ta'minlashni xohlashadi. Agar tadqiqotchilar bemorlarni davolash bo'yicha xabardor qilmasalar, tadqiqot **ko'r** deb ataladi. Ammo bu yerda bir muammo bor. Agar bemor davo olmasa, u nazorat guruhida ekanligini biladi. Ushbu muammoni hal qilish uchun tadqiqotchilar nazorat guruhidagi bemorlarga soxta davolash beradi. Soxta davolash **plasebo** deb ataladi va samarali plasebo tadqiqotni haqiqatan ham ko'r qilishning kaliti hisoblanadi. Plasebo uchun klassik misol - asl dori tabletkasiga o'xshab tayyorlangan shakar tabletkasidir. Ko'pincha, plasebo bemorlarda biroz, ammo haqiqiy yaxshilanishga olib keladi. Ushbu ta'sir **plasebo ta'siri** deb ataladi.

Bemorlar ko'r bo'lishi kerak bo'lgan yagona odamlar emas. Shifokorlar va tadqiqotchilar ham tasodifan tadqiqotga xatolik olib kelishi mumkin. Agar shifokor bemorga haqiqiy davo berilganini bilsa, u bemorga plasebo olgan bemorga qaraganda ko'proq e'tibor yoki yordam ko'rsatishi mumkin. Ushbu xatolikni oldini olish uchun, bu holat ba'zi holatlarda o'lchovli ta'sirga ega ekanligi aniqlangan, aksariyat zamonaviy tadqiqotlar **ikki tomonlama ko'r** tuzilmani qo'llaydi. Bunda bemorlar bilan ishlaydigan shifokorlar yoki tadqiqotchilar bemorlarning qaysi biri davo olganini bilmaydi.[29]

Y **1.16-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

1.1-bo'limdagi tadqiqotni, ya'ni tadqiqotchilar stentlarning xavf ostidagi bemorlarda insultni kamaytirishda samaradorligini sinab ko'rishganini qayta ko'rib chiqing. Bu eksperimentmi? Tadqiqot ko'r holda o'tkazilganmi? Ikki tomonlama ko'r bo'lganmi?[30]

Y **1.17-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

1.1-bo'limdagi tadqiqot uchun tadqiqotchilar plasebo qo'llagan bo'lishi mumkinmi? Agar shunday bo'lsa, ushbu plasebo qanday ko'rinishda bo'lar edi?[31]

Siz 1.17-yo'naltirilgan mashqdagi soxta operatsiyalar yordamida plasebo yaratish haqidagi fikrni o'qiganingizdan so'ng, ushbu usulning etikasi haqida ko'p savollar paydo bo'lishi mumkin. Ushbu savollar, nazorat guruhidagi shaxslarga foydali bo'lishi mumkin bo'lgan davoni bermaslik umu-

[28] Insoniy subyektlar ko'pincha **bemorlar**, **ko'ngillilar** yoki **tadqiqot ishtirokchilari** deb ataladi.

[29] Tadqiqotda qatnashgan bemorlarning qaysi biri qaysi davoni qabul qilganini biladigan tadqiqotchilar doimo mavjud. Ammo ular tadqiqotning bemorlari bilan aloqa qilmaydi va plasebo yoki haqiqiy davoni qabul qilgan bemorlar haqida ko'r shifokorlarga xabar bermaydi.

[30] Tadqiqotchilar bemorlarni davolash guruhlariga taqsimlagan, shuning uchun bu tadqiqot eksperiment hisoblanadi. Ammo, bemorlar qanday davolash olganini bilganlari uchun, bu tadqiqot ko'r holda o'tkazilmagan. Tadqiqot ikki tomonlama ko'r bo'lishi mumkin emas edi, chunki u ko'r emas edi.

[31] Oxir-oqibat, biz bemorlarga ularga operatsiya qilinib, davolangan deb o'ylashlariga erisha olamizmi? Aslida, biz buni uddalay olamiz va ba'zi eksperimentlarda **soxta operatsiya** deb ataladigan usuldan foydalaniladi. Soxta operatsiyada bemorga operatsiya qilinadi, ammo bemor to'liq davoni olmaydi, garchi ularda plasebo ta'siri paydo bo'lishi mumkin.

miy tajriba sharoitida ham paydo bo‘lishi mumkin edi; asosiy farq shundaki, soxta operatsiyalar qo‘shimcha xavf tug‘diradi, davoni bermaslik esa insonning xavfini ushlab turadi.

Eksperimentlar va plasebolarning har doim ko‘p nuqtai nazarlari mavjud va qaysi biri etik jihatdan “to‘g‘ri” ekanligi kamdan-kam hollarda aniq bo‘ladi. Masalan, soxta operatsiya bemor uchun xavf tug‘diradigan holatlarda undan foydalanish yaxshimi? Ammo, agar biz soxta operatsiyalardan foydalanmasak, hech qanday haqiqiy ta’sir ko‘rsatmaydigan qimmat davoni targ‘ib qilamiz. Agar bu sodir bo‘lsa, mablag‘lar va boshqa resurslar mavjud davolash usullaridan chalg‘itiladi va resurslar boshqa bemorlar foydasi uchun ishlatilishi mumkin. Oxir-oqibat, qiyin vaziyatda tadqiqot uchun ko‘ngilli bemorlarni va kelajakda davoni qabul qilishi mumkin bo‘lgan bemorlarni mukammal himoya qilish imkonsizdir.

Mashqlar

1.29 Yoritish va imtihon natijalari. Bir tadqiqot yoritish darajasining talabalar imtihon natijalariga ta’sirini tekshirish uchun mo‘ljallangan. Tadqiqotchi yoritish darajalari erkaklar va ayollarga turlicha ta’sir qilishi mumkin deb hisoblaydi. Shuning uchun har ikki jins teng vakillikka ega bo‘lishini ta’minlashni xohlaydi. Davolashlar quyidagilarni o‘z ichiga oladi: floresan shift yoritgichi, sariq shift yoritgichi va shift yoritgichsiz (faqat stol chiroqlari).

(a) Javob o‘zgaruvchisi nima?

(b) Izohlovchi o‘zgaruvchi nima? Uning darajalari qanday?

(c) Bloklash o‘zgaruvchisi nima? Uning darajalari qanday?

1.30 Vitamin qo‘shimchalari. Oddiy shamollash davomiyligini qisqartirishda yuqori dozada C vitamini qabul qilish samaradorligini baholash uchun tadqiqotchilar universitetning xodimlari va talabalari orasidan 400 nafar sog‘lom ko‘ngillilarni yollashdi. Bemorlarning chorak qismi plasebo qabul qildi, qolganlari teng ravishda 1g C vitamini, 3g C vitamini yoki 3g C vitamini qo‘shimchalar bilan shamollash boshlanganidan keyingi ikki kun davomida qabul qilishga bo‘lingan. Barcha tabletkalar ko‘rinishi va o‘rami bo‘yicha bir xil edi. Belgilangan tabletkalarni bemorlarga tarqatgan hamshiralar qaysi bemorga qaysi davolashni olishini bilishardi, ammo bemorlarni kasal bo‘lganda baholagan tadqiqotchilar buni bilishmagan. Shamollash davomiyligi yoki og‘irligining hech bir o‘lchovi bo‘yicha to‘rt guruh orasida sezilarli farq aniqlanmadi va plasebo guruhi eng qisqa simptom davomiyligiga ega edi.[32]

(a) Bu eksperimentmi yoki kuzatuv tadqiqotmi? Nima uchun?

(b) Ushbu tadqiqotdagi izohlovchi va javob o‘zgaruvchilari qanday?

(c) Bemorlar o‘z davolaridan bexabar edimi?

(d) Ushbu tadqiqot ikki tomonlama ko‘r edimi?

(e) Ishtirokchilar o‘zlariga belgilangan tabletkalarni iste’mol qilish yoki qilmaslikni tanlashlari mumkin. Biz ularning barchasi tabletkalarni iste’mol qilishlariga umid qila olmaymiz. Bu tadqiqotga aralashuvchi o‘zgaruvchi olib keladimi? Sababini tushuntiring.

1.31 Yoritish, shovqin va imtihon natijalari. Bir tadqiqot yoritish va shovqin darajasining talabalar imtihon natijalariga ta’sirini tekshirish uchun mo‘ljallangan. Tadqiqotchi yoritish va shovqin darajalari erkaklar va ayollarga turlicha ta’sir qilishi mumkin deb hisoblaydi. Shuning uchun har ikki jins har bir davolashda teng vakillikka ega bo‘lishini xohlaydi. Yoritish bo‘yicha davolashlar quyidagilarni o‘z ichiga oladi: floresan shift yoritgichi, sariq shift yoritgichi, shift yoritgichsiz (faqat stol chiroqlari). Shovqin bo‘yicha davolashlar quyidagilarni o‘z ichiga oladi: shovqinsiz, qurilish shovqini, insonlarning gaplashuvi.

(a) Bu qanday turdagi tadqiqot?

(b) Ushbu tadqiqotda nechta omil ko‘rib chiqilgan? Ularni aniqlang va darajalarini tavsiflang.

(c) Ushbu tadqiqotda jins o‘zgaruvchisining roli nima?

1.32 Musiqa va o‘qish. Siz talabalarning musiqa bo‘lmagan holda, faqat instrumental musiqa bilan yoki so‘zli musiqa bilan o‘qiganda yaxshiroq o‘rganishlarini aniqlash uchun sinfda eksperiment o‘tkazmoqchisiz. Ushbu tadqiqot dizaynini qisqacha tuzing.

1.33 Gazli ichimlik tanlovi. Siz sinfdoshingiz oddiy “Coca-Cola” yoki “Diet Coca-Cola” ta’mini afzal ko‘rishini aniqlash uchun eksperiment o‘tkazmoqchisiz. Ushbu tadqiqot dizaynini qisqacha tuzing.

[32] C. Audera et al. “Mega-dose vitamin C in treatment of the common cold: a randomised controlled trial”. In: *Medical Journal of Australia* 175.7 (2001), pp. 359–362.

1.34 Mashq va ruhiy salomatlik. Bir tadqiqotchi mashq qilishning ruhiy salomatlikka ta'sirini o'rganishga qiziqadi va quyidagi tadqiqotni taklif qiladi. Bosh to'plamdan 18-30, 31-40 va 41-55 yoshli guruhlardan vakillik nisbatlarini ta'minlash uchun qatlamli tasodifiy tanlashdan foydalaning. Keyin har bir yosh guruhining yarmisini haftada ikki marta mashq qilish uchun tasodifiy tanlang va qolganlarini mashq qilmaslikka ko'rsatma bering. Tadqiqot boshida va oxirida ruhiy salomatlik bo'yicha tekshiruv o'tkazing va natijalarni taqqoslang.

(a) Bu qanday turdagi tadqiqot?

(b) Ushbu tadqiqotda davolash va nazorat guruhlari qanday?

(c) Ushbu tadqiqotda bloklashdan foydalanilganmi? Agar shunday bo'lsa, bloklash o'zgaruvchisi nima?

(d) Ushbu tadqiqotda ko'r qilishdan foydalanilganmi?

(e) Ushbu tadqiqot natijalari mashq va ruhiy salomatlik o'rtasida sababli bog'liqlikni o'rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi? Natijalar umumiy bosh to'plamga nisbatan umumlashtirilishi mumkinmi?

(f) Ushbu taklif etilgan tadqiqotni moliyalashtirishga ruxsat berish yoki bermaslik mas'uliyati sizga topshirilgan deb tasavvur qiling. Ushbu tadqiqot taklifi haqida qandaydir shubhalaringiz bormi?

Bob bo'yicha mashqlar

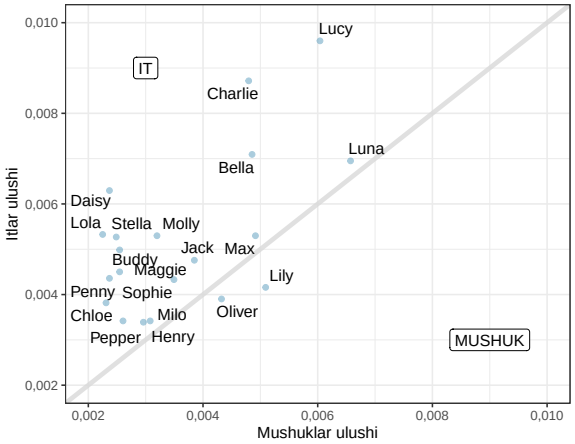
1.35 Uy hayvonlari ismlari. Vashington shtati, Sietl shahrining ochiq ma'lumotlar portali shaharda ro'yxatdan o'tgan uy hayvonlarini o'z ichiga oladi. Har bir ro'yxatdan o'tgan hayvon uchun, ismi va turi haqida ma'lumotlar mavjud. Quyidagi vizualizatsiya itlarning berilgan ismli ulushi bilan bir xil ismga ega mushuklarning ulushi o'rtasidagi munosabatni tasvirlaydi. 20 ta eng keng tarqalgan mushuk va it ismlari ko'rsatilgan. Grafikdagi diagonal chiziq $x = y$ chizig'idir. Agar ism ushbu chiziqda joylashgan bo'lsa, bu ismning itlar va mushuklar orasida bir xil mashhurlikka ega ekanligini anglatadi.

(a) Ushbu ma'lumotlar eksperimentning bir qismi sifatida yig'ilganmi yoki kuzatuv tadqiqotining bir qismi sifatidami?

(b) Eng keng tarqalgan it ismi nima? Eng keng tarqalgan mushuk ismi nima?

(c) Mushuklar uchun itlarga qaraganda keng tarqalgan ismlar qaysilar?

(d) Ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi munosabat ijobiymi yoki salbiy? Bu ma'lumotlar kontekstida nimani anglatadi?



1.36 Stress holati, 2-qism. Stress va mushaklarning qisqarishi o'rtasidagi bog'liqlikni baholash uchun tadqiqotda ishtirokchilarning yarmi tez tushib, to'satdan to'xtaydigan liftga joylashtirilgan holda yuqori stressga duchor qilindi. Qolgan yarmi esa normal yoki asosiy stress holatida qoldirildi.

(a) Bu qanday turdagi tadqiqot?

(b) Ushbu tadqiqot stressning ortishi va mushaklarning qisqarishi o'rtasida sababiy bog'liqlikni o'rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi?

1.37 Chia urug'lari va vazn yo'qotish. Chia o'simligi dastlab terakota figuralari kabi tarqalib, keyinchalik dieta qo'shimchasi sifatida mashhur bo'ldi. 2009 yilda o'tkazilgan tadqiqotda, tadqiqotchilar 38 nafar erkakni yollashdi va ularni tasodifiy ravishda ikkita guruhga: davolash va nazoratga bo'lishdi. Shuningdek, 38 nafar ayolni yollashdi va ularni ham tasodifiy ravishda davolash va nazorat guruhlariga bo'lishdi. Bitta guruhga kuniga ikki marta 25 gramm chia urug'i, boshqasiga esa plasebo berildi. Ishtirokchilar tadqiqotda ko'ngilli bo'lishdi. 12 hafta o'tgach, olimlar guruhlar o'rtasida ishtaha yoki vazn yo'qotish bo'yicha sezilarli farq yo'qligini aniqlashdi.[33]

(a) Bu qanday turdagi tadqiqot?

(b) Ushbu tadqiqotda eksperimental va nazorat davolashlari qanday?

[33] D.C. Nieman et al. "Chia seed does not promote weight loss or alter disease risk factors in overweight adults". In: *Nutrition Research* 29.6 (2009), pp. 414–418.

(c) Tadqiqotda bloklashdan foydalanilganmi? Agar shunday bo‘lsa, bloklash o‘zgaruvchisi nima?
(d) Ushbu tadqiqotda ko‘r qilish usulidan foydalanilganmi?
(e) Ushbu tadqiqot sababiy bog‘liqlikni o‘rnatish uchun ishlatilishi mumkinmi? Natijalarni umumiy bosh to‘plamga tatbiq qilish mumkinmi?

1.38 Shahar kengashi so‘rovi. Shahar kengashi o‘z shaharining shahar atrofi hududida uy xo‘jaliklari so‘rovini o‘tkazishni talab qildi. Hudud ko‘plab o‘ziga xos va noyob mahallalarga bo‘lingan, ba’zilari katta uylarni, ba’zilari faqat kvartiralarni va boshqalari turli xil uy-joy turlarini o‘z ichiga oladi. Quyida har bir qismda keltirilgan usullarni aniqlang va ushbu usullarning statistik afzallik va kamchiliklarini shahar kontekstida tavsiflang.

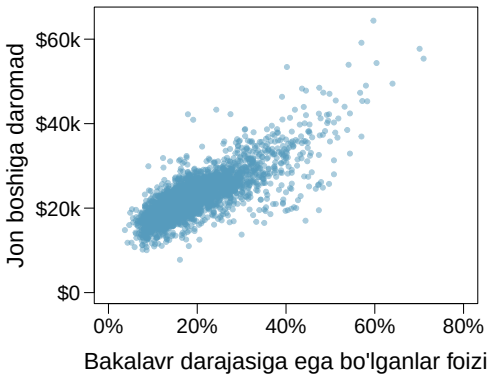
(a) Shahar bo‘ylab tasodifiy ravishda 200 ta uy xo‘jaliklarini tanlang.
(b) Shaharning 20 ta mahallasini aniqlang va har bir mahalladan 10 ta uy xo‘jaliklarini tanlang.
(c) Shaharning 20 ta mahallasini aniqlang, ulardan tasodifiy ravishda 3 tasini tanlang va ushbu 3 ta mahalladagi barcha uy xo‘jaliklarini tanlang.
(d) Shaharning 20 ta mahallasini aniqlang, ulardan tasodifiy ravishda 8 tasini tanlang va ushbu mahallalardan tasodifiy ravishda 50 ta uy xo‘jaliklarini tanlang.
(e) Shahar kengashi idoralariga eng yaqin 200 ta uy xo‘jaliklarini tanlang.

1.39 Xato mantiqiy xulosa chiqarish. Quyidagi vaziyatlarda xato mantiqiy xulosa chiqarishni aniqlang. Agar ushbu shaxslar shunday kuchli xulosalarni chiqarishni istagan bo‘lsalar, ular nimani boshqacha qilishlari kerakligini tushuntiring.

(a) Boshlang‘ich maktab o‘quvchilariga ota-onalari to‘ldirishlari uchun so‘rovnoma beriladi va uni qaytarib berish so‘raladi. So‘rovnomadagi savollardan biri quyidagicha: “Ish jadvalingiz maktabdan keyin farzandlaringiz bilan vaqt o‘tkazishni qiyinlashtiradimi?” Javob bergan ota-onalarning 85% i “yo‘q” deb javob beradi. Ushbu natijalarga asoslanib, maktab rasmiylari ota-onalarning katta qismi farzandlari bilan maktabdan keyin vaqt o‘tkazishda hech qanday qiyinchilik yo‘q deb xulosa qiladilar.
(b) Yaqinda tug‘ruq qilgan 1000 nafar ayoldan iborat oddiy tasodifiy tanlama ustida so‘rovnoma o‘tkazilib, ulardan homiladorlik paytida chekish-chekmasliklari so‘raladi. 3 yil o‘tgach, farzandlarida nafas olish muammolari mavjud yoki yo‘qligi haqidagi kuzatuv so‘rovi o‘tkaziladi. Biroq, ushbu ayollarning faqat 567 tasi avvalgi manzillarida topiladi. Tadqiqotchi ushbu 567 ayol barcha onalar uchun vakil ekanligini ta’kidlaydi.
(c) Ortoped shifokor 30 nafar bo‘g‘im muammosi bo‘lmagan bemorlariga so‘rovnoma tarqatadi va ulardan 20 nafari muntazam yugurish bilan shug‘ullanishini aniqlaydi. U yugurish bo‘g‘im muammolari xavfini kamaytiradi degan xulosaga keladi.

1.40 AQSh okruglarida daromad va ta’lim darajasi. Quyidagi sochma diagramma 2010 yilda AQShdagi 3143 ta okrugda jon boshiga daromad (ming dollar) va aholining bakalavr darajasiga ega bo‘lgan foizi o‘rtasidagi munosabatni ko‘rsatadi.

(a) Izohlovchi va javob o‘zgaruvchilari nima?
(b) Ushbu ikkita o‘zgaruvchi o‘rtasidagi munosabatni tasvirlab bering. G‘ayrioddiy kuzatuvlar haqida gapirib o‘ting, agar mavjud bo‘lsa.
(c) Bakalavr darajasiga ega bo‘lish insonning daromadini oshiradi deb ayta olamizmi?



1.41 Yaxshi ovqatlan, o‘zingni yaxshi his qil. Yosh kattalardagi meva va sabzavot iste’molining psixologik farovonlikka ta’siri bo‘yicha ommaviy salomatlik tadqiqotida ishtirokchilar tasodifiy ravishda uchta guruhga bo‘lindi. (1) odatdagidek dieta, (2) meva va sabzavot iste’molini oshirishga qaratilgan matnli xabarlar va ularni sotib olish uchun vaucher bilan ekologik intervensiya, yoki (3) qo‘shimcha ravishda har kuni meva va sabzavotning ikki porsiyasi beriladigan intervensiya. Ishtirokchilardan smartfonlari orqali kechki so‘rovnoma o‘tkazish so‘ralgan. Ishtirokchilar Yangi Zelandiyaning Otago Universitetidagi talaba ko‘ngillilaridan iborat edi. 14 kunlik tadqiqot yakunida faqat uchinchi guruhdagi ishtirokchilarda psixologik farovonlikda yaxshilanish kuzatildi.[34]

[34]Tamlin S Conner et al. “Let them eat fruit! The effect of fruit and vegetable consumption on psychological

(a) Bu qanday tadqiqot turi?

(b) Izohlovchi va javob o'zgaruvchilarini aniqlang.

(c) Tadqiqot natijalari umumiy bosh to'plamga umumlashtirilishi mumkinmi? Izoh bering.

(d) Tadqiqot natijalari sabab-oqibat munosabatlarini aniqlash uchun ishlatilishi mumkinmi? Izoh bering.

(e) Tadqiqot haqida xabar beruvchi gazeta maqolasida quyidagicha yozilgan: "Tadqiqot natijalari yoshi kattalarga yangi meva va sabzavot berish qisqa vaqt ichida psixologik foyda keltirishini isbotlaydi." Ushbu bayonotni tadqiqot tomonidan qo'llab-quvvatlanishi uchun qanday tahrir qilishni taklif qilasiz?

1.42 Ekran, o'smirlar va ruhiy salomatlik. Irlandiya, Qo'shma Shtatlar va Buyuk Britaniyadan (n = 17247) uchta milliy vakillikka ega katta hajmdagi ma'lumotlar to'plami asosida o'tkazilgan tadqiqotda 12-15 yoshdagi o'smirlardan ekran vaqtini kundalik tarzda yozib borish va ular qanday his qilishlari yoki o'zlarini qanday tutishlari haqida savollarga javob berishlari so'ralgan. Ushbu javoblar ruhiy salomatlik ballarini hisoblash uchun ishlatilgan. Tadqiqotda shuningdek, har bir bolaning jinsi va yoshi, onasining ma'lumoti, etnik kelib chiqishi, ruhiy holati va bandligi haqidagi qo'shimcha ma'lumotlarni ham yig'gan. Tadqiqot ekran vaqti o'smirlarning salomatligini kamaytiradi degan aniq dalillarni ko'rsatmadi.[35]

(a) Bu qanday tadqiqot turi?

(b) Izohlovchi o'zgaruvchilarni aniqlang.

(c) Javob o'zgaruvchisini aniqlang.

(d) Tadqiqot natijalari umumiy bosh to'plamga umumlashtirilishi mumkinmi va nima uchun?

(e) Tadqiqot natijalari sabab-oqibat munosabatlarini aniqlash uchun ishlatilishi mumkinmi? Izoh bering.

1.43 Stanford ochiq politsiya loyihasi. Stanford Open Policing loyihasi AQSh bo'ylab huquqni muhofaza qilish idoralari tomonidan olib borilgan transport vositalarini to'xtatish holatlari bo'yicha yozuvlarni yig'adi, tahlil qiladi va nashr etadi. Ularning maqsadi tadqiqotchilar, jurnalistlar va siyosatchilarga politsiya va aholi o'rtasidagi o'zaro munosabatlarni o'rganish va yaxshilashda yordam berishdir.[36] Quyida ushbu loyiha doirasida yig'ilgan ma'lumotlar asosida yaratilgan jadvaldan bir parchasi keltirilgan:

Okrug	Shtat	Haydovchining irqi	To'xtatishlarning yillik soni	To'xtatilganlarning %i mashinalar tekshirilgan	haydovchilar hibsga olingan
Apachi okrugi	Arizona	Qora tanli	266	0,08	0,02
Apachi okrugi	Arizona	Ispan	1008	0,05	0,02
Apachi okrugi	Arizona	Oq tanli	6322	0,02	0,01
Kochis okrugi	Arizona	Qora tanli	1169	0,05	0,01
Kochis okrugi	Arizona	Ispan	9453	0,04	0,01
Kochis okrugi	Arizona	Oq tanli	10826	0,02	0,01
...	...	...	...	...	...
Vud okrugi	Viskonsin	Qora tanli	16	0,24	0,10
Vud okrugi	Viskonsin	Ispan	27	0,04	0,03
Vud okrugi	Viskonsin	Oq tanli	1157	0,03	0,03

(a) Har bir individual transport vositasini to'xtatish holati bo'yicha qanday o'zgaruvchilar yig'ilgan va yuqoridagi jadvalni yaratish uchun ishlatilgan?

(b) Har bir o'zgaruvchi miqdoriy yoki toifali ekanligini belgilang. Agar miqdoriy bo'lsa, u uzluksizmi yoki diskretmi, agar toifali bo'lsa, u tartiblimi?

(c) Agar biz haydovchilarning irqlari bo'yicha mashina qidiruv darajalarini baholamoqchi bo'lsak, ushbu tahlilda izohlovchi o'zgaruvchi va javob o'zgaruvchisi qaysi bo'ladi?

1.44 Kosmik parvozlar. Quyidagi umumiy jadval 1957 yildan 2018 yilgacha AQShda kosmik parvozlarning turli agentliklar tomonidan amalga oshirilishi va ularning muvaffaqiyat yoki muvaffaqiyatsizlik natijalari bo'yicha taqsimotini ko'rsatadi.[37]

	1957 - 1999		2000 - 2018	
	Muvaffaqiyatsizlik	Muvaffaqiyat	Muvaffaqiyatsizlik	Muvaffaqiyat
Xususiy	13	295	10	562
Davlat	281	3751	33	711
Startap	-	-	5	65

well-being in young adults: A randomized controlled trial". In: *PloS one* 12.2 (2017), e0171206.

[35] Amy Orben and AK Baukney-Przybylski. "Screens, Teens and Psychological Well-Being: Evidence from three time-use diary studies". In: *Psychological Science* (2018).

[36] Emma Pierson et al. "A large-scale analysis of racial disparities in police stops across the United States". In: *arXiv preprint arXiv:1706.05678* (2017).

[37] JSR Launch Vehicle Database, A comprehensive list of suborbital space launches, 2019 Feb 10 Edition.

(a) Har bir parvoz bo‘yicha qanday o‘zgaruvchilar yig‘ilgan va yuqoridagi jadvalni yaratish uchun ishlatilgan?

(b) Har bir o‘zgaruvchi miqdoriy yoki toifali ekanligini belgilang. Agar miqdoriy bo‘lsa, u uzluksizmi yoki diskretmi, agar toifali bo‘lsa, u tartiblimi?

(c) Agar biz parvozlarning muvaffaqiyat darajasi turli agentliklar va vaqt o‘tishi bilan qanday farq qilishini o‘rganmoqchi bo‘lsak, ushbu tahlilda izohlovchi o‘zgaruvchi va javob o‘zgaruvchisi qaysi bo‘ladi?

2-BOB

Ma’lumotlarni umumlashtirish

2.1 Sonli ma’lumotlarni tahlil qilish

2.2 Toifali ma’lumotlarni ko‘rib chiqish

2.3 Amaliy misol: bezgakka qarshi vaksina

Ushbu bob ma'lumotlarni umumlashtirish, grafiklarning mexanikasi va qurilishiga bag'ishlangan. Ushbu bob va kitobda keltirilgan xulosalar hamda grafiklarni hosil qilish uchun statistik dasturiy ta'minotdan foydalanamiz. Shuningdek, bu tushunchalar bilan ilk bor tanishayotgan bo'lishingiz mumkinligi sababli, ushbu bobda ularni qanday yaratishni batafsil bayon qilamiz. Ushbu bobda bayon etilgan mazmunni puxta o'zlashtirish kitobning qolgan qismlarida taqdim etiladigan usul va texnikalarni tushunish uchun nihoyatda muhim rol o'ynaydi.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

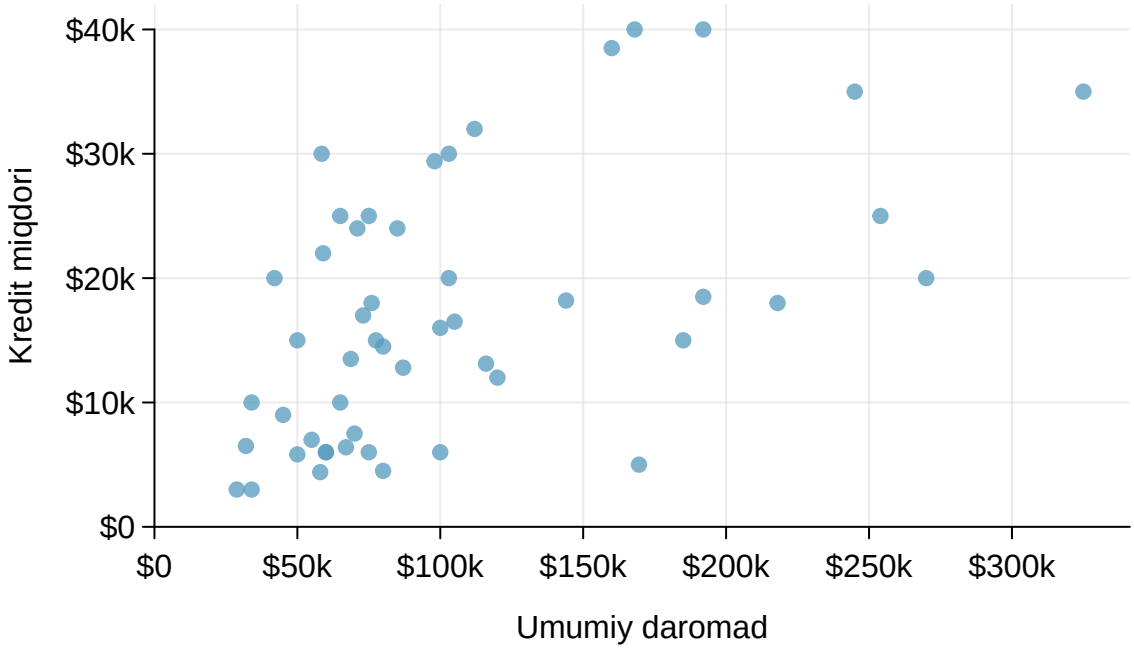
2.1 Sonli ma'lumotlarni tahlil qilish

Ushbu bo'limda sonli o'zgaruvchilarni umumlashtirish usullarini o'rganamiz. Masalan, `loan50` ma'lumotlar to'plamidagi kredit miqdori `(loan_amount)` o'zgaruvchisini ko'rib chiqamiz, u ushbu to'plamdagi 50 ta kreditning har biri uchun kredit miqdorini ifodalaydi. Bu o'zgaruvchi sonli, chunki ikkita kredit hajmlari orasidagi sonli farq haqida ma'noli ravishda gapirishimiz mumkin. Boshqa tomondan, telefonlar uchun hudud kodlari va pochta indekslari sonli emas, balki toifali o'zgaruvchilardir.

Bu bo'lim va undan keyingi bo'limlar davomida mavjud usullarni 1.2-bo'limda taqdim etilgan `loan50` va `county` ma'lumotlar to'plamlarida qo'llaymiz. Agar ma'lumotlar to'plamlarining o'zgaruvchilarini qayta ko'rib chiqmoqchi bo'lsangiz, 1.3- va 1.5-rasmlarga qarang.

2.1.1 Juft ma'lumotlar uchun sochma diagrammalar

Sochma diagramma ikkita sonli o'zgaruvchi uchun ma'lumotlarning holati bo'yicha ko'rinishini beradi. 18-betdagi 1.8-rasmda `county` ma'lumotlar to'plamida uy-joyga egalik qilish darajasini ko'p xonadonli ko'chmas mulklar (masalan, kvartiralar) tarkibiga kiruvchi uy-joy birliklari ulushiga nisbatan o'rganish uchun sochma diagrammadan foydalanilgan. Yana bir sochma diagramma 2.1-rasmda keltirilgan bo'lib, u `loan50` ma'lumotlar to'plamida qarzdorning umumiy daromadi (`total_income`) ni u olgan kredit miqdori (`loan_amount`) bilan taqqoslaydi. Har qanday sochma diagrammada har bir nuqta bitta holatni ifodalaydi. `loan50` da 50 ta holat mavjud bo'lganligi sababli, 2.1-rasmda ham 50 ta nuqta bor.



2.1-rasm. `loan50` ma'lumotlar to'plamidagi qarzdorning umumiy daromadi `(total_income)` va olgan kredit miqdori uchun `(loan_amount)` sochma diagramma.

2.1-rasmga nazar tashlasak, grafikning chap tomonida daromadi $100000 dan past bo'lgan ko'plab qarz oluvchilar borligini, o'ng tomonda esa daromadi $250000 dan yuqori bo'lgan bir nechta qarz oluvchilar mavjudligini ko'ramiz.

2.1-MISOL

2.2-rasmda 3142 ta okrug uchun o'rtacha uy xo'jaligi daromadi medianasini qashshoqlik darajasiga nisbatan tasvirlaydi. Bu o'zgaruvchilar o'rtasidagi munosabat haqida nima deyish mumkin?

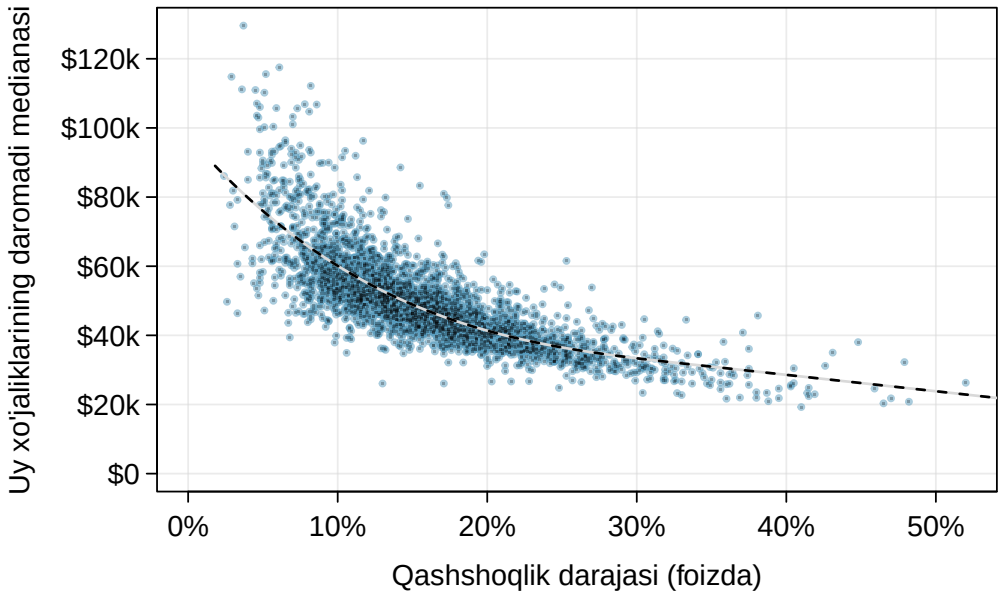
Munosabat aniq **nochiziqli**, buni shtrixli chiziq ta'kidlab turibdi. Bu ilgari ko'rgan sochma diagrammalarimizdan farq qiladi, ular orasidagi tendensiyada sezilarli egri chiziqlilik kuzatilmagan edi.

2.2-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Sochma diagrammalari ma'lumotlar haqida nimani ko'rsatadi va ular nimasi bilan foydali?[1]

2.3-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Sochma diagrammada taqa (∩ yoki ⌒ shaklida) ko'rinishidagi bog'lanishga ega bo'ladigan ikkita o'zgaruvchini tasvirlab bering.[2]



2.2-rasm. `county` ma'lumotlar to'plami uchun o'rtacha uy xo'jaligi daromadi va qashshoqlik darajasining sochma diagrammasi. Statistik model ham ma'lumotlarga moslashtirilgan bo'lib, uzuq-uzuq chiziq orqali ko'rsatilgan.

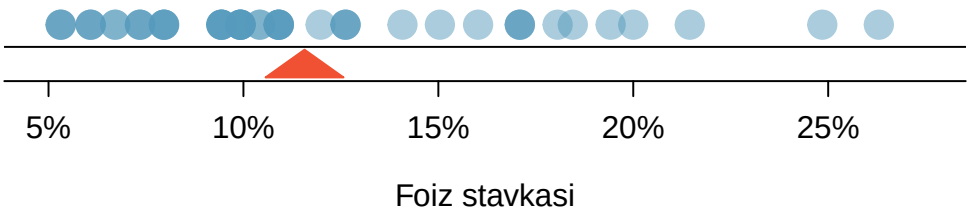
2.1.2 Nuqtali diagrammalar va o'rtacha qiymat

Ba'zan ikki o'zgaruvchi ham ortiqcha bo'lishi mumkin. Gohida faqat bitta o'zgaruvchi qiziqish uyg'otadi. Bunday vaziyatlarda nuqtali diagramma eng sodda tasvirlardan birini beradi. **Nuqtali diagramma** – bu bitta o'zgaruvchining sochma diagrammasi. 2.3-rasmda 50 ta kreditning foiz stavkasidan foydalanilgan misol ko'rsatilgan. Ushbu nuqtali diagrammaning ustma-ust ko'rinishi 2.4-rasmda keltirilgan.

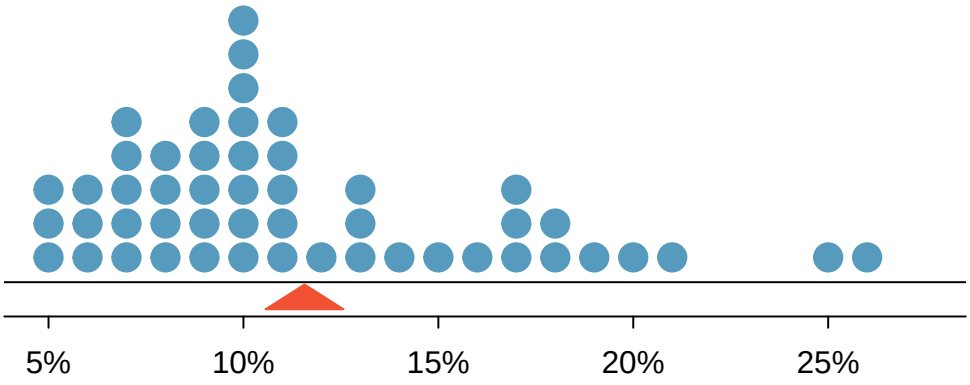
Arifmetik o'rtacha ko'pincha **o'rtacha** deb ham ataladi va u ma'lumotlar **taqsimot**ining markazini o'lchashning keng tarqalgan usulidir. Foiz stavkasining o'rtacha qiymatini hisoblash uchun

[1] Javoblar turlicha bo'lishi mumkin. Sochma diagrammalari o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanishlarni tezda aniqlashga yordam beradi, bu bog'lanishlar sodda tendensiyalar ko'rinishida bo'ladimi yoki yanada murakkab munosabatlar shaklida bo'ladimi, barchasini ko'rsatadi.

[2] Vertikal o'q "yaxshi" bo'lgan nimanidir, gorizontal o'q esa faqat me'yorida bo'lganda "yaxshi" bo'ladigan narsani ifodalaydigan holatni tasavvur qiling. Sog'liq va suv iste'moli buning yaxshi misolidir: yashashimiz uchun ma'lum miqdorda suv zarur, biroq juda ko'p suv iste'mol qilsak, u zaharli bo'lib qoladi va insonni o'ldirishi ham mumkin.



2.3-rasm. `loan50` ma'lumotlar to'plami foiz stavkasining (`interest_rate`) nuqtali diagrammasi. Foiz stavkasining o'rtacha qiymati qizil uchburchak bilan ko'rsatilgan.



2.4-rasm. `loan50` ma'lumotlar to'plami foiz stavkasining (`interest_rate`) yig'ilgan nuqtali diagrammasi. Ushbu diagrammada foiz stavkalari yaqin butun foizgacha yaxlitlangan va foiz stavkasining o'rtacha qiymati qizil uchburchak bilan ko'rsatilgan.

barcha foiz stavkalarini qo'shamiz va kuzatuvlar soniga bo'lamiz:

$$\bar{x} = \frac{10{,}90\% + 9{,}92\% + 26{,}30\% + \cdots + 6{,}08\%}{50} = 11{,}57\% \ .$$

Tanlanma o'rtachasi odatda $\bar{x}$ bilan belgilanadi. Bu yerda x harfi qiziqish uyg'otayotgan o'zgaruvchi, ya'ni foiz stavkasi uchun umumiy belgi sifatida ishlatilmoqda va x ustidagi chiziq biz foiz stavkasining o'rtacha qiymatini qarayotganimizni bildiradi. Bu 50 ta kredit uchun u 11,57% ga teng. O'rtachani taqsimotning muvozanat nuqtasi sifatida tasavvur qilish foydali va u 2.3- hamda 2.4-rasmlarda uchburchak bilan ko'rsatilgan.

O'RTACHA QIYMAT

Tanlanma o'rtachasini topish uchun kuzatilgan qiymatlar yig'indisini ularning soniga bo'lish zarur:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

bu yerda x_1, x_2, ..., x_n – n ta kuzatilgan qiymatni ifodalaydi.

`loan50` ma'lumotlar to'plami "Lending Club" orqali berilgan kreditlarning bosh to'plamidan olingan tanlanmani ifodalaydi. Biz ushbu bosh to'plam uchun o'rtacha qiymatni tanlanma o'rtachasini hisoblaganimiz kabi hisoblashimiz mumkin. Biroq, bosh to'plam o'rtachasi uchun maxsus belgi μ qo'llanadi. μ belgisi yunon alifbosidagi *myu* harfi bo'lib, bosh to'plamdagi barcha kuzatishlarning o'rtacha qiymatini bildiradi. Ba'zan pastki indeks, bosh to'plam o'rtachasi qaysi o'zgaruvchiga

tegishli ekanini ko'rsatish uchun qo'llanadi, masalan, μ_x. Ko'pincha bosh to'plam o'rtachasini aniq o'lchash juda qimmatga tushadi, shuning uchun μ ni ko'pincha tanlanma o'rtachasi $\bar{x}$ yordamida baholanadi.

Y **2.4-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

O'rtacha qiymat formulasini ko'rib chiqing. Bu yerda x_1 nimaga mos keladi? x_2-chi? Umuman olganda, x_i nimani ifodalashini ayta olasizmi?[3]

Y **2.5-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Ushbu kreditlar tanlanmasida n ning qiymati qancha edi?[4]

M **2.6-MISOL**

Bosh to'plamdagi barcha kreditlar bo'yicha o'rtacha foiz stavkasini tanlanma ma'lumotlari yordamida baholash mumkin. 50 ta kreditdan iborat tanlanmaga asoslanib, to'liq ma'lumotlar to'plamidagi barcha kreditlar uchun o'rtacha foiz stavkasi bo'lgan μ_x ning qanday asosli bahosini olish mumkin?

Tanlanma o'rtachasi 11,57%, μ_x uchun taxminiy bahoni beradi. U mukammal bo'lmasada, bu o'rganilayotgan bosh to'plamdagi barcha kreditlarning o'rtacha foiz stavkasi bo'yicha yagona eng yaxshi taxminimizdir.

5-bobda va undan keyingi boblarda biz tanlanma o'rtachasi kabi *nuqtaviy baholar* aniqligini tavsiflash uchun vositalarni ishlab chiqamiz. Siz taxmin qilgan bo'lishingiz mumkin, katta tanlanmalarga asoslangan nuqtaviy baholar kichik tanlanmalarga asoslangan baholarga nisbatan odatda aniqroq bo'ladi.

M **2.7-MISOL**

O'rtacha qiymat foydali, chunki u ko'rsatkichni yanada oson talqin qilinadigan va taqqoslanadigan shaklga keltirish uchun uni qayta masshtablash yoki standartlashtirish imkonini beradi. O'rtacha qiymat taqqoslashlar uchun foydali bo'lgan 2 ta misol keltiring.

---

1. Biz yangi dori astma xurujlarini davolashda standart doriga qaraganda samaraliroqmi yo'qligini tushunmoqchimiz. 1500 nafar katta yoshdagilarda sinov o'tkaziladi, bunda 500 nafari yangi dorini, 1000 nafari esa nazorat guruhida standart dorini qabul qiladi:

	Yangi dori	Standart dori
Bemorlar soni	500	1000
Jami astma xurujlari	200	300

Astma xurujlarining 200 va 300 kabi dastlabki natijalarni taqqoslash yangi dori yaxshiroqdek ko'rinishiga olib keladi, biroq bu guruh o'lchamlarining nomutanosibligi natijasidagi sun'iy ta'sirdir. Buning o'rniga, guruhlardagi har bir bemorga to'g'ri keladigan astma xurujlarining o'rtacha soniga qarashimiz kerak:

$$\text{Yangi dori: } 200/500 = 0{,}4 \qquad \text{Standart dori: } 300/1000 = 0{,}3\ .$$

Standart doridan foydalangan guruhda har bir bemorga to'g'ri keladigan astma xurujlarining o'rtacha soni davolash (yangi dori) guruhidagidan pastroq.

2. Emilio o'tgan yili burrito (bu asosan Meksika oshxonasiga oid taom) sotadigan oziq-ovqat furgonini ochdi va so'nggi 3 oy ichida uning biznesi barqarorlashdi. Shu 3 oylik davrda u 625 soat ishlagan holda \$11000 daromad qilgan. Emilioning o'rtacha soatlik daromadi, ushbu faoliyati, hech bo'lmaganda moliyaviy nuqtai nazardan, arzish-arzimaganini baholash uchun foydali statistikadir:

$$\frac{\$11000}{625 \text{ soat}} = \$17{,}60 \text{ soatiga}\ .$$

O'zining o'rtacha soatlik ish haqini bilgan holda, Emilio endi o'z daromadini u ko'rib chiqishi

[3] x_1 tanlanmadagi birinchi kreditning foiz stavkasiga (10,90%) mos keladi, x_2 esa ikkinchi kreditning foiz stavkasiga (9,92%) mos keladi, x_i esa ma'lumotlar to'plamidagi i-kreditning foiz stavkasiga mos keladi. Masalan, agar $i = 4$ bo'lsa, biz x_4 ni ko'rib chiqamiz, ya'ni bu to'plamdagi to'rtinchi kuzatuvga tegishli.

[4] Tanlanma hajmi $n = 50$ edi.

mumkin bo‘lgan boshqa ko‘plab ishlar bilan taqqoslash oson bo‘lgan standart birlikda ifodalagan bo‘ladi.

2.8-MISOL

Faraz qilaylik, biz AQShdagi har bir kishi uchun o‘rtacha daromadni hisoblamoqchimiz. Buning uchun avval `county` ma'lumotlar to‘plamidagi 3142 ta okrug bo‘yicha jon boshiga to‘g‘ri keladigan daromadlarning o‘rtacha qiymatini olishni o‘ylasak bo‘ladi. Buning o‘rniga qanday yaxshiroq yondashish mumkin?

`county` ma'lumotlar to‘plami shunisi bilan o‘ziga xoski, undagi har bir okrug aslida ko‘plab alohida shaxslarni ifodalaydi. Agar biz shunchaki daromad (`income`) o‘zgaruvchisi bo‘yicha o‘rtacha qiymatni hisoblasak, hisob-kitoblarda aholisi 5000 bo‘lgan okrug bilan 5000000 nafar aholiga ega okrugni teng darajada hisobga olgan bo‘lamiz. Buning o‘rniga har bir okrug uchun jami daromadni hisoblashimiz, barcha okruglarning jami daromadlarini qo‘shishimiz va so‘ng bu yig‘indini barcha okruglardagi odamlar soniga bo‘lishimiz mumkin. Agar biz bu bosqichlarni `county` ma'lumotlari bilan bajarsak, AQSh uchun jon boshiga to‘g‘ri keladigan daromad $30861 ekanini topamiz. Agar biz okruglar bo‘yicha jon boshiga to‘g‘ri keladigan daromadlarning *oddiy* o‘rtacha qiymatini hisoblaganimizda natija atigi $26093 bo‘lgan bo‘lardi!

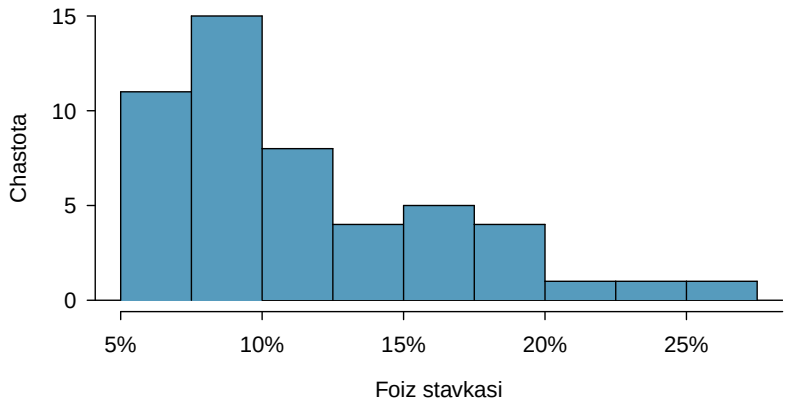
Ushbu misolda **vaznli o‘rtacha** deb ataladigan usuldan foydalandik. Bu mavzu bo‘yicha qo‘shimcha ma'lumot olish uchun vaznli o‘rtachalar haqidagi quyidagi onlayn qo‘shimcha materialni ko‘ring: openintro.org/d?file=stat_wtd_mean.

2.1.3 Gistogrammalar va shakl

Nuqtali diagrammalar har bir kuzatishning aniq qiymatini ko‘rsatadi. Bu kichik ma'lumotlar to‘plamlari uchun foydalidir ammo katta tanlanmalar bilan ular o‘qilishi qiyin bo‘lib qolishi mumkin. Har bir kuzatish qiymatini ko‘rsatish o‘rniga, biz qiymatni *bin* (ustuncha, interval, oraliq) deb ataladigan intervalga tegishli deb qarashni afzal ko‘ramiz. Masalan, `loan50` ma'lumotlar to‘plamida biz foiz stavkasi 5,0% dan 7,5% gacha bo‘lgan kreditlar soni, keyin 7,5% dan 10,0% gacha bo‘lganlar soni va hokazo uchun sonlar jadvalini yaratdik. Intervalning chegarasiga tushgan kuzatishlar (masalan, 10,0%) pastki intervalga ajratiladi. Ushbu jadval 2.5-rasmda ko‘rsatilgan. Ushbu intervalga ajratilgan sonlar 2.6 rasmda ustunlar shaklida chizilgan bo‘lib, bu **gistogramma** deb ataladi. Bu yig‘ilgan nuqtali diagrammaning intervallarga bo‘lingan ko‘rinishiga o‘xshaydi (2.4-rasmini ko‘ring).

Foiz stavkasi	5,0% - 7,5%	7,5% - 10,0%	10,0% - 12,5%	12,5% - 15,0%	···	25,0% - 27,5%
Soni	11	15	8	4	···	1

2.5-rasm. Foiz stavkasi ma'lumotlarining intervalga ajratilgan sonlari.



2.6-rasm. Foiz stavkasi (`interest_rate`) uchun gistogramma. Ushbu taqsimot o‘ng tomonga kuchli siljigan.

Gistogrammalar **ma'lumotlar zichligi**ni ko‘rish imkoniyatini beradi. Yuqori ustunlar ma'lumot-

larning nisbatan ko'proq uchraydigan joylarini ifodalaydi. Masalan, ma'lumotlar to'plamida 5% va 10% oralig'ida foiz stavkasiga ega kreditlar soni 20% va 25% oralig'idagi kreditlarga qaraganda ancha ko'p. Ustunlar yordamida foiz stavkasiga nisbatan ma'lumotlarning zichligi qanday o'zgarayotganini ko'rish osonlashadi.

Gistogrammalar ayniqsa ma'lumotlar taqsimotining shaklini tushunishda qulaydir. 2.6-rasm shuni ko'rsatadiki, kreditlarning ko'pchilik qismi 15% dan past foiz stavkasiga ega, holbuki faqat bir nechta kreditlar 20% dan yuqori stavkalarga ega. Ma'lumotlar o'ng tomonga bu tarzda sekin pasayib, uzunroq o'ng quyruqqa ega bo'lsa, shakl **o'ngga siljigan** deb ataladi.[5]

Agar ma'lumotlar teskari xususiyatga, ya'ni uzoqroq va yupqaroq chap quyruqqa ega bo'lsa, bunday taqsimot **chapga siljigan** deb ataladi. Bunday taqsimotning uzun chap quyruqqa ega ekanligini ham aytamiz. Ma'lumotlarning ikkala yo'nalishda ham bir xil pasayishini ko'rsatgan taqsimotlar **simmetrik** deb ataladi.

UZUN QUYRUQLAR SILJISHNI ANIQLASH UCHUN

Agar ma'lumotlar bir yo'nalishda sekin pasaysa, taqsimot **uzun quyruq**ga ega. Agar taqsimot uzun chap quyruqqa ega bo'lsa, u chapga siljigan. Agar taqsimot uzun o'ng quyruqqa ega bo'lsa, u o'ngga siljigan.

Y **2.9-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

2.3- va 2.4-rasmlardagi nuqtali diagrammalarga qarang. Ma'lumotlardagi siljishni ko'rishingiz mumkinmi? Ushbu gistogrammada yoki nuqtali diagrammalarning qaysi birida siljishni ko'rish osonroq?[6]

Y **2.10-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

O'rtacha qiymatdan tashqari (u alohida belgilangan bo'lgani uchun), nuqtali diagrammalarda ko'rib, ammo gistogrammada ko'ra olmaydigan yana nimalarni ko'rishingiz mumkin?[7]

Taqsimot qiyshaygan yoki simmetrik ekanini ko'rishdan tashqari, gistogrammalar modalarni aniqlash uchun ham ishlatilishi mumkin. **Moda** taqsimotdagi yaqqol cho'qqi bilan ifodalanadi. Kredit miqdori (`loan_amount`)gistogrammasida faqat bitta yaqqol cho'qqi mavjud.

Ba'zan matematika darslarida *moda*ning ta'rifi sifatida ma'lumotlar to'plamida eng ko'p uchraydigan qiymat keltiriladi. Biroq ko'plab real ma'lumotlar to'plamlarida ma'lumotlar to'plamida bir xil qiymatga ega *hech qanday* kuzatuv bo'lmasligi odatiy hol, bu esa ushbu ta'rifni amaliy ma'lumot tahlilida noqulay qiladi.

2.7-rasmda bitta, ikkita yoki uchtadan yaqqol cho'qqiga ega gistogrammalar ko'rsatilgan. Bunday taqsimotlar mos ravishda **unimodal**, **bimodal** va **multimodal** deb ataladi. Ikkitadan ortiq yaqqol cho'qqiga ega istalgan taqsimot multimodal taqsimot deyiladi. Unimodal taqsimotda bitta yaqqol cho'qqi. Shuningdek, ikkinchi, (unchalik yaqqol bo'lmagan) cho'qqi ham bor edi, ammo u bir necha kuzatuv bilan o'ziga qo'shni binlar (segmentlar)dan farq qilgani uchun hisobga olinmadi.

M **2.11-MISOL**

2.6-rasm foiz stavkalari taqsimotida faqat bitta yaqqol moda borligini ko'rsatadi. Taqsimot unimodalmi, bimodalmi yoki multimodalmi?

Unimodal. Eslang, *uni* 1 sonini bildiradi (masalan, *uni*cycle). Shuningdek, *bi* 2 sonini bildiradi (masalan, *bi*cycle). Bu o'xshatishni to'liq qilish uchun bir kuni *multicycle* ixtiro qilinishiga umid qilamiz.

Y **2.12-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

K–3 boshlang'ich maktabidagi kichik yoshdagi o'quvchilar va kattalar (o'qituvchilar)ning bo'y o'lchovlari olingan. Bu bo'y ma'lumotlar to'plamida nechta moda bo'lishini kutgan bo'lardingiz?[8]

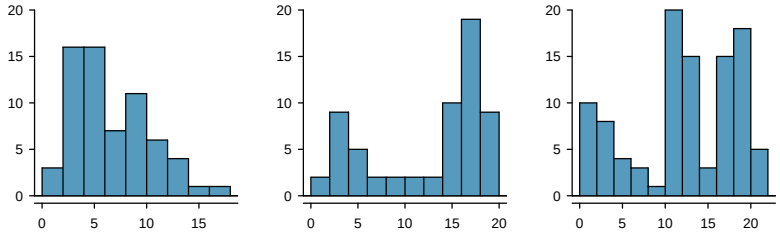
Modalarni izlash taqsimotdagi modalar soni haqida aniq va yagona to'g'ri javob topish haqida

[5] o'ngga siljigan ma'lumotlarni boshqa nomlari: **o'ngga og'gan**, **yuqori qiymat tomonga siljigan** yoki **ijobiy tomonga siljigan**.

[6] Siljish uchala diagrammada ham ko'rinadi, ammo oddiy nuqtali diagramma kamroq foydalidir. Yig'ilgan nuqtali diagramma va gistogramma siljishni aniqlash uchun qulayroq vizualizatsiyadir.

[7] Har bir alohida kreditning foiz stavkalarini.

[8] Ma'lumotlar to'plamida bo'y bo'yicha ikkita guruh ko'rinishi mumkin. Biri o'quvchilar, ikkinchisi esa kattalar. Demak, ma'lumotlar ehtimol bimodal.



2.7-rasm. Faqat yaqqol cho'qqilarni hisobga olgan holda, taqsimotlar (chapdan o'ngga) mos ravishda unimodal, bimodal va multimodal hisoblanadi. Shuni unutmangki, chap tomondagi grafikni atayin unimodal deb atayapmiz. Buning sababi shundaki, biz har qanday cho'qqini emas, balki aynan *yaqqol* cho'qqilarni hisoblayapmiz.

emas. Shuning uchun *yaqqol* bu kitobda qat'iy ta'riflanmagan. Bu tahlilning eng muhim tomoni – o'z ma'lumotlaringizni yaxshiroq tushunishdir.

2.1.4 Dispersiya va standart og'ish

Tanlanma markazini tavsiflash usuli sifatida o'rtacha qiymatni kiritgan edik. Shuningdek, ma'lumotlardagi tarqoqlik ham muhim. Bu yerda tarqoqlikning ikkita o'lchovini kiritamiz: dispersiya va standart og'ish. Ularning ikkalasi ham ma'lumotlarni tahlil qilishda juda foydali, garchi ularning formulalarini qo'l bilan hisoblash biroz mashaqqatli bo'lsa ham. Ikki ko'rsatkichdan tushunish osonrog'i standart og'ish bo'lib, u odatdagi (tipik) kuzatuvning o'rtacha qiymatdan taxminan qanchaga og'ishini tavsiflaydi.

Kuzatuvning o'rtacha qiymatdan uzoqlashish masofasi uning **og'ish**i deb ataladi. Quyida foiz stavkasi o'zgaruvchisidagi 1−, 2−, 3− va 50− kuzatuvlar uchun og'ishlar keltirilgan:

$$\begin{aligned} x_1 - \bar{x} &= 10{,}90 - 11{,}57 = -0{,}67 \text{ ;} \\ x_2 - \bar{x} &= 9{,}92 - 11{,}57 = -1{,}65 \text{ ;} \\ x_3 - \bar{x} &= 26{,}30 - 11{,}57 = 14{,}73 \text{ ;} \\ &\vdots \\ x_{50} - \bar{x} &= 6{,}08 - 11{,}57 = -5{,}49 \text{ .} \end{aligned}$$

Agar biz ushbu og'ishlarni kvadratga oshirsak va so'ngra ularning o'rtachasini olsak, natija s^2 bilan belgilanuvchi tanlanma **dispersiya** ga teng bo'ladi:

$$s^2 = \frac{(-0{,}67)^2 + (-1{,}65)^2 + (14{,}73)^2 + \cdots + (-5{,}49)^2}{50 - 1} = \frac{0{,}45 + 2{,}72 + 216{,}97 + \cdots + 30{,}14}{49} = 25{,}52 \text{ .}$$

Tanlanma dispersiyasini hisoblashda maxrajda n emas, $n - 1$ dan foydalanamiz. Bu yerda ma'lum bir matematik noziklik mavjud, biroq bu usul statistikani biroz ishonchliroq va foydaliroq qiladi.

Og'ishlarni kvadratga oshirish ikki narsani amalga oshiradi. Birinchidan, katta qiymatlarni nisbatan ancha kattalashtiradi, buni $(-0{,}67)^2$, $(-1{,}65)^2$, $(14{,}73)^2$ va $(-5{,}49)^2$ ni solishtirish orqali ko'rish mumkin. Ikkinchidan, u barcha manfiy ishoralarni yo'qotadi.

Standart og'ish esa dispersiyaning kvadrat ildizi sifatida aniqlanadi:

$$s = \sqrt{25{,}52} = 5{,}05 \text{ .}$$

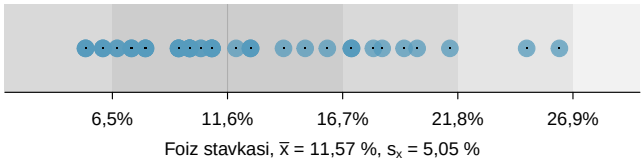
Ko'pincha tashlab yuborilsa-da, bu kattaliklarning aynan x_1, x_2, ..., x_n bilan ifodalangan kuzatuvlar uchun dispersiya va standart og'ish ekanini eslatib turishi uchun dispersiya va standart og'ishga $_x$ pastki indeksi qo'shilishi mumkin, ya'ni s_x^2 va s_x.

DISPERSIYA VA STANDART OG'ISH

Dispersiya o'rtacha qiymatdan uzoqlashish masofalarining kvadrat o'rtacha qiymatidir. Standart og'ish esa dispersiyaning kvadrat ildizidir. Standart og'ish ma'lumotlarning o'rtacha qiymatdan qanchaga tarqalganini ko'rishda foydalidir.

Standart og'ish kuzatuvlarning o'rtacha qiymatdan odatdagi (tipik) og'ishini ifodalaydi. Odatda ma'lumotlarning taxminan 70% qismi o'rtacha qiymatdan bir standart og'ish oralig'ida, taxminan 95% qismi esa ikki standart og'ish oralig'ida joylashadi. Biroq 2.8- va 2.9-rasmlarda ko'rib turganingizdek, bu foizlar qat'iy qoidalar emas.

O'rtacha qiymatdagidek, dispersiya va standart og'ishning bosh to'plam bo'yicha qiymatlari uchun ham maxsus belgilar qo'llanadi. Dispersiya uchun σ^2 va standart og'ish uchun esa σ. σ belgisi yunon alifbosidagi *sigma* harfidir.



2.8-rasm. foiz stavkasi o'zgaruvchisi uchun 50 ta kreditning 34 tasi (68%) foiz stavkasi o'rtacha qiymatdan 1 standart og'ish ichida, 50 tadan 48 tasi (96%) esa 2 standart og'ish ichida joylashgan. Odatda ma'lumotlarning taxminan 70% qismi o'rtacha qiymatdan 1 standart og'ish, 95% qismi esa 2 standart og'ish oralig'ida joylashadi, biroq bu qat'iy qoida emas.

Y

2.13-YO'NALTIRILGAN MASHQ

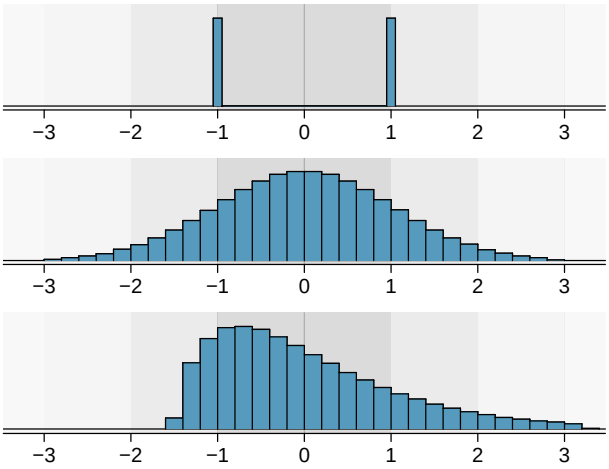
49-betda taqsimot shakli tushunchasi kiritilgan edi. Taqsimot shaklini yaxshi tavsiflashda uning modaligi (ya'ni modalar soni) va taqsimot simmetrikmi yoki bir tomonga og'ishganmi ekani kiritilishi kerak. 2.9-rasmni misol sifatida olib, bunday tavsif nima uchun muhim ekanini tushuntiring.[9]

M

2.14-MISOL

2.6-rasmdagi gistogrammadan foydalanib foiz stavkasi o'zgaruvchisining taqsimotini tasvirlab bering. Tavsifda taqsimotning markazi, dispersiyasi (tarqoqligi) va shakli keltirilsin hamda kon-

[9] 2.9-rasmda tashqi ko'rinishi ancha farq qiladigan uchta taqsimot ko'rsatilgan, biroq ularning barchasida o'rtacha qiymat, dispersiya va standart og'ish bir xil. Modallikdan foydalanib, birinchi grafikni (bimodal) oxirgi ikkitasidan (unimodal) ajratishimiz mumkin. Og'ishganlikdan foydalanib esa, oxirgi grafikni (o'ngga og'ishgan) birinchi ikkitadan farqlashimiz mumkin. Gistogramma kabi tasvir to'liqroq manzara bersa-da, biz taqsimot haqida asosiy ma'lumotlarni tavsiflash uchun modallik va shakldan (simmetriya/og'ishlik) foydalanishimiz mumkin.



2.9-rasm. Bir xil $\mu = 0$ o'rtacha va $\sigma = 1$ standart og'ishga ega bo'lgan uchta turli bosh to'plam taqsimotlari.

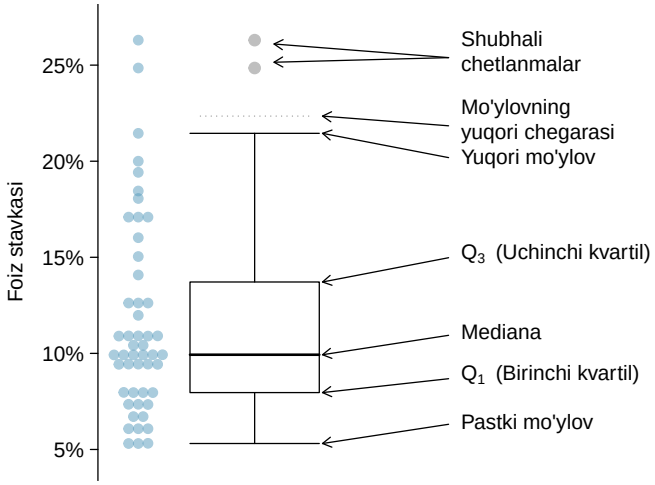
tekstga joylashtirilsin. Shuningdek, ayniqsa noodatiy holatlarga ham e'tibor bering.

Foiz stavkalari taqsimoti unimodal bo'lib, yuqori qiymatlar tomonga og'ishgan. Stavkalarning katta qismi o'rtacha qiymat – 11,57% atrofida joylashgan va ko'pchilik qiymatlar o'rtacha qiymatdan bir standart og'ish 5,05% ichida tushadi. Tanlanmada 20% dan yuqori bo'lgan bir nechta g'ayrioddiy katta foiz stavkalari mavjud.

Amaliyotda dispersiya va standart og'ish ba'zan ma'lum bir yakuniy maqsadga erishish uchun vosita sifatida ishlatiladi, bu yerda "yakuniy maqsad" tanlanma statistikasi bilan bog'liq aniqlik (noaniqlik)ni to'g'ri baholashdir. Masalan, 5-bobda standart og'ish turli tanlanmalar uchun tanlanma o'rtachasi qanchaga o'zgarib turishini tushunishga yordam beradigan hisob-kitoblarda qo'llanadi.

2.1.5 Qutili diagramma, kvartillar va mediana

Qutili diagramma ma'lumotlar to'plamini beshta statistik ko'rsatkich yordamida qisqacha ifodalaydi hamda noodatiy kuzatuvlarni ham tasvirlaydi. 2.10-rasmda `loan50` ma'lumotlar to'plamidagi foiz stavkasi o'zgaruvchisi uchun vertikal nuqtali diagramma va uning yonida qutili diagramma keltirilgan.



2.10-rasm. Vertikal nuqtali diagramma (nuqtalar gorizontal yo'nalishda joylashtirilgan) va 50 ta kreditning foiz stavkalari uchun qutili diagramma.

Qutili diagramma qurishning birinchi bosqichi ma'lumotlarni teng ikki qismga ajratuvchi **median**i ifodalovchi qoraroq chiziqni chizishdan iborat. 2.10-rasmda medianadan pastda ma'lumotlarning 50% qismi, medianadan yuqorida esa qolgan 50% qismi joylashganini ko'rish mumkin. Ma'lumotlar to'plamida 50 ta kredit mavjud (juft son), shuning uchun ma'lumotlar 25 tadan ikkita guruhga aniq bo'linadi. Bu holda medianani 50− foizlikka eng yaqin ikkita kuzatuvning o'rtacha qiymati sifatida olamiz va aynan shu ikkala qiymat bu yerda bir xil: $(9{,}93\% + 9{,}93\%)/2 = 9{,}93\%$. Agar kuzatuvlar soni toq bo'lsa, ma'lumotlarni teng ikki qismga ajratuvchi aniq bitta kuzatuv bo'ladi va bunday holda aynan shu kuzatuv (hech qanday o'rtacha olishsiz) medianani beradi.

MEDIANA BU – O'RTADAGI QIYMAT

Agar ma'lumotlar eng kichigidan eng kattasiga qarab tartiblangan bo'lsa, **mediana** aynan o'rtadagi kuzatuvdir. Agar kuzatuvlar soni juft bo'lsa, o'rtada ikkita qiymat bo'ladi va mediana ularning o'rtacha qiymati sifatida olinadi.

Qutili diagramma qurishning ikkinchi bosqichi ma'lumotlarning o'rtadagi 50% qismini ifodalovchi to'rtburchakni chizishdir. 2.10-rasmda vertikal ko'rinishda ko'rsatilgan qutining umumiy uzunligi **kvartillar aro oraliq** (qisqacha KAO) deb ataladi. U ham xuddi standart og'ish kabi ma'lumotlardagi tarqoqlikning o'lchovidir. Ma'lumotlar qanchalik o'zgaruvchan bo'lsa, standart

og'ish va KAO shunchalik katta bo'lishga moyil bo'ladi. Qutining ikki chegarasi **birinchi kvartil** (25− foizlikda, ya'ni ma'lumotlarning 25% qismi bu qiymatdan pastda) va **uchinchi kvartil** (75− foizlik) deb ataladi va ular mos ravishda Q_1 va Q_3 bilan belgilanadi.

KVARTILLAR ARO ORALIQ (KAO)

KAO qutining uzunligini bildiradi. U quyidagicha hisoblanadi:

$$KAO = Q_3 - Q_1,$$

bu yerda Q_1 va Q_3 mos ravishda 25- va 75-foizliklarni ifodalaydi.

2.15-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Ma'lumotlarning necha foizi Q_1 bilan mediananing orasiga to'g'ri keladi? Necha foizi mediana bilan Q_3 orasida?[10]

Qutidan tashqariga cho'zilgan **mo'ylovlar** ma'lumotlarning qutidan tashqarida joylashgan qismini ham qamrab olishga harakat qiladi. Biroq ularning yetish masofasi hech qachon $1{,}5 \times KAO$ dan ortiq bo'lishiga ruxsat etilmaydi. Ular shu masofa ichidagi barcha ma'lumotlarni qamrab oladi. 2.10-rasmda yuqori mo'ylov oxirgi ikki nuqtaga yetib bormaydi, chunki ular $Q_3 + 1{,}5 \times KAO$ dan yuqorida joylashgan. Shuning uchun yuqori mo'ylov faqat shu chegaradan pastdagi oxirgi nuqtaga qadar cho'zilgan. Quyi mo'ylov esa eng kichik qiymat 5,31% da to'xtaydi, chunki undan pastda qo'shimcha ma'lumot yo'q. Quyi mo'ylovning chegarasi chizmada ko'rsatilmagan, chunki chizma $Q_1 - 1{,}5 \times KAO$ gacha tushmaydi. Ma'lum ma'noda quti tana, mo'ylovlar esa ma'lumotlarning qolgan qismiga yetishga urinayotgan qo'llariga o'xshaydi.

Mo'ylovlardan tashqarida yotuvchi har qanday kuzatuv nuqta bilan belgilab qo'yiladi. Bu nuqtalarni – minimal va maksimal kuzatilgan qiymatlarga qadar mo'ylovlarni cho'zish o'rniga alohida belgilashdan maqsad ma'lumotlarning asosiy qismidan g'ayrioddiy darajada uzoqlashgan kuzatuvlarni aniqlashga yordam berishdir. Bunday g'ayrioddiy uzoq kuzatuvlar chetlashganlar deb ataladi. Bizning holatimizda 24,85% va 26,30% foiz stavkalarini ma'lumotlarning asosiy qismidan son jihatidan ancha uzoqda joylashgani sababli chetlashganlar sifatida tasniflash mantiqiy bo'ladi.

CHETLASHGANLAR — G'AYRIODDIY QIYMATLAR

Chetlashganlar — bu qolgan ma'lumotlarga nisbatan juda chekka (g'ayrioddiy) ko'rinadigan kuzatuvdir. Ma'lumotlarni chetlashganlar bor-yo'qligiga ko'ra tekshirish bir qancha foydali maqsadlarga xizmat qiladi. Taqsimotdagi kuchli og'ishganlikni aniqlash ma'lumotlarni yig'ish yoki kiritishdagi mumkin bo'lgan xatolarni aniqlash. Ma'lumotlarning qiziqarli xususiyatlari haqida qo'shimcha tasavvur hosil qilish.

2.16-YO'NALTIRILGAN MASHQ

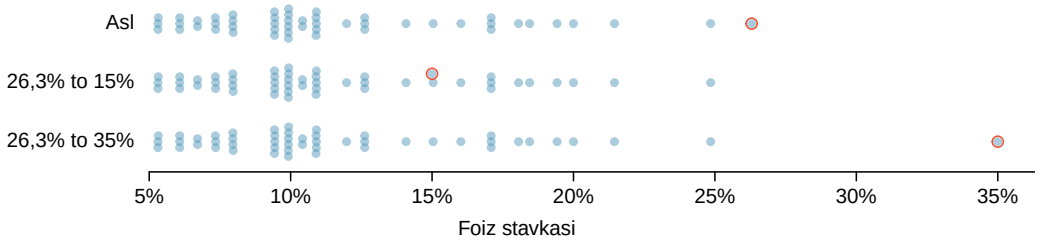
2.10-rasmdan foydalanib, `loan50` ma'lumotlar to'plamidagi foiz stavkasi o'zgaruvchisi uchun quyidagi qiymatlarni taxmin qiling:
(a) Q_1, (b) Q_3 va (c) KAO.[11]

2.1.6 Barqaror statistikalar

Tanlanma statistika ma'lumotlar to'plamidagi tanlanma statistikalar 26,3% qiymatdagi kuzatuv ta'sirida qanday o'zgaradi? Agar bu kredit foiz stavkasi buning o'rniga faqat 15% bo'lganida nima bo'lardi? Agar 26,3% dagi kuzatuv bundan ham kattaroq, masalan 35% bo'lganida. Ushbu umumiy statistikalar bilan nima sodir bo'lgan bo'lardi? Bu holatlar asl ma'lumotlar bilan birga 2.11-rasmda tasvirlangan va har bir holat uchun tanlanma statistikalar 2.12-rasmda hisoblangan.

[10] Q_1 va Q_3 ma'lumotlarning o'rtadagi 50% qismini qamrab olgani va mediana ma'lumotlarni o'rtadan ikkiga ajratgani uchun ma'lumotlarning 25% qismi Q_1 bilan mediana orasiga, yana 25% qismi esa mediana bilan Q_3 orasiga to'g'ri keladi.

[11] Bu vizual baholar bir odamdan boshqasiga biroz farq qilishi mumkin: $Q_1 = 8\%$, $Q_3 = 14\%$, KAO $= Q_3 - Q_1 = 6\%$. (Haqiqiy qiymatlar: $Q_1 = 7{,}96\%$, $Q_3 = 13{,}72\%$, KAO $= 5{,}76\%$.)



2.11-rasm. Asl foiz stavkalari ma'lumotlari va o'zgartirilgan ikkita ma'lumotlar to'plami uchun nuqtali diagrammalar.

	barqaror		**barqaror emas**	
Holat	Mediana	KAO	$\bar{x}$	s
asl foiz stavkalari bilan	9,93%	5,76%	11,57%	5,05%
26,3% ni 15% ga o'tkazish	9,93%	5,76%	11,34%	4,61%
26,3% ni 35% ga o'tkazish	9,93%	5,76%	11,74%	5,68%

2.12-rasm. foiz stavka o'zgaruvchisidagi chekka kuzatuv boshqa qiymatlarga o'zgartirilganda mediana, KAO, o'rtacha ($\bar{x}$) va standart og'ish (s) qanday o'zgarishini taqqoslash.

Y **2.17-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

(a) Ekstremal (chekka) kuzatuvlar ta'sirida qaysi biri ko'proq o'zgaradi. O'rtacha qiymatmi yoki mediana? Bu yerda 2.12-rasm yordam berishi mumkin. (b) Ekstremal kuzatuvlardan ko'proq qaysi biri ta'sirlanadi. Standart og'ishmi yoki KAO?[12]

Mediana va KAO ekstremal kuzatuvlar ularning qiymatlariga juda kam ta'sir ko'rsatgani uchun **barqaror statistika**lar deb ataladi. Eng chekka qiymatni o'zgartirish odatda bu statistikalarga nihoyatda kam ta'sir qiladi. Aksincha, o'rtacha qiymat va standart og'ish ekstremal kuzatuvlardagi o'zgarishlarga ancha kuchli reaksiya bildiradi, bu esa ayrim vaziyatlarda juda muhim bo'lishi mumkin.

M **2.18-MISOL**

2.12-rasmdagi uchta holatda mediana va KAO o'zgarmadi. Bu nimaning evaziga sodir bo'lishi mumkin?

Mediana va KAO faqat Q_1, mediana va Q_3 atrofidagi qiymatlarga sezgir. Bu hududlardagi qiymatlar uchala ma'lumotlar to'plamida ham barqaror bo'lib turgani uchun mediana va KAO baholari ham barqaror bo'lib qolgan.

Y **2.19-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

`loan50` ma'lumotlar to'plamidagi kredit miqdorlari taqsimoti o'ngga og'ishgan bo'lib, o'ng quyruqda bir nechta yirik kreditlar "cho'zilib" turibdi. Agar siz odatiy (tipik) kredit hajmini tushunmoqchi bo'lsangiz, ko'proq o'rtacha qiymatga e'tibor qaratasizmi yoki medianagami?[13]

2.1.7 Ma'lumotlarni transformatsiya qilish (maxsus mavzu)

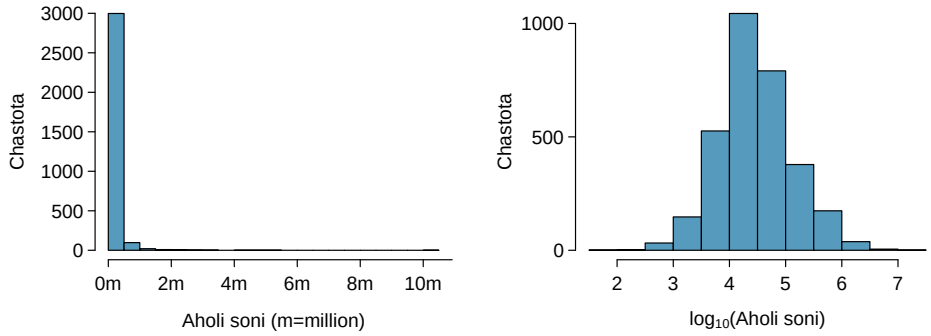
Ma'lumotlar juda kuchli og'ishgan bo'lsa, ba'zan ularni modellashtirishni osonlashtirish uchun transformatsiya qilamiz.

M **2.20-MISOL**

2.13(a)-rasmda ko'rsatilgan okruglar aholisi gistogrammasini ko'rib, undagi kuchli qiyshaygan ekanligini e'tiborga oling. Bu chizmada nimani foydali deb bo'lmaydi?

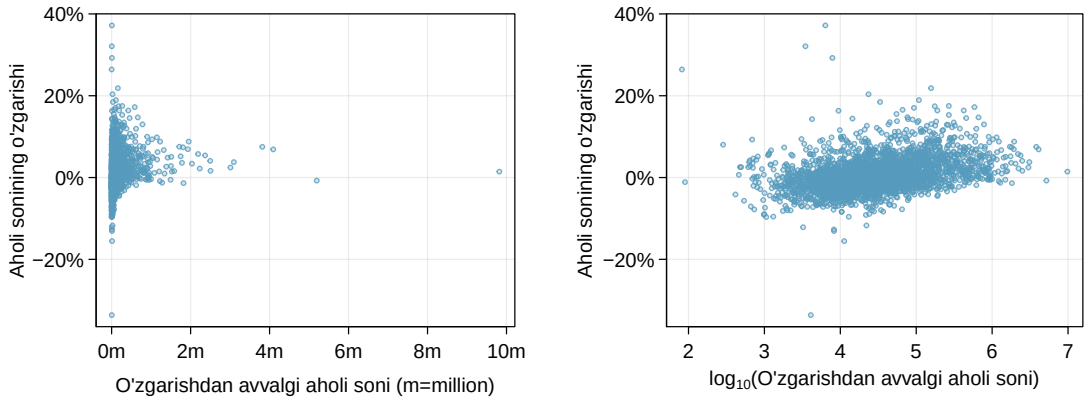
[12](a) O'rtacha qiymat ko'proq ta'sirlanadi. (b) Standart og'ish ko'proq ta'sirlanadi. Batafsil tushuntirishlar. Yo'naltiruvchi mashq 2.17 dan keyingi matnda keltiriladi.

[13]Javoblar turlicha bo'lishi mumkin! Agar biz shunchaki alohida tipik kredit qanday ko'rinishga ega ekanini tushunmoqchi bo'lsak, ehtimol mediana foydaliroqdir. Ammo maqsad yaxshi masshtablanadigan kattalikni, masalan, 1 000 ta kredit taklif qilmoqchi bo'lsak, qancha pul zaxirasiga ehtiyoj borligini tushunish bo'lsa, unda o'rtacha qiymat foydaliroq bo'ladi.



(a) (b)

2.13-rasm. (a) AQShdagi barcha okruglar aholisi uchun gistogramma. (b) Okruglar aholisining $\log_{10}$-transformatsiya qilingan qiymatlari uchun gistogramma. Bu chizmada x qiymati 10 ning darajasiga mos keladi. Masalan, x-o'qidagi "4" $10^4 = 10000$ ga mos keladi.



(a) (b)

2.14-rasm. (a) Aholi sonidagi o'zgarishning o'zgarishdan oldingi aholi soniga qarshi qo'yilgan sochma diagrammasi. (b) Xuddi shu ma'lumotlar uchun, biroq aholi soni log-transformatsiya qilingan holdagi sochma diagrammasi.

Ma'lumotlarning deyarli barchasi eng chapdagi bin ichiga tushib qolgan va kuchli og'ishganlik ma'lumotlardagi potensial qiziqarli tafsilotlarning katta qismini ko'zdan yashiradi.

Kuchli o'ngga og'ishgan, qiymatlarning katta qismi musbat bo'lib, nolga yaqin atrofda to'plangan ma'lumotlar uchun foydali bo'ladigan ba'zi standart transformatsiyalar mavjud. **Ma'lumotlar transformatsiyasi** deganda ma'lumotlarni ma'lum bir funksiya yordamida qayta masshtablash tushuniladi. Masalan, okruglar aholisining logarifmi (asos 10 bo'lgan) bo'yicha chizilgan grafigi 2.13(b)-rasmdagi yangi gistogrammaga olib keladi. Bu ma'lumotlar simmetrik ko'rinishga ega bo'ladi va potentsial chetlashganlar avvalgi ma'lumotlar to'plamiga qaraganda ancha kam darajada chekkada ko'rinadi. Chetlashganlar va kuchli og'ishganlikni "chegaralash" orqali bunday transformatsiyalar ma'lumotlar asosida statistik modellarga mos tushadigan shaklni hosil qilishni ko'pincha osonlashtiradi.

Transformatsiyalarni sochma diagrammadagi bitta yoki ikkita o'zgaruvchiga ham qo'llash mumkin. 2010–2017 yillar orasidagi aholi soni o'zgarishi 2010-yildagi aholi soniga qarshi qo'yilgan sochma diagramma 2.14(a)-rasmda ko'rsatilgan. Birinchi sochma diagrammada aholi soni o'zgaruvchisi juda kuchli og'ishgan bo'lgani sababli qiziqarli naqshlarni ajratib ko'rish qiyin. Biroq, aholi soniga log_{10} transformatsiyasini qo'llasak (2.14(b)-rasmga qarang), o'zgaruvchilar orasida ijobiy bog'lanish yaqqol namoyon bo'ladi. Haqiqatan ham, 8-bobda regressiya chiziqlarini moslashtirish usullarini o'rganganimizda, bu ma'lumotlarga tendensiya chizig'ini moslashtirish bizni qiziqtirishi mumkin.

Logarifmdan boshqa transformatsiyalar ham foydali bo'lishi mumkin. Masalan, kvadrat ildiz

($\sqrt{\text{asl kuzatuvlar}}$) va teskarisi ($\frac{1}{\text{asl kuzatuvlar}}$) ham ma'lumotlar mutaxassislari tomonidan keng qo'llanadi. Ma'lumotlarni transformatsiya qilishdagi umumiy maqsadlar – ma'lumotlar tuzilmasini boshqacha ko'rish, og'ishganlikni kamaytirish, modellashtirishga yordam berish yoki sochma diagrammadagi nochiziqli bog'lanishni "to'g'rilash" (chiziqli ko'rinishga keltirish)dan iborat.

2.1.8 Ma'lumotlarni xaritada tasvirlash (maxsus mavzu)

`county` ma'lumotlar to'plami nuqtali diagrammalar, sochma diagrammalar yoki qutili diagrammalar yordamida chizishimiz mumkin bo'lgan ko'plab sonli o'zgaruvchilarni o'z ichiga oladi, ammo bunday chizmalar ma'lumotlarning haqiqiy tabiatini to'liq aks ettirmaydi. Aksincha, geografik ma'lumotlar bilan ishlaganimizda o'zgaruvchi qiymatlari kichikroq yoki kattaroq ekanini ranglar orqali ko'rsatadigan **intensivlik xaritasi** tuzishimiz kerak. 2.15- va 2.16-rasmlar qashshoqlik darajasi foizlarda (`poverty`), ishsizlik darajasi (`unemployment_rate`), uy-joyga egalik qilish darajasi foizlarda (`homeownership`) va uy xo'jaligi daromadi (`median_hh_income`) uchun intensivlik xaritalarini ko'rsatadi. Rang kaliti qaysi rang qaysi qiymatlarga mos kelishini ko'rsatadi. Intensivlik xaritalari odatda ma'lum bir okrug uchun aniq sonli qiymatlarni olishda unchalik qulay emas, biroq geografik tendensiyalarni ko'rish va qiziqarli tadqiqot savollari yoki gipotezalarini shakllantirishda juda foydalidir.

Ⓜ **2.21-MISOL**

Qashshoqlik va ishsizlik darajasi uchun intensivlik xaritalarida qanday qiziqarli xususiyatlar ko'rinadi?

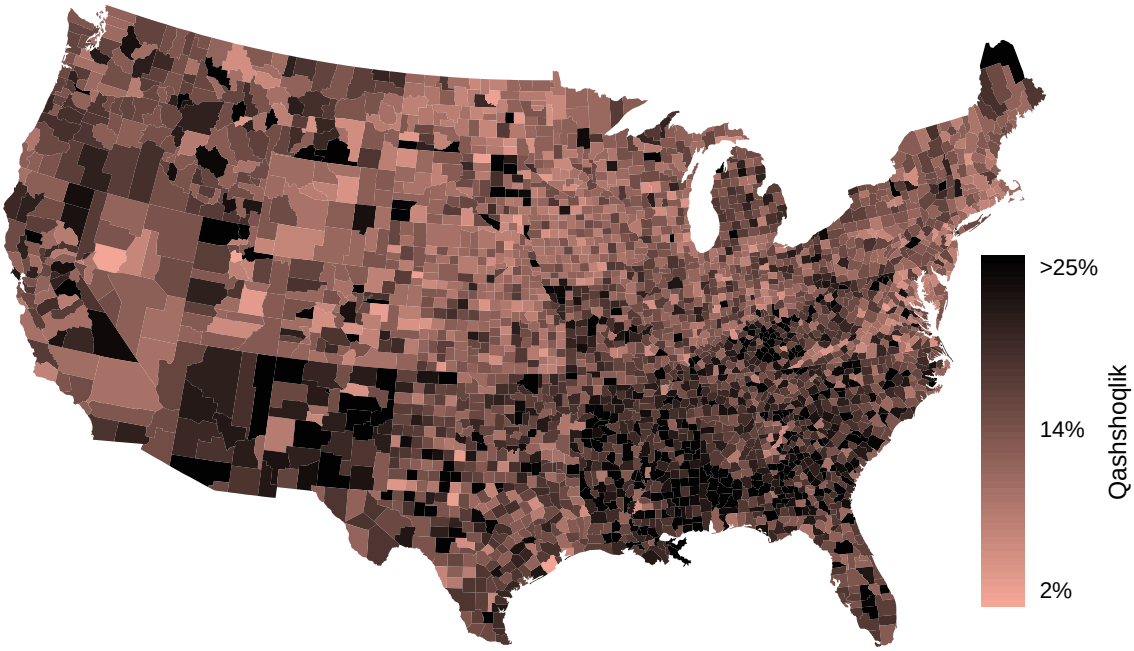
Qashshoqlik darajalari ayrim hududlarda sezilarli darajada yuqoriroq. Xususan, AQShning janubiy shtatlarida qashshoqlik darajasi yuqori, shuningdek, Arizonaning katta qismi va Nyu-MeksKAO shtatida ham yuqori darajalar kuzatiladi. Nyu-Orleandan biroz shimolda joylashgan Missisipi daryosi vodiylarida ham, Kentukki shtatining katta qismida ham yuqori qashshoqlik darajalari ko'rinadi.

Ishsizlik darajasi o'xshash tendensiyalarni ko'rsatadi va biz bu ikki o'zgaruvchi orasidagi muvofiqlikni ko'ra olamiz. Aslida, ishsizlikning yuqori darajalari qashshoqlik darajasi bilan chambarchas bog'liq bo'lishi mantiqan to'g'ri. Ikki xaritani taqqoslaganda ajralib turadigan jihatlardan biri shuki, qashshoqlik darajasi ishsizlik darajasidan ancha yuqori. Bu shuni anglatadiki, ko'plab odamlar ishlayotgan bo'lishiga qaramay, ular qashshoqlikdan chiqib ketish uchun yetarli daromad topa olmayapti.

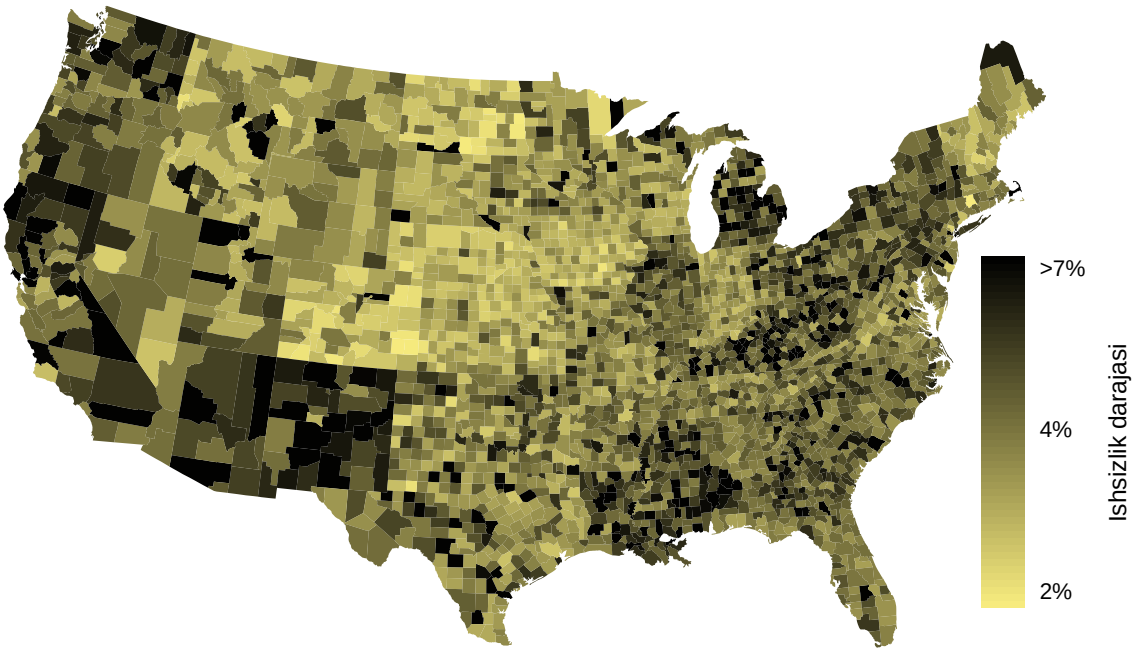
Ⓨ **2.22-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

2.16(b)-rasmdagi uy xo'jaligi daromadi intensivlik xaritasida qanday qiziqarli xususiyatlar ko'rinadi?[14]

[14] Eslatma: javoblar turlicha bo'lishi mumkin. Yuqori daromadlar bilan yirik shaharlik hududlar (uy xo'jaligi daromadi yuqori bo'lgan quyuqroq rangli joylar) o'rtasida ma'lum bir moslik mavjud, garchi bundan istisnolar bo'lsada. Siz yaxshi biladigan yirik shaharlarni topishga va xaritada ularni quyuq nuqtalar sifatida ajratib ko'rishga urinib ko'rishingiz mumkin.

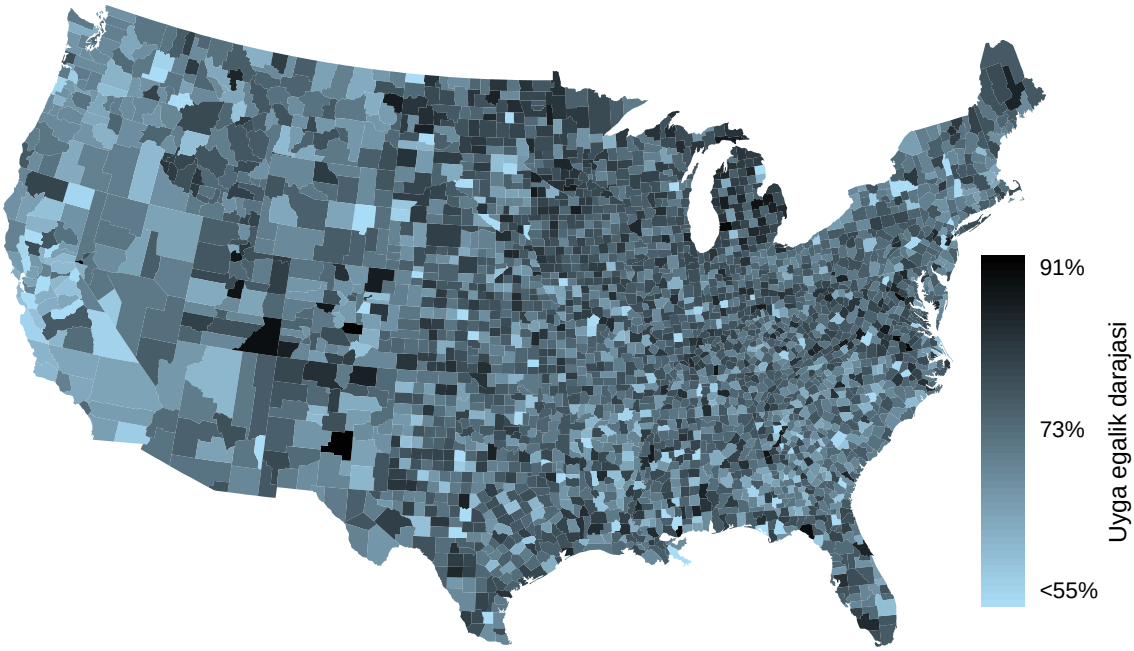


(a)

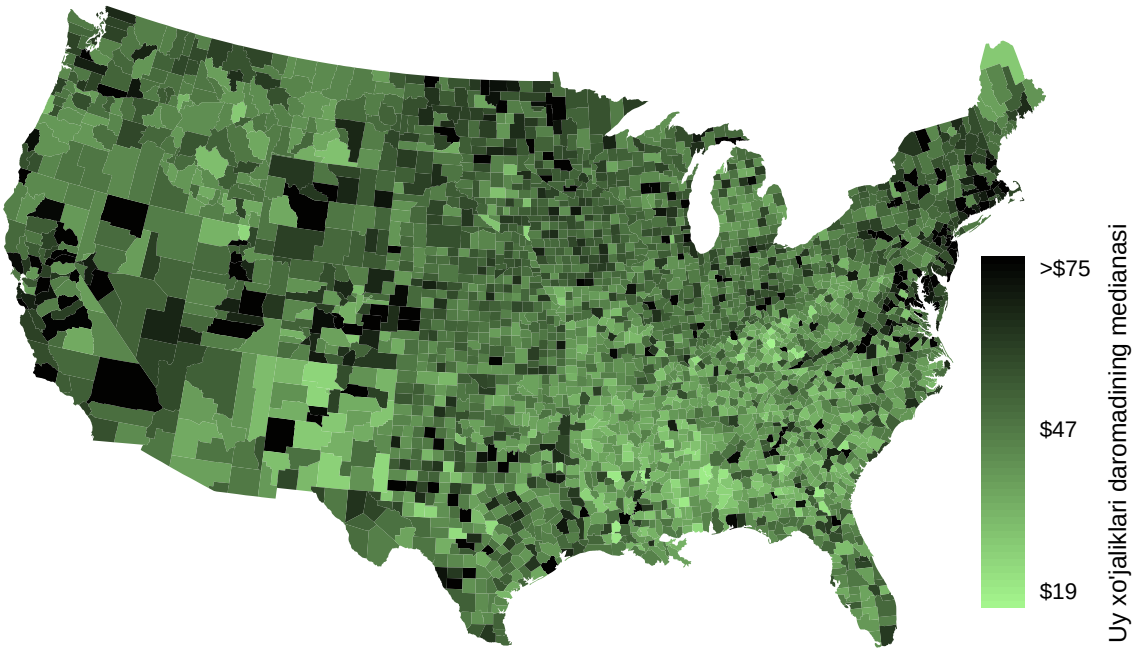


(b)

2.15-rasm. (a) Qashshoqlik darajasi (foiz) intensivlik xaritasi. (b) Ishsizlik darajasi (foiz) xaritasi.



(a)



(b)

2.16-rasm. (a) Uy egaligi darajasi (foiz) intensivlik xaritasi. (b) o'rtacha uy xo'jaligi daromadi (1000 dollar) intensivlik xaritasi.

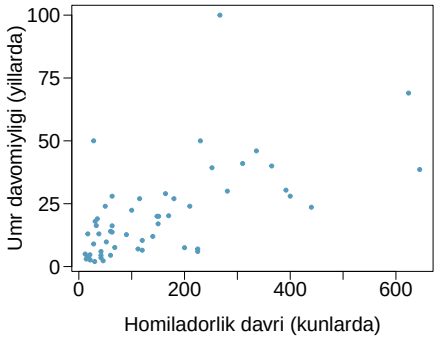
Mashqlar

2.1 Sutemizuvchilar umr davomiyligi. 62 ta sutemizuvchi uchun umr davomiyligi (yillarda) va homiladorlik davomiyligi (kunlarda) bo'yicha ma'lumotlar yig'ilgan. Quyida umr davomiyligining homiladorlik davomiyligiga qarshi sochma diagrammasi keltirilgan.[15]

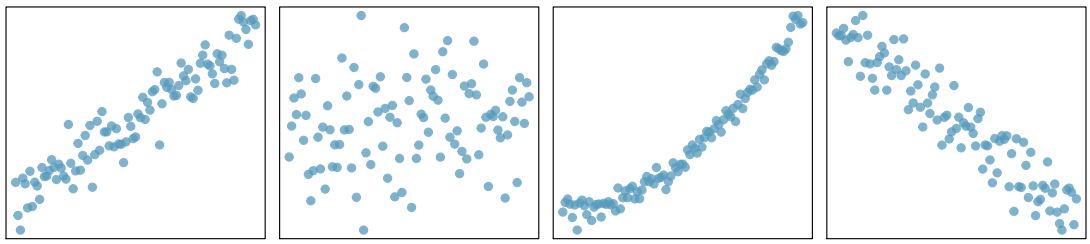
(a) Umr davomiyligi va homiladorlik davomiyligi o'rtasida qanday turdagi bog'lanish kuzatilmoqda?

(b) Agar koordinata o'qlari o'rinlari almashtirilsa, ya'ni homiladorlik davomiyligi umr davomiyligiga qarshi chizilsa, qanday turdagi bog'lanishni kutgan bo'lardingiz?

(c) Umr davomiyligi va homiladorlik davomiyligi o'zaro bog'liqsizmi? Javobingizni tushuntiring.



2.2 Bog'lanishlar. Quyidagi chizmalardan qaysilarida (a) ijobiy bog'lanish, (b) salbiy bog'lanish yoki (c) hech qanday bog'lanish kuzatilmasligini ko'rsating. Shuningdek, ijobiy va salbiy bog'lanishlar chiziqli yoki nochiziqli ekanini aniqlang. Har bir band bir nechta chizmaga taalluqli bo'lishi mumkin.



2.3 Bakteriyalarning ko'payishi. Faraz qiling, Petri kosasida faqat 1 000 000 ta bakterial hujayrani ushlab turishga yetadigan joy va ozuqa mavjud. Siz ushbu Petri kosasiga bir nechta bakterial hujayra joylashtirasiz, ularga erkin ko'payishga imkon berasiz va vaqt davomida kosadagi bakterial hujayralar sonini qayd etasiz. Bakterial hujayralar soni va vaqt o'rtasidagi bog'lanishni tasvirlovchi grafik chizing.

2.4 Ofis unumdorligi. Ofis unumdorligi xodimlar o'z ishiga yoki ish xavfsizligiga umuman stress sezmayotgan paytda nisbatan past bo'ladi. Biroq, stressning yuqori darajalari ham xodimlar unumdorligining pasayishiga olib kelishi mumkin. Stress va unumdorlik o'rtasidagi bog'lanishni tasvirlovchi grafik chizing.

2.5 Parametrlar va statistikalar. Qaysi qiymat tanlanma o'rtachasini, qaysi qiymat esa da'vo qilinayotgan bosh to'plam o'rtachasini ifodalashini aniqlang.

(a) Amerika xonadonlari 2007-yilda Xellouin uchun kostyumlar, bezaklar va shirinliklar kabi mahsulotlarga o'rtacha $52 sarflagan. Bu raqam o'zgargan-o'zgarmaganini aniqlash uchun tadqiqotchilar 2008-yilda sanoat bo'yicha rasmiy ko'rsatkichlar e'lon qilinishidan oldin yangi so'rovnoma o'tkazdilar. So'rovnomaga 1,500 ta xonadon jalb qilindi va Xellouinga o'rtacha sarf-harajat har bir xonadon uchun $58 ni tashkil etishi aniqlandi.

(b) Xususiy universitetda 2001-yilda talabalarning o'rtacha GPA ko'rsatkichi 3,37 bo'lgan. O'sha universitetdan olingan 203 nafar talabadan iborat tanlanma bo'yicha o'tkazilgan so'rovnomada o'rtacha GPA ko'rsatkichi o'n yil o'tgach 3,59 ga teng ekanligi aniqlandi.

2.6 Kollejda uyqu. Yaqinda kollej gazetasida chop etilgan maqolada kollej talabalari har kecha o'rtacha 5,5 soat uxlashi aytib o'tildi. Bu qiymatdan shubhalangan bir talaba tasodifiy ravishda 25 nafar talabani tanlab, so'rov o'tkazishga qaror qildi. Tanlangan talabalarning o'rtacha uyqu vaqti bir kechada 6,25 soatni tashkil etdi. Qaysi qiymat tanlanma o'rtachasini, qaysi qiymat esa da'vo qilinayotgan bosh to'plam o'rtachasini ifodalashini aniqlang.

[15] T. Allison and D.V. Cicchetti. "Sleep in mammals: ecological and constitutional correlates". In: *Arch. Hydrobiol* 75 (1975), p. 442.

2.7 Kon qazib olish korxonasida dam olish kunlari. Muayyan kon qazib olish korxonasida ishchilar o'rtacha 35 kunlik haq to'lanadigan ta'til olishadi. Bu esa milliy o'rtacha ko'rsatkichdan past. Ushbu korxona rahbari mahalliy kasaba uyushmasi bosimi ostida bo'lib, ishchilarga haq to'lanadigan dam olish kunlari sonini oshirishi talab qilinmoqda. Biroq u ishchilarga ko'proq dam olish kuni berishni istamaydi, chunki bu qimmatga tushadi. Buning o'rniga u o'z ishchilarining hisobotlarida ko'rsatiladigan o'rtacha ta'til kunlari sonini oshirish maqsadida 10 nafar xodimni ishdan bo'shatishga qaror qiladi. Bu maqsadga erishish uchun u ta'til kunlari soni eng ko'p bo'lgan xodimlarni, eng kam bo'lgan xodimlarni yoki ta'til kunlari soni o'rtacha qiymatga yaqin bo'lgan xodimlarni ishdan bo'shatishi kerakmi?

2.8 Medianalar va KAOlar. Har bir band uchun (1) va (2) taqsimotlarni medianalari va KAOlari bo'yicha taqqoslang. Bu statistikalarni aniq hisoblab chiqishingiz shart emas. Faqat medianalar va KAOlar qanday taqqoslanishini ayting. Izohingizni ham keltiring.

(a) (1) 3, 5, 6, 7, 9
(2) 3, 5, 6, 7, 20

(b) (1) 3, 5, 6, 7, 9
(2) 3, 5, 7, 8, 9

(c) (1) 1, 2, 3, 4, 5
(2) 6, 7, 8, 9, 10

(d) (1) 0, 10, 50, 60, 100
(2) 0, 100, 500, 600, 1000

2.9 O'rtachalar va standart og'ishlar. Har bir band uchun (1) va (2) taqsimotlarni o'rtacha qiymatlari va standart og'ishlari bo'yicha taqqoslang. Bu statistikalarni aniq hisoblab chiqishingiz shart emas. Faqat o'rtacha qiymatlar va standart og'ishlar qanday taqqoslanishini ayting. Izohingizni ham keltiring. *Maslahat:* taqsimotlarning nuqtali diagrammalarini chizib ko'rish foydali bo'lishi mumkin.

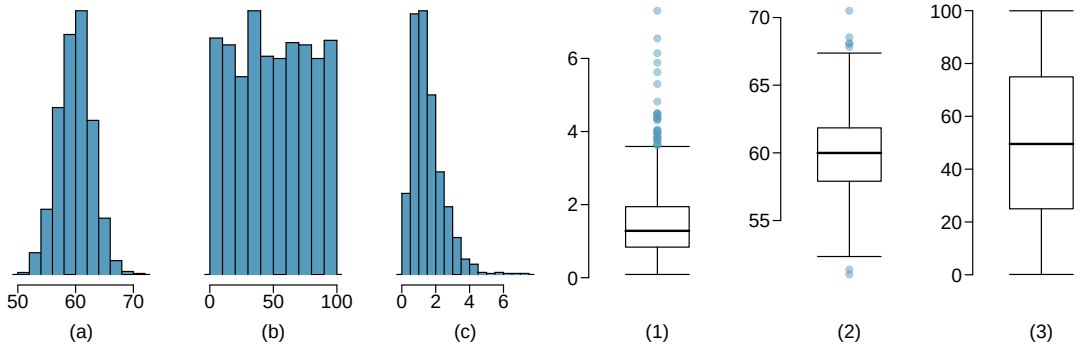
(a) (1) 3, 5, 5, 5, 8, 11, 11, 11, 13
(2) 3, 5, 5, 5, 8, 11, 11, 11, 20

(b) (1) -20, 0, 0, 0, 15, 25, 30, 30
(2) -40, 0, 0, 0, 15, 25, 30, 30

(c) (1) 0, 2, 4, 6, 8, 10
(2) 20, 22, 24, 26, 28, 30

(d) (1) 100, 200, 300, 400, 500
(2) 0, 50, 300, 550, 600

2.10 Moslashtirish. Quyidagi gistogrammalardagi taqsimotlarni tasvirlab bering va ularni qutili diagramma bilan moslang.



2.11 Havo sifati. Kundalik havo sifati atrof-muhitni muhofaza qilish agentligi (EPA) tomonidan hisobot qilinadigan havo sifati indeksi (HSI) yordamida o'lchanadi. Bu indeks ifloslanish darajasini va unga bog'liq bo'lishi mumkin bo'lgan sog'liq uchun xavflarni ko'rsatadi. Indeks "Clean Air Act" tomonidan tartibga solinadigan beshta asosiy havo ifloslantiruvchi modda bo'yicha hisoblanadi va 0 dan 300 gacha qiymatlar qabul qiladi. Bu yerda katta qiymat pastroq havo sifatini anglatadi. 2011-yilda Shimoliy Karolinaning Durham shahrida HSI 91 kunlik tanlanma uchun qayd etilgan. Quyidagi nisbiy chastota gistogrammasi ushbu kunlardagi HSI qiymatlari taqsimotini ko'rsatadi.[16]

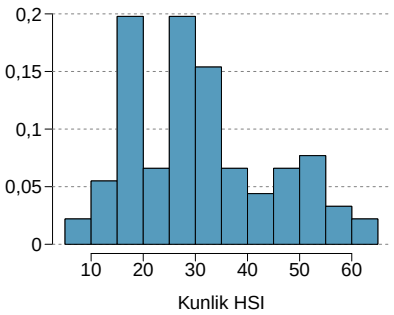
[16] US Environmental Protection Agency, AirData, 2011.

(a) Ushbu tanlanma uchun HSI medianasi qiymatini taxmin qiling.

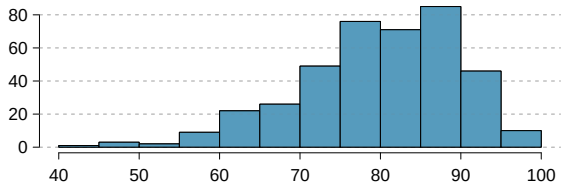
(b) Ushbu tanlanma uchun HSI o'rtacha qiymati medianadan yuqoriroq yoki pastroqligini kutgan bo'lamidingiz? Izoh bering.

(c) Taqsimot uchun Q_1, Q_3 va KAO qiymatlarini taxmin qiling.

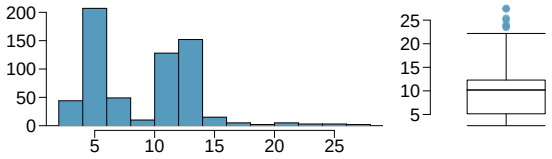
(d) Ushbu tanlanmadagi kunlarning birortasi HSI bo'yicha g'ayrioddiy past yoki yuqori deb hisoblanadimi? Izoh bering.



2.12 Mediana va o'rtacha. Quyidagi gistogrammada ko'rsatilgan 400 ta kuzatuv uchun medianani taxmin qiling va o'rtacha qiymat medianadan yuqoriroq yoki pastroq bo'lishini kutayotganingizni ayting.



2.13 Gistogrammalar va qutili diagrammalar. Quyidagi ikki chizmada taqqoslash qiling. Taqsimotning qaysi xususiyatlari gistogrammada yaqqol ko'rinadi-yu, ammo qutili diagrammada ko'rinmaydi? Qaysi xususiyatlari esa qutili diagrammada yaqqol ko'rinadi, lekin gistogrammadan aniq ko'rinmaydi?



2.14 Facebook do'stlari. Facebook ma'lumotlariga ko'ra, Facebook foydalanuvchilarining 50% ida kamida 100 ta do'st bor va foydalanuvchilar uchun o'rtacha do'stlar soni 190 ni tashkil qiladi. Bu natijalar Facebook foydalanuvchilarining do'stlar soni taqsimotining shakli haqida nimani ko'rsatadi?[17]

2.15 Taqsimotlar va mos statistikalar, 1-qism. Quyidagi holatlarning har biri uchun taqsimotni simmetrik, o'ngga og'ishgan yoki chapga og'ishgan bo'lishini kutishingizni ayting. Shuningdek, ma'lumotlardagi tipik kuzatuvni tasvirlash uchun o'rtacha qiymat yoki mediana ko'proq mos kelishini, hamda kuzatuvlar tarqoqligini tavsiflash uchun standart og'ish yoki KAO yaxshiroq bo'lishini ko'rsating. Izohingizni tushuntirib bering.

(a) Har bir xonadondagi uy hayvonlari soni.

(b) Ishgacha masofa, ya'ni ish va uy o'rtasidagi masofa (chaqirimlarda).

(c) Kattalar (erkaklar) bo'yi.

2.16 Taqsimotlar va mos statistikalar, 2-qism. Quyidagi holatlarning har biri uchun taqsimotni simmetrik, o'ngga og'ishgan yoki chapga og'ishgan bo'lishini kutishingizni ayting. Shuningdek, ma'lumotlardagi tipik kuzatuvni tasvirlash uchun o'rtacha qiymat yoki mediana ko'proq mos kelishini hamda kuzatuvlar tarqoqligini tavsiflash uchun standart og'ish yoki KAO yaxshiroq bo'lishini ko'rsating. Izohingizni tushuntirib bering.

(a) Uy narxlari bir mamlakatda, bu yerda uylardan 25% i $350000 dan arzon, 50% i $450000 dan arzon, 75% i $1000000 dan arzon va $6000000 dan qimmat bo'lgan uylar ham sezilarli miqdorda mavjud.

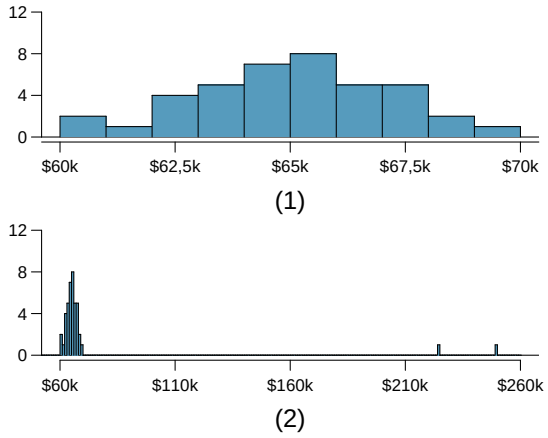
(b) Uy narxlari bir mamlakatda, bu yerda uylardan 25% i $300000 dan arzon, 50% i $600000 dan arzon, 75% i $900000 dan arzon va $1200000 dan qimmat uylar juda kam.

(c) Muayyan hafta davomida kollej talabalarining ichgan alkogolli ichimliklari soni. Talabalarning aksariyati 21 yoshdan kichik bo'lgani uchun, ularning ko'pchiligi umuman ichmasligi, faqat oz qismi haddan tashqari ko'p ichishi taxmin qilinsin.

(d) Yirik Fortune 500 kompaniyasi xodimlarining yillik ish haqlari, bu yerda faqat bir nechta yuqori lavozimdagi rahbarlar qolgan xodimlarga qaraganda ancha yuqori maosh oladi.

[17] Lars Backstrom. "Anatomy of Facebook". In: *Facebook Data Team's Notes* (2011).

2.17 Oshxonadagi daromadlar. Quyidagi birinchi gistogramma kollej oshxonasiga tashrif buyurgan 40 nafar mijozning yillik daromadlari taqsimotini ko'rsatadi. Faraz qilaylik, oshxonaga yana ikki kishi kirib keldi. Ulardan biri \$225000, ikkinchisi esa \$250000 maosh oladi. Ikkinchi gistogramma yangi daromadlar taqsimotini ko'rsatadi. Umumiy statistik ma'lumotlar ham jadvalda keltirilgan.



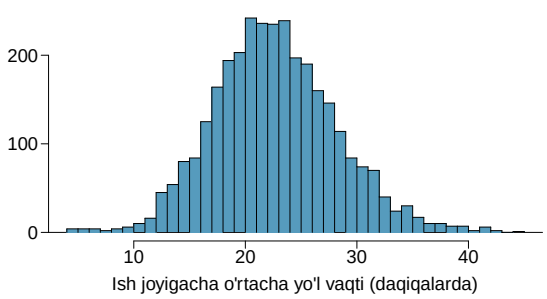
	(1)	(2)
n	40	42
Min.	60680	60680
1-Kv.	63620	63710
Mediana	65240	65350
O'rtacha	65090	73300
3-Kv.	66160	66540
Maks.	69890	250000
S.chet.	2122	37321

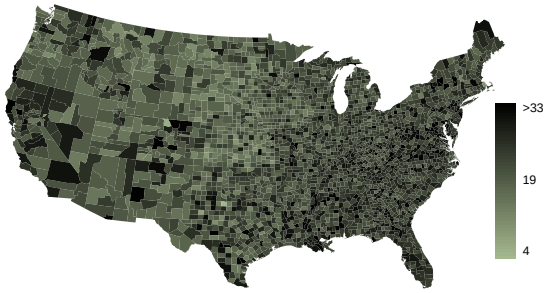
(a) Ushbu oshxonadagi 42 nafar mijoz uchun tipik daromadni ifodalashda o'rtacha qiymat yoki mediana yaxshiroq mos keladi? Bu ikki o'lchovning barqarorligiga doir qanday xulosa qilish mumkin?

(b) Ushbu oshxonadagi 42 nafar mijoz daromadlari tarqoqligini tavsiflash uchun standart og'ish yoki KAO yaxshiroq mos keladi? Bu ikki o'lchovning barqarorligiga doir qanday xulosa qilish mumkin?

2.18 O'rtacha oraliq. Taqsimotning *o'rtacha oraliq* ko'rsatkichi shu taqsimotdagi maksimal va minimal qiymatlarning o'rtacha qiymati sifatida aniqlanadi. Bu statistika chekka qiymatlar va kuchli og'ishganlikka nisbatan barqarormi? Izohingizni tushuntiring.

2.19 Ishgacha qatnov vaqtlari. AQSh aholini ro'yxatga olish boshqarmasi ko'plab boshqa o'zgaruvchilar qatorida amerikaliklarning ishgacha qatnovga sarflaydigan vaqtini ham yig'adi. Quyidagi gistogrammada 2010-yilda AQShning 3142 ta okrugida ishgacha o'rtacha qatnov vaqtlari taqsimoti ko'rsatilgan. Quyida xuddi shu ma'lumotlar uchun taqsimlanish xaritasi ham berilgan.

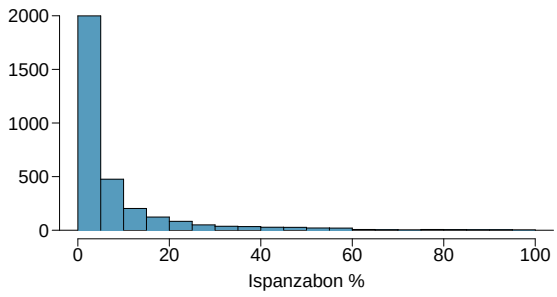


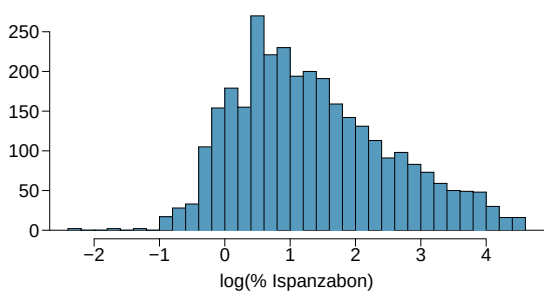


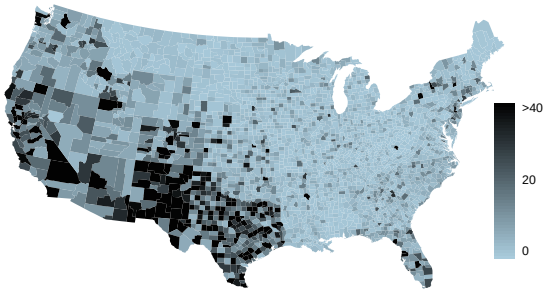
(a) Sonli taqsimotni tasvirlab bering va bu ma'lumotlar uchun log-transformatsiya qo'llash maqsadga muvofiq bo'ladimi yoki yo'qligini izohlang.

(b) Quyidagi xaritadan foydalanib, ishgacha qatnov vaqtlari taqsimoti xaritasini tasvirlab bering.

2.20 Ispan aholisi ulushi. AQSh aholini ro'yxatga olish boshqarmasi ko'plab boshqa o'zgaruvchilar qatorida amerikaliklarning irqi va etnik mansubligi bo'yicha ham ma'lumotlar yig'adi. Quyidagi gistogrammada 2010-yilda AQShning 3142 ta okrugida aholining ispanzabon (Hispanic) qismiga to'g'ri keladigan foizlar taqsimoti ko'rsatilgan. Shuningdek, shu qiymatlarning loglari uchun gistogramma ham berilgan.







(a) Sonli taqsimotni tasvirlab bering va bu ma'lumotlarni tahlil qilish yoki modellashtirishda nega log-transformatsiya qilingan qiymatlardan foydalanishimiz mumkinligini izohlang.

(b) AQSh okruglarida ispanzabonlar ulushi taqsimotining qaysi xususiyatlari xaritada yaqqol ko'rinadi-yu ammo gistogrammada ko'rinmaydi? Qaysi xususiyatlari esa gistogrammada yaqqol ko'rinadi lekin xaritada aniq ko'rinmaydi?

(c) Qaysi vizualizatsiya – xarita yoki gistogramma – ko'proq maqsadga muvofiq yoki foydaliroq deb o'ylaysiz? Izohingizni tushuntiring.

2.2 Toifali ma'lumotlarni ko'rib chiqish

Ushbu bo'limda biz kitob davomida foydalaniladigan toifali ma'lumotlar uchun jadvallar va boshqa asosiy vositalarni keltiramiz. `loan50` ma'lumotlar to'plami `loans` deb nomlangan kattaroq kredit ma'lumotlar to'plamidan olingan tanlanmani ifodalaydi. Bu kattaroq ma'lumotlar to'plamida "Lending Club" orqali berilgan 10000 ta kredit haqidagi ma'lumotlar hisoblanadi. Biz `loans` ma'lumotlarida ijara (`rent`), ipoteka uyga egalik (`mortgage`) yoki uyga to'liq egalik (`own`) qiymatlarini qabul qilishi mumkin bo'lgan uyga egalik (`homeownership`) o'zgaruvchisi bilan kredit arizasi hamkor bilan birgalikda berilgan yoki yakka tartibdagi ariza ekanini ko'rsatuvchi ariza turi (`app_type`, yakka yoki qo'shma) o'zgaruvchisi o'rtasidagi munosabatni o'rganamiz.

2.2.1 Kontingensiya jadvallari va ustunli diagrammalar

2.17-rasmda ariza turi (`app_type`) va uyga egalik (`homeownership`) o'zgaruvchilari jamlangan. Ikkita toifali o'zgaruvchiga oid ma'lumotlarni mana shunday tarzda jamlaydigan jadval **kontingensiya jadvali** deb ataladi. Jadvaldagi har bir qiymat o'zgaruvchilar natijalarining muayyan birikmasi necha marta kuzatilganini bildiradi. Masalan, 3496 qiymati ijarada yashovchi qarz oluvchi va ariza turi yakka tartibdagi bo'lgan kreditlar soniga mos keladi. Jadvalga satr va ustun bo'yicha jami qiymatlar ham kiritilgan. **Satr bo'yicha jami** har bir satr bo'yicha jami sonlarni beradi (masalan, 3496+3839+1170 = 8505), **ustun bo'yicha jami** esa har bir ustun bo'yicha jami sonlarni ifodalaydi. Biz, shuningdek, har bir toifa birikmasi uchun faqat umumiy foizlar yoki ulushlarni ko'rsatadigan jadval tuzishimiz mumkin yoki bitta o'zgaruvchi uchun ham jadval tuzishimiz mumkin. Masalan, `uyga egalik` o'zgaruvchisi uchun 2.18-rasmda ko'rsatilganidek.

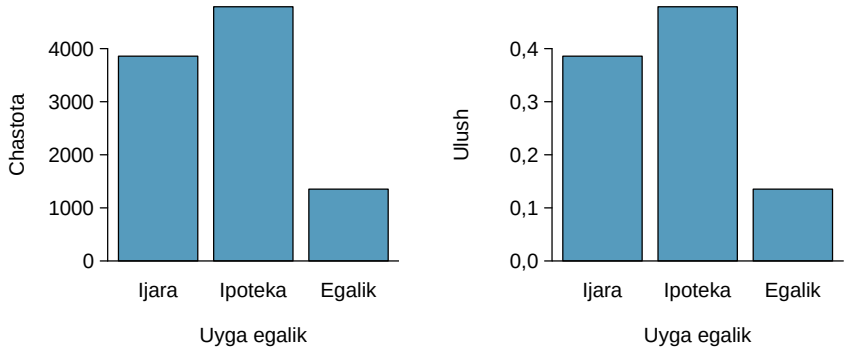
		`uyga egalik`			
		Ijara	Ipoteka	Egalik	Jami
`Ariza turi`	Yakka	3496	3839	1170	8505
	Qo'shma	362	950	183	1495
	Jami	3858	4789	1353	10000

2.17-rasm. Ariza turi va uyga egalik o'zgaruvchilarining kontingensiya jadvali.

Ustun diagramma bitta toifali o'zgaruvchini ko'rsatishning umumiy usuli hisoblanadi. 2.19-rasmning chap panelida `uyga egalik` o'zgaruvchisi uchun **ustunli diagramma** ko'rsatilgan. O'ng panelida chastotalar nisbatlarga aylantirilgan, ya'ni har bir guruhdagi kuzatishlarning umumiy kuzatishlarga nisbati ko'rsatiladi (masalan: 3858/10000 = 0,3858 `ijara` uchun).

uyga egalik	Soni
Ijara	3858
Ipoteka	4789
Egalik	1353
Jami	10000

2.18-rasm. `uyga egalik` o'zgaruvchisi uchun har bir qiymatning chastotalarini umumlashtiruvchi jadval.



2.19-rasm. `uyga egalik` o'zgaruvchisi uchun ikkita ustunli diagramma. Chap panelda chastotalar, o'ng panelda esa har bir guruhning umumiy kuzatishlarga nisbati ko'rsatilgan.

2.2.2 Satr va ustun ulushlari

Ba'zan bitta o'zgaruvchining ikkinchisiga nisbatan ulushlar bo'yicha qanday taqsimlanganini tushunish foydali bo'ladi va bunday ko'rinishni olish uchun kontingensiya jadvalimizni moslashtirishimiz mumkin. 2.20-rasmda 2.17-rasm uchun **satr ulushi** ko'rsatilgan bo'lib, ular har bir satrdagi sonlarni shu satrning jami soniga bo'lish orqali hisoblangan. `yakka` va `ijara` kesishgan joydagi 3496 qiymati $3496/8505 = 0{,}411$ bilan almashtirilgan, ya'ni 3496 qiymat satrning jami soni 8505 ga bo'lingan. Unda 0,411 nimani bildiradi? U kreditga individual tarzda ariza bergan qarz oluvchilarning qay darajasi ijarada yashashini, ya'ni ularning ulushini ifodalaydi.

	Ijara	Ipoteka	Egalik	Jami
Yakka	0,411	0,451	0,138	1,000
Qo'shma	0,242	0,635	0,122	1,000
Jami	0,386	0,479	0,135	1,000

2.20-rasm. `ariza turi` va `uyga egalik` o'zgaruvchilari uchun satr proporsiyalariga ega kontingensiya jadvalidir. `qo'shma` satri uchun satr jami yaxlitlash xatosi sababli 0,001 ga farq qiladi.

Ustun ulushlariga ega kontingensiya jadvali ham xuddi shunga o'xshash tarzda hisoblanadi. Bunda har bir **ustun ulushi** ustundagi sonni shu ustunning jami soniga bo'lish orqali olinadi. 2.21-rasmda shunday jadval ko'rsatilgan bo'lib, undagi 0,906 qiymati ijarada yashovchilarning 90,6% qismi kredit uchun yakka tartibda ariza berganini bildiradi. Bu ulush ipotekali uy egalari (80,2%) yoki uyiga to'liq egalik qiluvchilar (85,1%) qarzlariga qaraganda yuqoriroqdir. Bu ulushlar `uyga egalik` o'zgaruvchisining uch darajasi (`ijara`, `ipoteka`, `egalik`) bo'yicha farq qilgani uchun bu `ariza turi` va `uyga egalik` o'zgaruvchilari o'zaro bog'liq ekaniga dalil bo'lib xizmat qiladi.

Biz 2.20-rasmda `ariza turi` va `uyga egalik` o'rtasidagi bog'liqlikni satr nisbatlarini ishlatib ham tekshirishimiz mumkin edi. Ushbu satr nisbatlarini taqqoslaganda, biz ustunlarni pastga qarab ko'rib chiqamiz va qarz oluvchi ijara uyida yashaydimi, ipotekaga egami yoki uyning to'liq egaligimi va bular `yakka` yoki `qo'shma` ariza turlari bo'yicha farqlanishi tekshiriladi.

	Ijara	Ipoteka	Egalik	Jami
Yakka	0,906	0,802	0,865	0,851
Qo'shma	0,094	0,198	0,135	0,150
Jami	1,000	1,000	1,000	1,000

2.21-rasm. `ariza turi` va `uyga egalik` o'zgaruvchilari uchun ustun nisbatlari bilan kontingensiya jadvali. Oxirgi ustun jami qiymati yaxlitlash xatosi tufayli 0,001 ga farq qiladi.

Y **2.23-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

(a) 2.20-rasmda 0,451 nima ifodalaydi?
(b) 2.21-rasmda 0,802 nima ifodalaydi?[18]

Y **2.24-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

(a) 2.20-rasmda `qo'shma` va `egalik` kesishmasidagi 0,122 nimani ifodalaydi?
(b) 2.21-rasmda 0,135 nima ifodalaydi?[19]

M **2.25-MISOL**

Ma'lumotlar bo'yicha mutaxassislar (inglizcha: data scientists) kiruvchi elektron xabarlar ichidan spamlarni ajratib olish uchun statistikadan foydalanadilar. Elektron xabarning ayrim xususiyatlariga e'tibor qaratib, ba'zi xabarlarni yuqori aniqlik bilan spam yoki spam emas (oddiy xabar) deb tasniflay olishi mumkin. Bunday xususiyatlardan biri – xabarda umuman sonlar yo'qligi, kichik sonlar yoki katta sonlar mavjudligi. Yana bir xususiyat – xabar formati bo'lib, u xabarda HTML tarkib (masalan, qalin yozuv) bormi yoki yo'qligini ko'rsatadi. Biz `email` ma'lumotlar to'plamidan foydalanib, xabar formati va spam maqomiga e'tibor qaratamiz va bu o'zgaruvchilar 2.22-rasmda kontingensiya jadvali ko'rinishida jamlangan. Ushbu jadval bo'yicha xabarni spam yoki oddiy xabar sifatida tasniflashni istagan kishi uchun qaysi biri foydaliroq bo'ladi: satr proporsiyalari yoki ustun proporsiyalari?

Ma'lumotlar bo'yicha mutaxassis har bir xabar formati ichida spam ulushi qanday o'zgarishini bilishga qiziqadi. Bu esa ustun proporsiyalariga mos keladi. Oddiy matn ko'rinishidagi xabarlardagi spam ulushi va HTML ko'rinishidagi xabarlardagi spam ulushi.

Agar ustun ulushlarini hisoblasak, oddiy matn ko'rinishidagi xabarlarda spam ulushi HTML xabarlarga qaraganda yuqoriroq ekanini ko'ramiz ($209/1195 = 17{,}5\%$), HTML xabarlarda esa bu ko'rsatkich atigi $158/2726 = 5{,}8\%$ ni tashkil qiladi. Bu ma'lumotning o'zi xabarni spam yoki spam emas deb ishonchli tasniflash uchun yetarli emas, chunki oddiy matn ko'rinishidagi xabarlarning 80% dan ortig'i spam emas. Shunga qaramay, ushbu ma'lumotni boshqa ko'plab xususiyatlarini ehtiyotkorlik bilan birlashtirgan holda, ba'zi xabarlarni spam yoki spam emas deb ishonch bilan tasniflash imkoniyatimiz ancha ortadi.

	Matn	HTML	Jami
Spam	209	158	367
Spam emas	986	2568	3554
Jami	1195	2726	3921

2.22-rasm. `spam` va `format` uchun kontingensiya jadvali.

2.25-misol. Satr va ustun nisbatlarining teng emasligini ko'rsatadi. Jadval uchun bir shaklni tanlashdan oldin, ularning har birini ko'rib chiqish muhimdir, shunda eng foydali jadval qurilishi ta'minlanadi. Biroq, ba'zan qaysi biri yoki ikkalasi ham foydaliroq ekanligini aniqlash qiyin bo'lishi mumkin.

M **2.26-MISOL**

2.20- va 2.21-jadvallarga qayta qarang. Biror bir holatda qaysi biri foydaliroq ekanligini aytish

[18](a) 0,451 ipotekaga ega bo'lgan va yakka tartibda ariza beruvchilar ulushini bildiradi. (b) 0,802 ipotekaga ega bo'lgan ariza beruvchilarning yakka tartibda murojaat qilgan qismini ifodalaydi.
[19](a) 0,122 uy egaligi bo'lgan qo'shma qarz oluvchilarning ulushini bildiradi. (b) 0,135 uy egaligi bo'lgan va qo'shma ariza bergan qarz oluvchilarning qismini ifodalaydi.

mumkinmi?

Bizga ochiq-oydin holatlar ko'rinmadi! Ushbu `ariza turi` va `uyga egalik` o'zgaruvchilari bilan elektron pochta misolining o'ziga xos jihati shundaki, bu ikki o'zgaruvchini biz gipoteza qilishimiz mumkin bo'lgan aniq tushuntiruvchi javob o'zgaruvchisi munosabati yo'q (bu terminlar haqida 1.2.4-bo'limiga qarang). Odatda tushuntiruvchi o'zgaruvchiga "shartlashish" eng foydali hisoblanadi. Masalan, elektron pochta misolida, elektron pochta formati xabar spam ekanligining mumkin bo'lgan tushuntiruvchi o'zgaruvchisi sifatida ko'rilgan, shuning uchun har bir elektron pochta formati uchun nisbiy chastotalarni hisoblash qiziqarliroq bo'lardi.

2.2.3 Ikki o'zgaruvchi bilan ustun diagrammadan foydalanish

Satr yoki ustun ulushlarini ishlatgan holda tuzilgan kontingensiya jadvallari ikki toifali o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganishda ayniqsa foydalidir. Qatlamlangan ustun diagrammalari ushbu jadvallardagi ma'lumotlarni vizualizatsiya qilishning qulay usulini taqdim etadi.

Qatlamlangan ustunli diagramma kontingensiya jadvali ma'lumotlarini grafik ko'rinishda ifodalaydi. Masalan, 2.21-rasmni ifodalovchi qatlamlangan ustun diagramma 2.23(a)-rasmda ko'rsatilgan bo'lib, undan avval uy-joyga egalik o'zgaruvchisi yordamida ustun diagramma yaratilib, so'ngra har bir guruh ariza turi bo'yicha bo'lingan.

Qatlamlangan ustunli diagrammaga tegishli yana bir vizualizatsiya **yonma-yon ustunlar diagrammasi** bo'lib, uning misoli 2.23(b)-rasmda keltirilgan.

Oxirgi turdagi ustunli diagrammada ariza turi va uy-joyga egalik kontingensiya jadvallari uchun ustun ulushlari standartlashtirilgan qatlamlangan ustun diagrammaga aylantirildi (2.23(c)-rasm). Ushbu turdagi vizualizatsiya har bir uy-joyga egalik darajasidagi qarz oluvchilar uchun yakka yoki qo'shma berilgan kredit arizalarining ulushini tushunishda foydalidir. Bundan tashqari, qo'shma va yakka arizalarning ulushlari guruhlar bo'ylab o'zgarib turgani sababli, ushbu ikki o'zgaruvchi o'rtasida bog'liqlik mavjud deb xulosa qilishimiz mumkin.

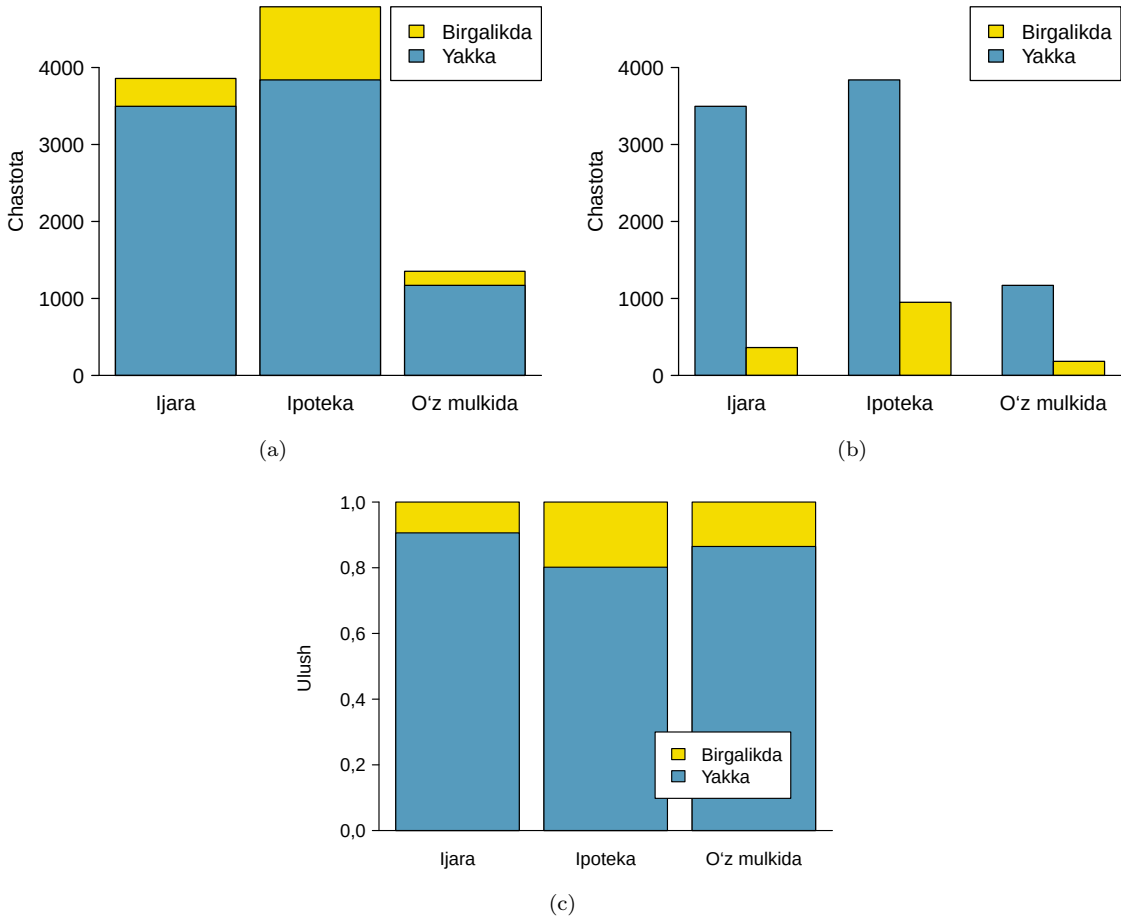
Ⓜ **2.27-MISOL**

2.23-rasmidagi uchta ustun diagrammani o'rganing. Qachon qatlamlangan, yonga-yon yoki standartlashtirilgan qatlamlangan ustunli diagramma eng foydali?

Qatlamlangan ustunli diagramma bir o'zgaruvchini tushuntiruvchi, ikkinchisini javob o'zgaruvchisi sifatida belgilash o'rinli bo'lganda eng foydali hisoblanadi, chunki biz avval bir o'zgaruvchi bo'yicha guruhlab, keyin boshqasi bilan bo'lamiz.

Yonga-yon ustun diagrammalari ko'proq neytral ko'rsatishga ega bo'lib, qaysi o'zgaruvchi tushuntiruvchi yoki javob bo'lishi mumkinligini aniqlamaydi. Shuningdek, oltita guruh kombinatsiyasidagi holatlarning sonini aniq ajratish oson. Biroq, bu turdagi diagramma ko'proq gorizontal joy talab qiladi; masalan, 2.23(b)-rasmidagi tor joy diagrammani biroz siqilgan ko'rinishga olib keladi. Bundan tashqari, ikkita guruhning o'lchamlari juda farq qilganda, masalan, `own` guruhi boshqa ikki guruhga nisbatan ancha kichik bo'lsa, o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'liqlikni aniqlash qiyin bo'ladi.

Standartlashtirilgan qatlamlangan ustunli diagramma agar asosiy o'zgaruvchi tengsiz bo'lsa, masalan, `own` guruhi `mortgage` guruhiga nisbatan uchdan bir qismiga teng bo'lsa, asosiy diagrammadan ko'ra ko'proq foydali bo'ladi. Biroq, bu turdagi diagrammaning asosiy kamchiligi shundaki, unda har bir ustun qancha holatni ifodalayotganini tushunish qiyinlashadi.



2.23-rasm. (a) uy-joyga egalik uchun qatlamlangan ustunli diagramma, ariza turi bo'yicha bo'linmalari bilan. (b) uy-joyga egalik va ariza turi uchun yonga-yon ustunli diagramma. (c) Standartlashtirilgan qatlamlangan ustunli diagramma.

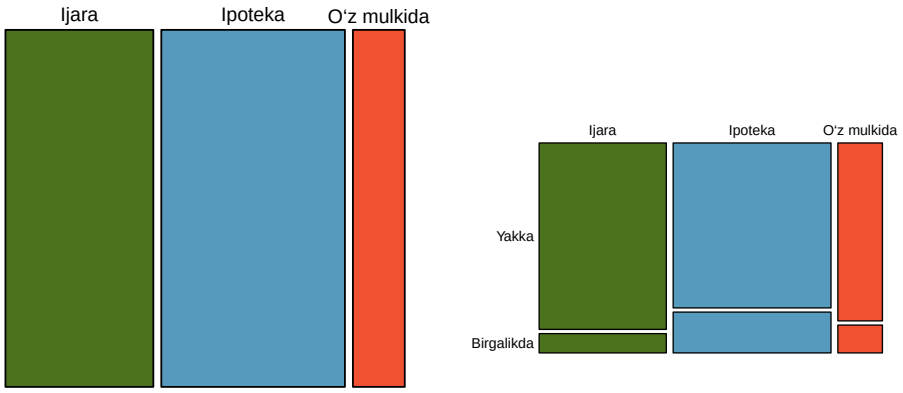
2.2.4 Mozaik diagrammalar

Mozaik diagramma kontingensiya jadvallarini tasvirlash uchun mos keladigan vizualizatsiya texnikasi bo'lib, u standartlashtirilgan qatlamlangan ustunli diagrammaga o'xshaydi. Biroq, asosiy o'zgaruvchining nisbiy guruh hajmlarini ham ko'rish imkoniyatini taqdim etadi.

Birinchi mozaik diagrammamizni yaratishni boshlash uchun biz kvadratni uy-joyga egalik o'zgaruvchisining har bir kategoriyasi uchun ustunlarga bo'lamiz. Natija 2.24(a)-rasmda ko'rsatilgan. Har bir ustun uy-joyga egalik o'zgaruvchisining bir darajasini ifodalaydi va ustun kengliklari ushbu kategoriyalardagi kreditlarning ulushiga mos keladi.

Masalan, qarz oluvchi uy egasi bo'lgan holatlarga qaraganda, ipoteka bilan bog'liq holatlar bo'yicha ko'proq kreditlar mavjud. Umuman olganda, mozaik diagrammalar har bir kategoriyadagi holatlarning sonini tasvirlash uchun quti *maydonlari*dan foydalanadi.

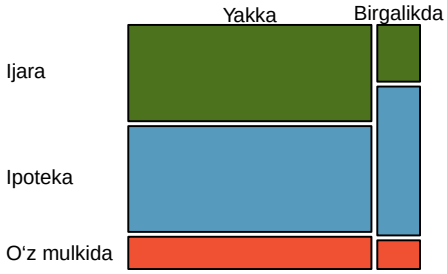
To'liq mozaika chizig'ini yaratish uchun yakka o'zgaruvchi mozaika chizig'i ariza turi o'zgaruvchisi yordamida 2.24(b)-rasmda qo'shimcha qismlarga bo'lingan. Har bir ustun yakka va qo'shma qarz oluvchilarning qarzlar soniga mutanosib ravishda bo'linadi. Masalan, ikkinchi ustun ipotekaga ega bo'lgan qarz oluvchilarning qarzlarini ifodalaydi va u yakka qarzlar (yuqori) va qo'shma qarzlar (pastki) bo'limlariga bo'lingan. Yana bir misol sifatida, uchinchi ustunning pastki segmenti uy egasi bo'lgan va birgalikda murojaat qilgan qarz oluvchilarning qarzlarini ifodalaydi, yuqori segment esa uy egasi bo'lgan va yakka tartibda murojaat qilgan qarz oluvchilarni ifodalaydi. Ushbu chizmadan foydalanib, uy-joyga egalik va ariza turi o'zgaruvchilari o'zaro bog'liq ekanligini ko'rishimiz mumkin, chunki ba'zi ustunlar boshqalarga qaraganda turli vertikal joylarda bo'linadi. Bu standartlangan qatlamli ustunli diagrammada tekshirishda foydalanilgan uslub bilan bir xil.



(a) (b)

2.24-rasm. (a) uy-joyga egalik uchun bir o'zgaruvchili mozaik diagramma. (b) uy-joyga egalik va ariza turi uchun ikki o'zgaruvchili mozaik diagramma.

2.24-rasmda birinchi bo'lib qarz oluvchining uy egasi holatini bo'lishni tanladik. Biroq, buning o'rniga avval murojaat turini bo'lishimiz mumkin edi, xuddi 2.25-rasmda bo'lgani kabi. Ustun diagrammalarida bo'lgani kabi, mozaika diagrammasida ham izohlovchi o'zgaruvchidan birinchi bo'linmani ifodalash uchun foydalanish odatiy holatdir, keyin esa javob har bir izohlovchi o'zgaruvchi darajasini bo'lish uchun ishlatiladi, agar ushbu belgilar ushbu o'zgaruvchilarga mos ravishda qo'llanishi mantiqiy bo'lsa.



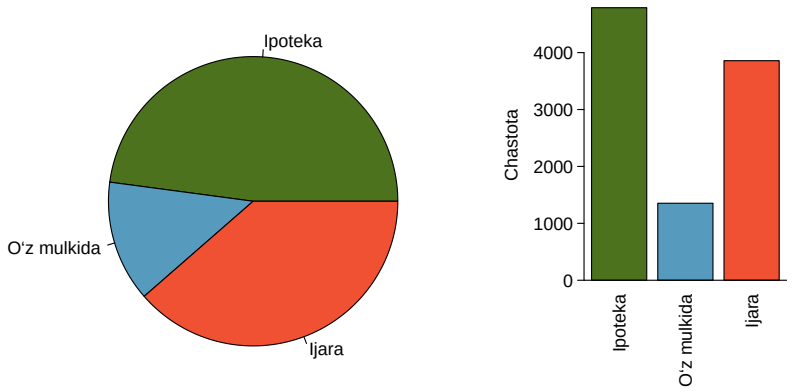
2.25-rasm. Mozaika diagrammasi, unda qarzlar dastlab `homeownership` o'zgaruvchisi bo'yicha `individual` va `joint` murojaat turlariga bo'lingandan so'ng guruhlangan.

2.2.5 Ushbu kitobda ko'radigan yagona doira diagrammasi

Doira diagrammasi 2.26-rasmda xuddi shu ma'lumotni ifodalovchi ustun diagramma bilan birga ko'rsatilgan. Doira diagrammalari to'plamdagi holatlarni qanday taqsimlanishini yuqori darajada ko'rsatish uchun foydali bo'lishi mumkin. Biroq, doira diagrammasida tafsilotlarni tushunish qiyinroq. Masalan, qarz oluvchida ipoteka bo'lgan qarzlar ijaraga qaraganda ko'proq ekanligini doira diagrammasida tushunish uchun bir necha soniya ko'proq vaqt talab etiladi, holbuki bu tafsilot ustunli diagrammada juda aniq ko'rinadi. Doira diagrammalari foydali bo'lishi mumkin bo'lsa-da, biz guruhlarni taqqoslash qulayligi uchun ustun diagrammalarni afzal ko'ramiz.

2.2.6 Guruhlar bo'yicha sonli ma'lumotlarni taqqoslash

Ba'zi qiziqarli tadqiqotlar guruhlar bo'yicha sonli ma'lumotlarni tahlil qilish orqali amalga oshirilishi mumkin. Bu yerda talab qilinadigan usullar aslida yangi emas. Ya'ni, har bir guruh uchun natijalarni bir xil grafikda ko'rsatish. Bu yerda ikkita qulay usul tanishtiriladi: yonma-yon qutilar diagrammasi va ichi bo'sh gistogrammalar.



2.26-rasm. Uy-joyga egalik uchun doira diagrammasi va ustunli diagramma.

Biz yana `county` ma'lumotlar to'plamiga nazar tashlaymiz va 2010-yildan 2017-yilgacha aholisi oshgan hududlardagi o'rtacha uy xo'jaligi daromadini aholisi o'zgarmagan hududlar bilan taqqoslaymiz. Biz bu yerda sababiy bog'liqlik qilishni xohlagan bo'lishimiz mumkin, lekin bu kuzatuvchi ma'lumotlar ekanligini unutmang, shuning uchun bunday izoh kamida, yetarlicha pishmagan bo'lishi mumkin.

2010-yildan 2017-yilgacha aholisi oshgan 1454 ta hudud va aholisi o'zgarmagan 1672 ta hudud bor (bittadan tashqari barchasida kamayish kuzatilgan). Birinchi guruhdan tasodifiy olingan 100 ta hudud va ikkinchi guruhdan tasodifiy olingan 50 hudud o'rtacha uy xo'jaligi daromadining ba'zi xom ma'lumotlarini yaxshiroq tushunish uchun 2.27-rasmda ko'rsatilgan.

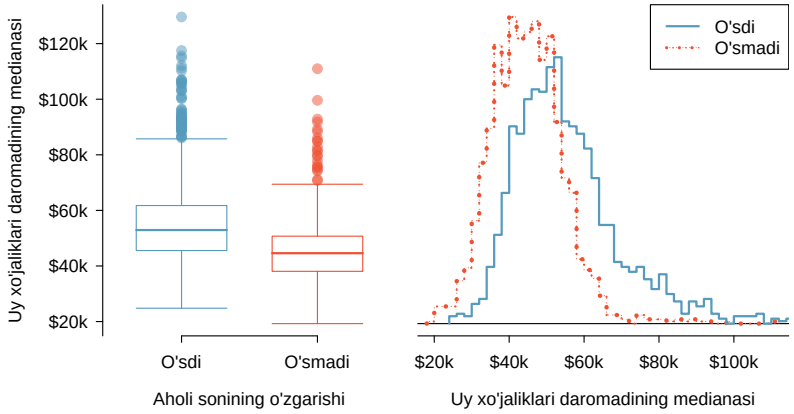
150 hudud uchun o'rtacha daromad, $1000da

Aholi o'sishi						**Aholi o'zgarishi yo'q**		
38,2	43,6	42,2	61,5	51,1	45,7	48,3	60,3	50,7
44,6	51,8	40,7	48,1	56,4	41,9	39,3	40,4	40,3
40,6	63,3	52,1	60,3	49,8	51,7	57	47,2	45,9
51,1	34,1	45,5	52,8	49,1	51	42,3	41,5	46,1
80,8	46,3	82,2	43,6	39,7	49,4	44,9	51,7	46,4
75,2	40,6	46,3	62,4	44,1	51,3	29,1	51,8	50,5
51,9	34,7	54	42,9	52,2	45,1	27	30,9	34,9
61	51,4	56,5	62	46	46,4	40,7	51,8	61,1
53,8	57,6	69,2	48,4	40,5	48,6	43,4	34,7	45,7
53,1	54,6	55	46,4	39,9	56,7	33,1	21	37
63	49,1	57,2	44,1	50	38,9	52	31,9	45,7
46,6	46,5	38,9	50,9	56	34,6	56,3	38,7	45,7
74,2	63	49,6	53,7	77,5	60	56,2	43	21,7
63,2	47,6	55,9	39,1	57,8	42,6	44,5	34,5	48,9
50,4	49	45,6	39	38,8	37,1	50,9	42,1	43,2
57,2	44,7	71,7	35,3	100,2		35,4	41,3	33,6
42,6	55,5	38,6	52,7	63		43,4	56,5	

2.27-rasm. Ushbu jadvalda aholisi o'sgan 100 hududdan tasodifiy olingan o'rtacha uy xo'jaligi daromadlari ($1000da) chap tomonda ko'rsatilgan. Aholisi o'zgarmagan 50 hududdan tasodifiy olingan o'rtacha daromadlar o'ng tomonda ko'rsatilgan.

Yonma-yon qutilar diagrammasi guruhlar bo'yicha taqqoslash uchun an'anaviy vositadir. Bunga misol 2.28-rasmning chap panelida ko'rsatilgan, unda ikkita qutilar diagrammasi, har bir guruh uchun bittadan, bir grafik oynasiga joylashtirilgan va bir xil o'lchovda chizilgan.

Yana bir foydali grafik usuli — **ichi bo'sh gistogrammalar** sonli ma'lumotlarni guruhlar bo'yicha taqqoslash uchun ishlatiladi. Bu har bir guruh uchun gistogrammalarni bir xil grafikda chizib, ularning faqat tashqi chiziqlarini ko'rsatishdan iborat. Bu 2.28-rasmning o'ng panelida



2.28-rasm. Yonma-yon qutilar diagrammasi (chap panel) va ichi bo'sh gistogrammalar (o'ng panel) uchun uy xo'jaliklari daromadining medianasi, bu yerda hududlar aholining o'sishi yoki kamayishiga qarab bo'lingan.

ko'rsatilgan.

Y **2.28-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

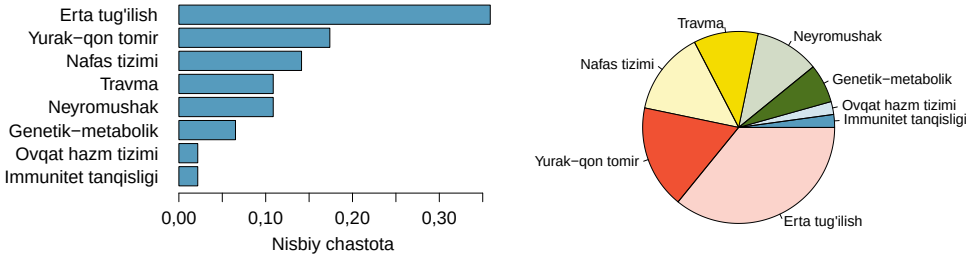
2.28-rasmdagi grafiklardan foydalanib, hududlar uchun daromadlarni ikkita guruh bo'yicha taqqoslang. Har bir guruhning taxminiy markazi haqida nimani sezdingiz? Guruhlar orasidagi o'zgaruvchanlik haqida nimani ko'rdingiz? Guruhlar orasida shakl nisbatan bir xilmi? Har bir guruh uchun nechta *aniq* modalar mavjud?[20]

Y **2.29-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

2.28-rasmdagi har bir grafikning qaysi komponentlarini eng foydali deb topdingiz?[21]

Mashqlar

2.21 Bolalarda antibiotik qo'llanilishi. Quyida traxeitisni (yuqori nafas yo'llari infeksiyasi) davolashda antibiotiklarni qo'llash muddatini aniqlash bo'yicha tadqiqotda ishtirok etgan bolalarning oldindan mavjud bo'lgan tibbiy holatlarining taqsimotini ko'rsatuvchi ustun diagrammasi va doira diagrammasi keltirilgan.



(a) Qanday xususiyatlar ustun diagrammasida ko'rinib turibdi, ammo doira diagrammasida ko'rinmaydi?

(b) Qanday xususiyatlar doira diagrammasida ko'rinib turibdi, ammo ustun diagrammasida ko'rinmaydi?

(c) Ushbu kategorik ma'lumotlarni ko'rsatish uchun qaysi grafikni afzal ko'rgan bo'lardingiz? Nima uchun?

2.22 Immigratsiya bo'yicha qarashlar. Tampa, FL shahridan tasodifiy tanlangan 910 nafar ro'yxatga olingan saylovchidan AQShga noqonuniy kirgan ishchilarga quyidagi choralar ko'rilishi kerakmi deb so'raldi:

[20] Javoblar biroz farq qilishi mumkin. Aholisi o'sgan hududlarda daromad odatda yuqoriroq bo'ladi (mediana taxminan $45000), aholisi o'zgarmagan hududlarda esa mediana taxminan $40000 bo'ladi. O'zgaruvchanlik aholisi o'sgan guruh uchun biroz kattaroq. Bu KAO orqali aniqlanadi, bu *gain* guruhida taxminan 50% kattaroq. Ikkala taqsimot ham ozgina yoki o'rtacha o'ng tomonga siljigan va unimodal. Qutilar diagrammalari har bir guruhda mediana darajadan yuqoridagi ko'plab kuzatuvlarni ko'rsatadi, lekin biz bir necha yuzdan ortiq ma'lumot nuqtalariga ega ma'lumotlar to'plamlarini tahlil qilganda, whiskerlardan tashqarida ko'plab kuzatuvlar bo'lishini kutishimiz kerak.

[21] Javoblar farq qilishi mumkin. Yonma-yon qutilar diagrammalari markazlar va tarqalishlarni taqqoslash uchun ayniqsa foydalidir, ichi bo'sh gistogrammalar esa taqsimot shakli, siljish va potensial g'ayrioddiy holatlarni ko'rish uchun ko'proq foydalidir.

(i) ishlarini saqlab qolib, AQSh fuqaroligiga murojaat qilishga ruxsat berish, (ii) vaqtinchalik mehmon ishchi sifatida ishlarini saqlab qolishga, ammo fuqarolikka murojaat qilish imkoniyatini bermaslik, yoki (iii) ishlarini yo'qotib mamlakatni tark etish. Siyosiy mafkura bo'yicha so'rov natijalari quyida keltirilgan.[22]

		Siyosiy mafkura			
		Konservativ	Mo'tadil	Liberal	Jami
Javob	(i) Fuqarolik uchun murojaat qilish	57	120	101	278
	(ii) Mehmon ishchi	121	113	28	262
	(iii) Mamlakatni tark etish	179	126	45	350
	(iv) Ishonchsiz	15	4	1	20
Jami		372	363	175	910

(a) Ushbu Tampa, FL saylovchilarining qancha foizi o'zini konservativ deb tanishtiradi?

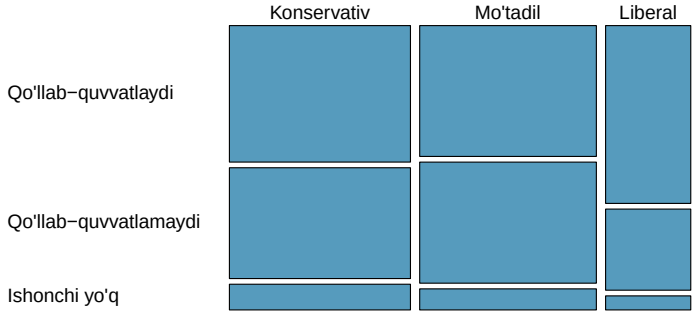
(b) Ushbu Tampa, FL saylovchilarining qancha foizi fuqarolik variantini qo'llab-quvvatlaydi?

(c) Ushbu Tampa, FL saylovchilarining qancha foizi o'zini konservativ deb tanishtiradi va fuqarolik variantini qo'llab-quvvatlaydi?

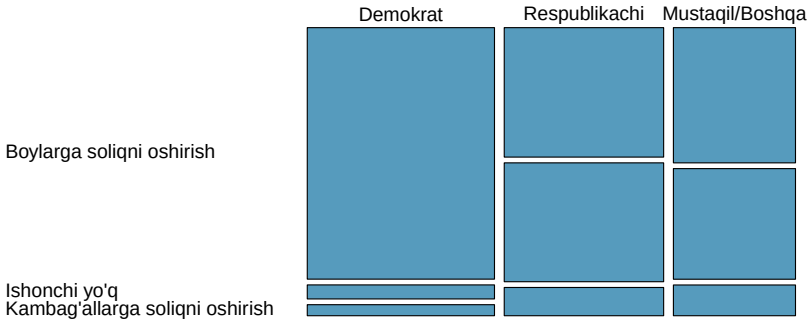
(d) O'zini konservativ deb tanishtirgan saylovchilarning qancha foizi fuqarolik variantini qo'llab-quvvatlaydi? Mo'tadillarchi? Liberallarchi?

(e) Siyosiy mafkura va immigratsiya bo'yicha qarashlar mustaqil bo'lib tuyuladimi? Izohlang.

2.23 DREAM Act bo'yicha qarashlar. Tampa, FL shahridan ro'yxatga olingan tasodifiy saylovchilar namunasidan DREAM Act haqida, ya'ni noqonuniy ravishda AQShga bolaligida olib kelingan odamlar uchun fuqarolik yo'lini taklif qiluvchi qonun loyihasini qo'llab-quvvatlaydimi yoki yo'qmi deb so'raldi. So'rovda respondentlarning siyosiy mafkuralari haqida ma'lumot ham to'plangan. Quyida keltirilgan mozaika diagrammasiga asoslanib, DREAM Act bo'yicha qarashlar va siyosiy mafkura mustaqil bo'lib tuyuladimi? Izohlang.[23]



2.24 Soliqlarni oshirish bo'yicha qarashlar. Milliy darajada ro'yxatga olingan tasodifiy saylovchilardan soliqni boylarga yoki kambag'allarga oshirish yaxshiroq deb o'ylaysizmi, deb so'raldi. So'rovda respondentlarning siyosiy partiya a'zoligi haqidagi ma'lumotlar ham to'plandi. Quyida keltirilgan mozaika diagrammasiga asoslanib, soliqni oshirish bo'yicha qarashlar va siyosiy partiyaga a'zolik mustaqil bo'lib tuyuladimi? Izohlang.[24]



[22] SurveyUSA, News Poll #18927, data collected Jan 27-29, 2012.
[23] SurveyUSA, News Poll #18927, data collected Jan 27-29, 2012.
[24] Public Policy Polling, Americans on College Degrees, Classic Literature, the Seasons, and More, data collected Feb 20-22, 2015.

2.3 Amaliy misol: bezgakka qarshi vaksina

M **2.30-MISOL**

Faraz qilaylik, professor sinfdagi talabalarni ikkita guruhga ajratadi: chap tomondagi talabalar va o'ng tomondagi talabalar. Agar $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ mos ravishda chap va o'ng tomonda Apple mahsulotiga ega bo'lgan talabalar ulushini ifodalasa, ularning teng emasligi sizni ajablantirarmidi?

Ehtimol bu ulushlar bir-biriga yaqin bo'ladi, ammo ularning aniq teng bo'lishi odatiy bo'lmas edi. Biz ehtimol tasodif tufayli kichik bir farqni kuzatamiz.

Y **2.31-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Agar sinfda odamning qaysi tomonda o'tirishi va Apple mahsulotiga ega bo'lishi o'zaro bog'liq emas deb hisoblasak, biz ushbu ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi munosabat haqida qanday farazni qabul qilamiz?[25]

2.3.1 Ma'lumotlardagi o'zgaruvchanlik

Biz yangi bezgak vaksinasi bo'yicha o'tkazilgan tadqiqotni ko'rib chiqamiz, uning nomi PfSPZ. Ushbu tadqiqotda ko'ngilli bemorlar tasodifiy ravishda ikkita guruhga bo'lindi: 14 bemor eksperimental vaksinani oldi va 6 bemor plasebo vaksinasini oldi. O'n to'qqiz hafta o'tgach barcha 20 nafar bemor doriga sezgir bo'lgan bezgak paraziti shtammi ta'siriga duchor qilindi. Bu yerda doriga sezgir shtammni ishlatish motivatsiyasi axloqiy sabablarga asoslangan bo'lib, bu har qanday infeksiyalarni samarali davolashga imkon beradi. Natijalar 2.29-rasmda umumlashtirilgan, unda 14 nafar tajriba guruhi bemorlarining 9 tasi infeksiya belgilaridan xoli bo'lib qolgan, nazorat guruhidagi 6 bemorning barchasida esa infeksiya belgilari mavjud edi.

		Natija		
		Infeksiya	Infeksiyasiz	Jami
Davolash	Vaksina	5	9	14
	Plasebo	6	0	6
	Jami	11	9	20

2.29-rasm. Bezgak vaksinasi bo'yicha tajriba natijalari umumiy ko'rinishi.

Y **2.32-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Bu kuzatuv tadqiqotimi yoki tajribami? Tadqiqot turi natijalardan nimani xulosa qilish mumkinligi haqida qanday xulosalar beradi?[26]

Ushbu tadqiqotda vaksinani olgan bemorlarning kichikroq ulushi infeksiya belgilarini ko'rsatdi (35,7% va 100%). Ammo, tanlanmalar soni juda kichik bo'lib, ushbu farq vaksinaning samarali ekanligini *ishonchli dalil* sifatida ko'rsatadimi yoki yo'qmi, aniqlik yo'q.

M **2.33-MISOL**

Ma'lumot olimlaridan ba'zan dalillarning kuchini baholash talab qilinadi. Ushbu tadqiqotdagi ikki guruh bemorlari uchun infeksiya darajalarini ko'rib chiqayotganimizda, ma'lumotlar haqiqiy farqni ishonchli dalil sifatida ko'rsatadimi yoki yo'qmi, nimani o'ylaymiz?

Kuzatilgan infeksiya darajalari (35,7% tajriba guruhi uchun va 100% boshqaruv guruhi uchun) vaksina samarali bo'lishi mumkinligini ko'rsatadi. Biroq, biz kuzatilgan farq vaksinaning samaradorligini yoki faqat tasodifiylikdan kelib chiqqanmi, aniqlay olmaymiz. Odatda, tanlanmaviy ma'lumotlarda ozgina o'zgarish bo'ladi va haqiqatda infeksiya darajalari vaksina olish bilan bog'liqsiz bo'lsa ham tanlanmaviy ulushlarning *aniq* teng bo'lishini kutmaymiz. Bundan tashqari,

[25] Biz ushbu ikki o'zgaruvchi bog'liqsiz ekanligini faraz qilgan bo'lardik.

[26] Bu tadqiqot tajriba hisoblanadi, chunki bemorlar tasodifiy ravishda tajriba guruhiga tayinlangan. Bu tajriba bo'lgani sababli, natijalar bezgak vaksinasi va bemorlarning infeksiya belgilarini ko'rsatgan yoki ko'rsatmaganligi o'rtasida sababiy bog'liqlikni baholash uchun ishlatilishi mumkin.

> bunday kichik tanlanmalar bilan guruhni tasodifan bo‘lishda shunchalik katta farqlar kuzatilishi odatiy holat bo‘lishi mumkin!

2.33-misol shuni eslatadiki, kuzatilgan tanlanmaviy natijalar o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi haqiqiy munosabatlarni mukammal aks ettirmasligi mumkin, chunki bu yerda **tasodifiy shovqin** mavjud. Infeksiya darajalaridagi kuzatilgan farq katta bo‘lsa-da, tadqiqot uchun tanlanmaviy o‘lcham kichik bo‘lib, ushbu kuzatilgan farq vaksinaning samaradorligini aks ettiradimi yoki bu faqat tasodifmi, noma’lum. Biz ushbu ikki raqobatlashayotgan da’volarni H_0 va H_A deb belgilaymiz, ular mos ravishda ”H-nol” va ”H-A” deb talaffuz qilinadi:

H_0: **Bog‘liqsizlik modeli.** `Davolash` va `natija` o‘zgaruvchilari bog‘liqsiz. Ular o‘zaro bog‘liq emas va ikki guruhdagi infeksiya belgilari ulushi o‘rtasidagi kuzatilgan 64,3% farqi tasodif tufayli yuzaga kelgan.

H_A: **Alternativ model.** O‘zgaruvchilar *bog‘liqsiz emas*. Infeksiya darajalaridagi 64,3% farqi tasodifan kelib chiqmagan va vaksina infeksiya darajasiga ta’sir qilgan.

Agar bog‘liqsizlik modeli, ya’ni vaksina infeksiya darajasiga hech qanday ta’sir ko‘rsatmagan bo‘lsa, bu nimani anglatadi? Bu shuni anglatadiki, 11 nafar bemorda *qaysi guruhga tasodifiy tanlanganidan qat’iynazar* infeksiya rivojlantirishi kerak edi va 9 nafar bemor esa infeksiya rivojlantirmasligi kerak edi. Ya’ni, agar vaksina infeksiya darajasiga ta’sir ko‘rsatmagan bo‘lsa, infeksiya darajalari orasidagi farq faqat tasodif tufayli, bemorlarning tasodifiy taqsimlanishi natijasida yuzaga kelgan bo‘lardi.

Endi alternativ modelni ko‘rib chiqamiz: infeksiya darajalari bemor vaksinani olganmi yoki yo‘qmi, shunga qarab rivojlangan. Agar bu to‘g‘ri bo‘lsa va ayniqsa, agar bu ta’sir sezilarli bo‘lsa, biz guruhlar orasidagi infeksiya darajalarida biroz farqni kuzatishni kutgan bo‘lardik.

Biz ushbu ikki raqobatlashayotgan da’volardan birini tanlaymiz, H_0 ga ma’lumotlar shunchalik zid keladiki, bog‘liqsizlik modelini oqilona deb hisoblab bo‘lmaydi. Agar shunday bo‘lsa va ma’lumotlar H_A ni qo‘llab-quvvatlasa, biz bog‘liqsizlik tushunchasini rad etamiz va vaksina samarali bo‘lgan degan xulosaga kelamiz.

2.3.2 Tadqiqotni simulyatsiya qilish

Biz turli **simulyatsiya**larni amalga oshiramiz. Unda bezgak vaksinasi sinovi aslida *ishlamaydi* deb faraz qilamiz. Oxir-oqibat, biz kuzatilgan katta farq bu simulyatsiyalarda qanchalik keng tarqalganligini o‘rganamiz. Agar bu keng tarqalgan bo‘lsa, ehtimol, kuzatilgan farq faqat tasodif tufayli yuzaga kelgan. Agar u juda noyob bo‘lsa, unda vaksina foydali bo‘lganligi ehtimoli mavjud.

2.29-rasm shuni ko‘rsatadiki, 11 nafar bemorda infeksiya rivojlangan va 9 nafar bemorda rivojlanmagan. Bizning simulyatsiyamizda infeksiyalar vaksinaga bog‘liqsiz bo‘lgan deb faraz qilamiz va tadqiqotchilar bemorlarni tasodifiy tanlagan vaqtga *“orqaga qayta olish”* imkoniyatiga ega bo‘lganini tasavvur qilamiz. Agar bemorlarni boshqacha tasodifiy taqsimlaganimizda, bu xayoliy dunyoda vaksina infeksiyaga ta’sir ko‘rsatmaydigan bo‘lsa, boshqacha natija olishimiz mumkin edi. Keling, simulyatsiya yordamida yana bir **tasodifiy taqsimlash**ni bajaraylik.

Ushbu **simulyatsiya**, biz 20 nafar bemorni ifodalash uchun 20 ta varoqchadan foydalanamiz, ularning 11 tasiga “infeksiya” va 9 tasiga “infeksiyasiz” deb yozamiz. Bu xayoliy dunyoda, har bir bemor qaysi guruhga tegishli bo‘lishidan qat’iynazar, infeksiya rivojlantirishi yoki rivojlantirmasligi kerak edi deb ishonamiz. Keling, bemorlarni davolash va nazorat guruhlariga qayta tasodifiy taqsimlaganimizda nima sodir bo‘lishini ko‘raylik. Biz varoqchalarni yaxshilab aralashtiramiz va 14 tasini `vaksina` to‘plamiga, 6 tasini esa `plasebo` to‘plamiga ajratamiz. Nihoyat, natijalarni hisoblaymiz, ular 2.30-rasmda ko‘rsatilgan.

		`natija`		
		Infeksiya	Infeksiyasiz	Jami
Davolash (Simulyatsiya)	Vaksina	7	7	14
	Plasebo	4	2	6
	Jami	11	9	20

2.30-rasm. Simulyatsiya natijalari, bu yerda infeksiya darajalaridagi har qanday farq faqat tasodif tufayli yuzaga keladi.

Y **2.34-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

2.30-rasmdagi ikki simulyatsiya qilingan guruh o'rtasidagi infeksiya darajalaridagi farq qancha? Bu farq haqiqiy ma'lumotlardagi kuzatilgan 64,3% farq bilan qanday taqqoslanadi?[27]

2.3.3 Bog'liqsizlikni tekshirish

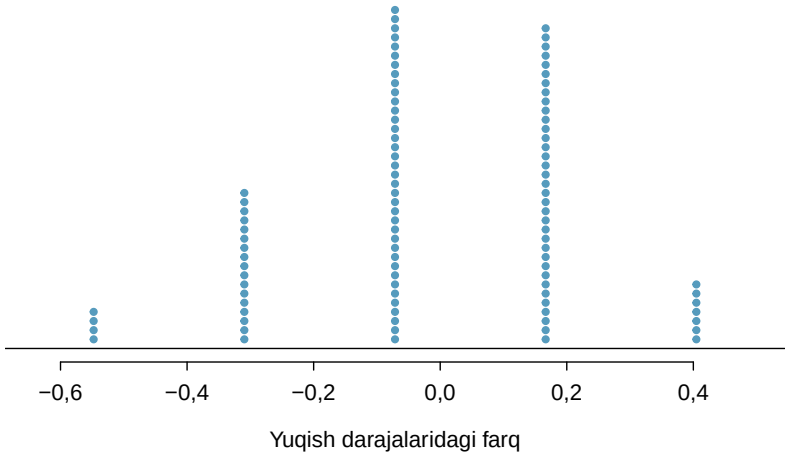
Biz boshqariladigan amaliyotda 2.34-bo'limda bog'liqsizlik modeliga binoan bir farqni hisobladik, bu tasodif tufayli yuzaga kelgan bir farqni ifodalaydi. Bu birinchi simulyatsiyada, biz bemorlarni ifodalash uchun varoqchalarni qo'lda taqsimladik, lekin bu simulyatsiyani kompyuter yordamida bajarish ancha samarali. Simulyatsiyani kompyuterda qayta bajarganimizda, tasodifdan kelib chiqqan boshqa farqni olamiz:

$$\frac{2}{6} - \frac{9}{14} = -0{,}310.$$

Yana bir marta:

$$\frac{3}{6} - \frac{8}{14} = -0{,}071.$$

Shu tarzda simulyatsiyani bir necha marta qaytarib bajarib, tasodifdan kelib chiqqan *farqlar taqsimotini* yaxshiroq tushunamiz. 2.31-rasmda 100 ta simulyatsiyadan topilgan farqlar to'plami ko'rsatilgan bo'lib, har bir nuqta infeksiya darajalari o'rtasidagi (simulyatsiya qilingan nazorat va davolash guruhlari uchun) farqni ifodalaydi.



2.31-rasm. 100 ta simulyatsiya natijalarida topilgan farqlar uchun bog'liqsizlik modeli (H_0) bo'yicha chiziqli nuqtali diagrammasi. Ushbu simulyatsiyalarda infeksiyalarga vaksina ta'sir qilmagan. Tadqiqotda kuzatilgan farq 64,3% bo'lgan kamida ikkita simulyatsiya kuzatildi.

E'tibor bering, ushbu simulyatsiya qilingan farqlar taqsimoti 0 atrofida markazlashgan. Bu farqlar bog'liqsizlik modeli haqiqiy deb faraz qilinib, simulyatsiya qilindi va ushbu sharoitda biz farqning nolga yaqin bo'lishini tasodifiy o'zgarish bilan kutamiz. Bu holatda "yaqin" atamasi juda saxiylik bilan ishlatiladi, chunki ushbu tadqiqotdagi tanlanmalar soni juda kichik.

M **2.35-MISOL**

2.31-rasmga ko'ra, kamida 64,3% (64,3) farqni qanchalik tez-tez kuzatasiz? Tez-tez, ba'zan, kamdan-kam hollarda yoki hech qachon?

Faqat tasodifiylik tufayli kamida 64,3% farq 2.31-rasmga ko'ra faqat taxminan 2% holatlarda yuzaga kelishi mumkin. Bunday past ehtimollik noyob hodisani ko'rsatadi.

[27] $4/6 - 7/14 = 0{,}167$ yoki taxminan 16,7% vaksina foydasiga. Bu tasodifdan kelib chiqqan farq haqiqiy guruhlardagi kuzatilgan farqdan ancha kichik.

64,3% farqining noyob hodisa ekanligi tadqiqot natijalarining ikki xil talqinini taklif qiladi:

H_0 **Bog‘liqsizlik modeli.** Vaksina infeksiya darajasiga ta’sir qilmaydi va biz faqat noyob holatda yuz beradigan farqni kuzatdik.

H_A **Alternativ model.** Vaksina infeksiya darajasiga ta’sir qiladi va kuzatilgan farq bezgakka qarshi kurashda vaksina samaradorligi tufayli yuzaga kelgan. Bu esa 64,3% katta farqni tushuntiradi.

Simulyatsiyalar asosida bizda ikkita tanlov mavjud: (1) Tadqiqot natijalari bog‘liqsizlik modeliga qarshi kuchli dalil bermaydi degan xulosaga kelamiz. Ya’ni, biz klinik sharoitda vaksinaning ta’sir qilganligini tasdiqlash uchun yetarlicha kuchli dalilga ega emasmiz. (2) Dalillar yetarlicha kuchli ekanligi sababli H_0 ni rad etamiz va vaksina foydali bo‘lgan degan xulosaga kelamiz. Formal tadqiqotlarni o‘tkazishda, odatda biz faqat tasodifiy noyob hodisani kuzatganlik g‘oyasini rad etamiz.[28] Shunday qilib, bu holatda biz bog‘liqsizlik modelini alternativ model foydasiga rad etamiz. Ya’ni, biz ma’lumotlar ushbu klinik sharoitda vaksina bezgakdan himoya qilishda qandaydir samaradorlik ko‘rsatganiga kuchli dalil beradi degan xulosaga kelamiz.

Statistikaning bir sohasi, statistik xulosa, bunday farqlar tasodif tufayli yuzaga kelganmi yoki yo‘qligini baholashga asoslangan. Statistik xulosada, ma’lumotlar olimlari qaysi model ma’lumotlarga asoslanib eng mantiqiy ekanligini baholaydilar. Xatolar sodir bo‘ladi, xuddi noyob hodisalar kabi va biz noto‘g‘ri modelni tanlashimiz mumkin. Har doim to‘g‘ri tanlamasligimiz mumkin bo‘lsada, statistik xulosa bu xatolarning qanchalik tez-tez yuz berishini nazorat qilish va baholash uchun vositalarni beradi. 5-bobda biz model tanlash masalasiga rasmiy kirish beramiz. Keyingi ikki bobda, ushbu muhokamani aniqlik bilan olib borish uchun zarur bo‘lgan ehtimollik va nazariya asoslarini yaratamiz.

Mashqlar

2.25 Avandianing yon ta’sirlari. Rosiglitazon tarkibiy qismi Avandia nomli 2-turdagi diabet uchun mo‘ljallangan dori tarkibida bo‘lib, insult, yurak yetishmovchiligi va o‘lim kabi jiddiy yurak qon-tomir muammolari bilan bog‘liq. Oddiy muqobil davolash usuli pioglitazon bo‘lib, bu “Actos” nomli diabet dorisining tarkibiy qismidir. 227571 nafar 65 yosh va undan katta “Medicare” foydalanuvchilariga o‘tkazilgan butun mamlakat bo‘ylab retrospektiv kuzatuv tadqiqotida rosiglitazon ishlatgan 67593 nafar bemorning 2593 nafari va pioglitazon ishlatgan 159978 nafar bemorning 5386 nafari jiddiy yurak qon-tomir muammolariga ega ekanligi aniqlandi. Ushbu ma’lumotlar quyidagi jadvalda keltirilgan.[29]

		Yurak-qon tomir muammolari		
		Ha	Yo‘q	Jami
Davolash turi	Rosiglitazon	2593	65000	67593
	Pioglitazon	5386	154592	159978
	Jami	7979	219592	227571

(a) Quyidagi bayonotlarning har biri to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang. Agar noto‘g‘ri bo‘lsa, nima uchunligini tushuntiring. *E’tibor bering:* Xulosa to‘g‘ri bo‘lsa ham, mulohaza noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin. Bunday holatda bayonot noto‘g‘ri deb hisoblanadi.

i. Pioglitazon qabul qilgan bemorlarning yurak qon-tomir muammolari ko‘proq bo‘lganligi sababli (5386 ga nisbatan 2593), pioglitazon qabul qilganlarda yurak qon-tomir muammolari darajasi yuqori ekanligini xulosa qilishimiz mumkin.

ii. Ma’lumotlar rosiglitazon qabul qilgan diabet bemorlarida yurak qon-tomir muammolarining ehtimoli yuqori ekanligini ko‘rsatmoqda, chunki bu davolash turi uchun holatlar darajasi (2593 / 67593 = 0,038) 3,8%, pioglitazon uchun esa (5386 / 159978 = 0,034) 3,4% edi.

[28] Bu mantiq odatda anekdotik kuzatuvlarga tatbiq etilmaydi. Har birimiz har kuni oldindan bashorat qilishni umid qila olmaydigan juda noyob hodisalarni kuzatamiz. Biroq, anekdot dalillarning noaniq sharoitida, deyarli hamma narsa noyob hodisa bo‘lib tuyulishi mumkin. Shuning uchun kundalik faoliyatlarda noyob hodisalarni qidirish g‘oyasi xavfli. Masalan, lotereyaga qarasak: tarixdagi eng katta “Powerball” jackpotida (2016-yil 13-yanvar) (04, 08, 19, 27, 34) “Powerball” raqami (10) bo‘lgan sonlar chiqish ehtimoli 292 milliondan 1 edi. Lekin baribir bu raqamlar chiqdi! Biroq, qanday raqamlar chiqmasin, ular bir xil darajada noyob ehtimollikka ega bo‘lishi kerak edi. Ya’ni, *biz kuzatgan har qanday raqamlar to‘plami juda noyob bo‘ladi.* Bu turdagi vaziyatlar kundalik hayotimizda odatiy: har bir mumkin bo‘lgan voqea o‘zi juda noyob tuyuladi, lekin barcha alternativlarni hisobga olsak, bu natijalar ham juda noyobdir. Bunday anekdot dalillarni noto‘g‘ri talqin qilmaslikka harakat qilishimiz kerak.

[29] D.J. Graham et al. “Risk of acute myocardial infarction, stroke, heart failure, and death in elderly Medicare patients treated with rosiglitazone or pioglitazone”. In: *JAMA* 304.4 (2010), p. 411. ISSN: 0098-7484.

iii. Rosiglitazon guruhidagi holatlar darajasining yuqoriroq ekanligi rosiglitazon yurak qon-tomir muammolarini keltirib chiqarishini isbotlaydi.

iv. Berilgan ma'lumotlarga asoslanib, holatlar darajalari o'rtasidagi farq ushbu ikki o'zgaruvchi o'rtasidagi bog'liqlik tufaylimi yoki tasodif tufayli ekanligini aniqlashning iloji yo'q.

(b) Barcha bemorlarning qancha qismi yurak qon-tomir muammolariga ega edi?

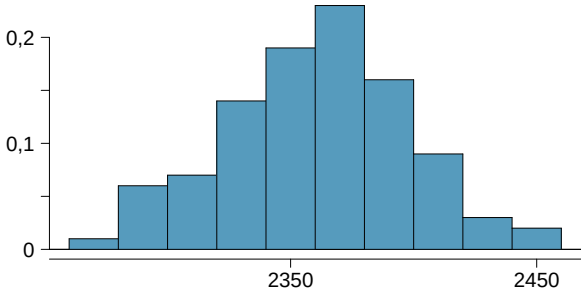
(c) Agar davolash turi va yurak qon-tomir muammolarining borligi mustaqil bo'lsa, rosiglitazon guruhida qancha bemorda yurak qon-tomir muammolari bo'lishini kutishimiz mumkin?

(d) Ushbu tadqiqotda natijalar va davolash turi o'rtasidagi bog'liqlikni tekshirish uchun randomizatsiya texnikasidan foydalanishimiz mumkin. Haqiqatda randomizatsiya uchun simulyatsiyalarni statistik dastur yordamida amalga oshirgan bo'lardik, lekin faraz qilaylik, biz ushbu simulyatsiyani index kartalari yordamida o'tkazamiz. Mustaqillik modelini, ya'ni natijalar davolash turidan mustaqil ekanligini, simulyatsiya qilish uchun, biz har bir bemorda yurak qon-tomir muammosi bor yoki yo'qligini kartalarga yozamiz, barcha kartalarni aralashtiramiz, so'ng ularni 67593 va 159978 o'lchamdagi ikkita guruhga ajratamiz. Ushbu simulyatsiyani 1000 marta takrorlaymiz va har safar rosiglitazon guruhidagi yurak qon-tomir muammolari bo'lgan odamlar sonini qayd qilamiz. Quyidagi nisbiy chastota gistogrammasidan foydalanib savollarga javob bering.

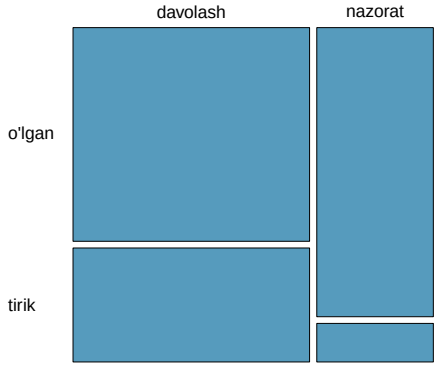
i. Qanday da'volar tekshirilmoqda?

ii. (c) Qismida hisoblangan raqam bilan solishtirganda, alternativ gipotezani ko'proq qo'llab-quvvatlash uchun rosiglitazon guruhida yurak-qon tomir muammolari bo'lgan *ko'proq* yoki *kamroq* bemor bo'lishi kerakmi?

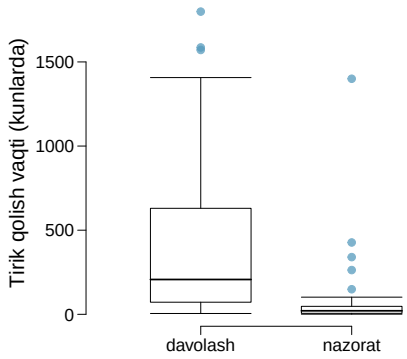
iii. Simulyatsiya natijalari rosiglitazon qabul qilish va diabet bemorlari orasida yurak-qon tomir muammolari o'rtasidagi bog'liqlik haqida nima ko'rsatmoqda?



2.26 Yurak ko'chirib o'tkazishlar. Stanford Universitetining Yurak Ko'chirib o'tkazish Tadqiqoti tajriba yurak ko'chirib o'tkazish dasturi umrni uzaytirishini aniqlash uchun o'tkazilgan. Dasturga kirgan har bir bemor rasmiy yurak ko'chirib o'tkazish nomzodi sifatida belgilangan, ya'ni u og'ir ahvolda bo'lib, yangi yurakka muhtoj bo'lishi ehtimoli katta edi. Ba'zi bemorlarga yurak ko'chirib o'tkazildi, boshqalariga esa yo'q. `transplant` o'zgaruvchisi bemorlar qaysi guruhga tegishli ekanligini ko'rsatadi; davolash guruhidagi bemorlarga yurak ko'chirib o'tkazilgan, nazorat guruhidagi bemorlarga esa yo'q. Nazorat guruhidagi 34 bemordan 30 tasi vafot etgan. Davolash guruhidagi 69 kishidan 45 tasi vafot etgan. `survived` nomli yana bir o'zgaruvchi bemor tadqiqot oxirida tirik bo'lgan yoki bo'lmaganini ko'rsatadi.[30]



[30] B. Turnbull et al. "Survivorship of Heart Transplant Data". In: *Journal of the American Statistical Association* 69 (1974), pp. 74–80.



(a) Mozaik diagrammaga asoslanib, tirik qolish bemorga yurak ko‘chirib o‘tkazilgan yoki o‘tkazilmaganligidan mustaqilmi? Izohlang.

(b) Quyidagi quti diagrammalar yurak ko‘chirib o‘tkazish davolash usulining samaradorligi haqida nima ko‘rsatadi?

(c) Davolash guruhidagi va nazorat guruhidagi bemorlarning qanchasi vafot etdi?

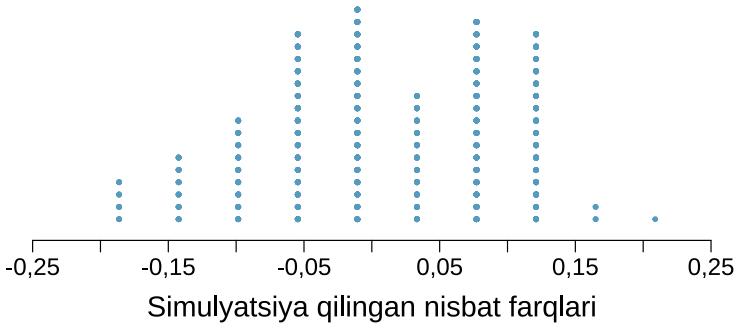
(d) Davolash samaradorligini tekshirishning bir usuli randomizatsiya texnikasidan foydalanishdir.

i. Qanday da’volar sinovdan o‘tkazilmoqda?

ii. Agar statistik dasturiy ta’minotdan foydalanmasdan, bunday yondashuvni amalga oshiradigan bo‘lsak, quyidagi paragraf bu usulni qanday tashkil etilishini tavsiflaydi. Bo‘sh joylarni mos son yoki iboralar bilan to‘ldiring.

Tirik so‘zini tadqiqot oxirida tirik bo‘lgan bemorlarni ifodalovchi _____ ta kartaga, va *o‘lgan* so‘zini tirik bo‘lmagan bemorlarni ifodalovchi _____ ta kartaga yozamiz. So‘ngra, bu kartalarni aralashtirib, ularni ikkita guruhga ajratamiz: _____ ta kartadan iborat guruh davolashni va _____ ta kartadan iborat guruh nazoratni ifodalaydi. Davolash va nazorat guruhlaridagi *o‘lgan* kartalarning ulushlari o‘rtasidagi farqni (davolash - nazorat) hisoblaymiz va bu qiymatni yozib olamiz. Bu jarayonni 100 marta takrorlab, _____ da markazlashgan taqsimot yaratamiz. Oxirida, ushbu taqsimotda farqlar _____ bo‘lgan simulyatsiyalar ulushini hisoblaymiz. Agar bu ulush past bo‘lsa, tasodif natijasida bunday natija kuzatilishi ehtimoli past deb xulosa qilamiz va nol gipotezani alternativaga qarshi rad etamiz.

iii. Quyidagi simulyatsiya natijalari transplantatsiya dasturining samaradorligi haqida nima ko‘rsatadi?



Bob bo‘yicha mashqlar

2.27 Qo‘shimcha imtihon. 25 nafar talaba ishtirok etgan darsda, 24 nafari imtihonni darsda topshirdi va 1 talaba qo‘shimcha imtihonni keyingi kuni topshirdi. Professor birinchi 24 ta imtihonni baholab, o‘rtacha ball 74 va standart og‘ish 8,9 ball ekanligini aniqladi. Keyingi kuni qo‘shimcha imtihon topshirgan talaba 64 ball oldi.

(a) Yangi talabaning bali o‘rtacha ballni oshiradimi yoki pasaytiradimi?

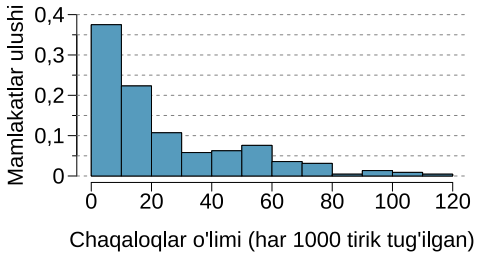
(b) Yangi o‘rtacha ball qancha bo‘ladi?

(c) Yangi talabaning bali ballarning standart og‘ishini oshiradimi yoki pasaytiradimi?

2.28 Go'daklar o'limi. Go'daklar o'limi darajasi har 1000 jonli tug'ilish uchun go'dak o'limlari soni bilan belgilanadi. Ushbu ko'rsatkich ko'pincha mamlakatdagi sog'liq darajasining indikatori sifatida ishlatiladi. Quyida 2014-yilda mavjud bo'lgan ma'lumotlarga ega 224 ta mamlakat uchun taxminiy go'daklar o'limi darajalarining taqsimotini ko'rsatuvchi nisbiy chastota gistogrammasi keltirilgan.[31]

(a) Gistogrammadan Q1, median va Q3 ni taxmin qiling.

(b) Ushbu ma'lumotlar to'plamining o'rtacha qiymati medianadan kichikroq yoki kattaroq bo'lishini kutasizmi? Nima uchun?



2.29 Televizor ko'ruvchilar. AP Statistika darsidagi talabalardan haftasiga qancha soat televizor tomosha qilishlarini (onlayn strimingni ham o'z ichiga oladi) so'rashdi. Ushbu namunada o'rtacha tomosha qilish vaqti 4,71 soat, standart og'ish esa 4,18 soat bo'ldi. Talabalar haftalik televizor tomosha qilish soatlarining taqsimoti simmetrikmi? Agar yo'q bo'lsa, ushbu taqsimotning qanday shaklga ega bo'lishini kutasiz? Izohlang.

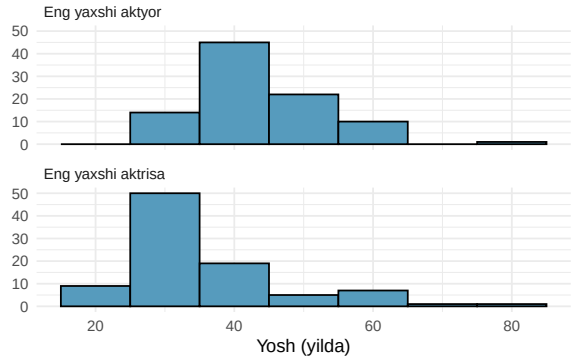
2.30 Yangi statistika. $\frac{\bar{x}}{median}$ statistikasi egrilikning o'lchovi sifatida ishlatilishi mumkin. Faraz qilaylik, barcha kuzatuvlar 0 dan katta, $x_i > 0$. Quyidagi sharoitlarda taqsimotning kutilayotgan shakli qanday bo'ladi? Izohlang.

(a) $\frac{\bar{x}}{median} = 1$

(b) $\frac{\bar{x}}{median} < 1$

(c) $\frac{\bar{x}}{median} > 1$

2.31 Oskar sovrindorlari. Birinchi "Oskar" mukofotlari 1929-yilda eng yaxshi aktyor va aktrisa uchun berildi. Quyida 1929-yildan 2018-yilgacha bo'lgan eng yaxshi aktyor va aktrisa g'oliblarining yosh taqsimotini ko'rsatadigan gistogrammalar keltirilgan. Ushbu taqsimotlar bo'yicha qisqacha statistik ma'lumotlar ham berilgan. Eng yaxshi aktyor va aktrisa g'oliblarining yosh taqsimotlarini taqqoslang.[32]



	Eng yaxshi aktrisa
O'rtacha	36,2
SCh	11,9
n	92

	Eng yaxshi aktyor
O'rtacha	43,8
SCh	8,83
n	92

2.32 Imtihon ballari. Tarix imtihonining (100 ballik) o'rtacha bali 85, standart og'ishi esa 15 bo'ldi. Ushbu imtihon ballarining taqsimoti simmetrikmi? Agar yo'q bo'lsa, ushbu taqsimotning qanday shaklga ega bo'lishini kutasiz? Izohlang.

2.33 Statistika imtihon ballari. Quyida statistikaga kirish kursi bo'yicha yigirma nafar talabaning yakuniy imtihon ballari berilgan:

57, 66, 69, 71, 72, 73, 74, 77, 78, 78, 79, 79, 81, 81, 82, 83, 83, 88, 89, 94.

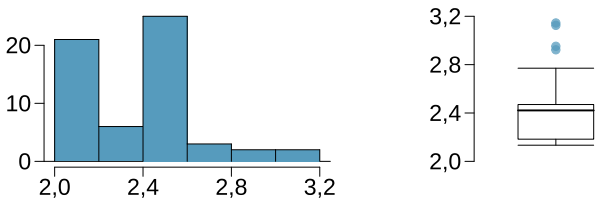
Ushbu ballarning taqsimotini ko'rsatuvchi qutili diagramma yarating. Quyida keltirilgan beshta son xulosasi sizga yordam berishi mumkin.

Min	Q1	Q2 (Mediana)	Q3	Maks
57	72,5	78,5	82,5	94

[31] CIA Factbook, Country Comparisons, 2014.

[32] Oscar winners from 1929 – 2012, data up to 2009 from the Journal of Statistics Education data archive and more current data from wikipedia.org.

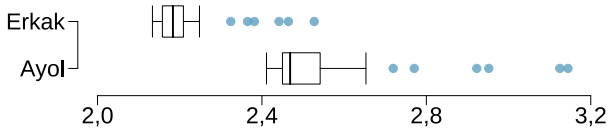
2.34 Marafon g‘oliblari. Quyida 1970–1999-yillar oralig‘ida Nyu-York marafonida erkaklar va ayollar g‘oliblarining yugurishni tugallash vaqtlari taqsimotini ko‘rsatuvchi gistogramma va qutili diagramma keltirilgan.



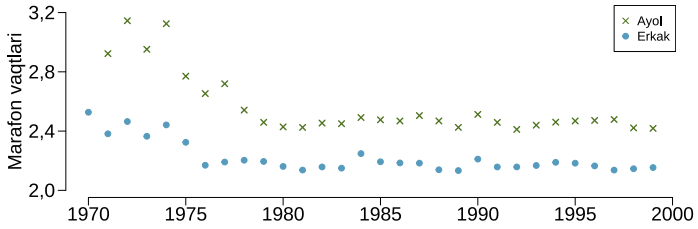
(a) Gistogrammada ko‘rinadigan, lekin qutili diagrammada ko‘rinmaydigan taqsimotning xususiyatlari qanday? Bokx-plotda ko‘rinadigan, lekin gistogrammada ko‘rinmaydigan xususiyatlar qanday?

(b) Taqsimotning ikki cho‘qqili bo‘lishining sababi nima bo‘lishi mumkin? Izohlang.

(c) Quyidagi qutili diagrammaga asoslanib, erkaklar va ayollarning marafon vaqtlarining taqsimotini solishtiring.



(d) Quyidagi vaqt qatorlari diagrammasi ushbu ma’lumotlarga boshqa bir qarashni taqdim etadi. Ushbu diagrammada ko‘rinadigan, ammo boshqalarda ko‘rinmaydigan narsalar haqida izoh bering.



3-BOB

Ehtimollik

3.1 Ehtimollikni ta’riflari

3.2 Shartli ehtimollik

3.3 Kichik bosh to‘plamdan tanlanma olish

3.4 Tasodifiy miqdorlar

3.5 Uzluksiz taqsimotlar

Ehtimollik statistikaning asosini tashkil qiladi va siz ushbu bobda keltirilgan ko‘plab g‘oyalar bilan allaqachon tanish bo‘lishingiz mumkin. Ammo ehtimollik tushunchalarini rasmiylashtirish ko‘pchilik o‘quvchilar uchun yangilik hisoblanadi. Ushbu bob keyingi boblardagi g‘oyalar uchun nazariy asosni ta’minlaydi va chuqurroq tushunishga yo‘l ochadi, lekin ushbu bobda keltirilgan tushunchalarni, kitobning qolgan qismida kiritilgan usullarni qo‘llash uchun mukammal egallash shart emas.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

3.1 Ehtimollikni ta'riflari

Statistika ehtimollikka asoslanadi va garchi ushbu kitobdagi qo'llanma texnikalari uchun ehtimollik zarur bo'lmasa-da, bu sizga usullarni chuqurroq tushunishga yordam berishi va keyingi kurslar uchun yaxshiroq asos yaratishi mumkin.

3.1.1 Kirish misollari

Texnik g'oyalarga o'tishdan oldin, tanishroq tuyulishi mumkin bo'lgan ba'zi oddiy misollarni ko'rib chiqaylik.

3.1-MISOL

Shoshqol toshi (Kubik yoki zarik deb ham ataladi. Bir xillikni taminlash maqsadida keyingi o'rinlarda kub yozuvini ishlatamiz), oltita tomoniga 1, 2, 3, 4, 5 va 6 raqamlari tushirilgan kub shaklida bo'ladi. Kub tashlanganda 1 chiqish ehtimoli qancha?

Agar kub simmetrik bo'lsa, 1 chiqish ehtimolligi boshqa raqamlar chiqish ehtimolliklariga teng bo'ladi. Oltita teng imkoniyatli natija bo'lgani uchun, ehtimollik 1/6 (1 taqsim 6) ga teng bo'ladi.

3.2-MISOL

Keyingi tashlashda 1 yoki 2 chiqish ehtimoli qancha?

---

1 va 2 oltita teng imkoniyatli natijalarning ikkitasini tashkil qiladi, shuning uchun ushbu ikki natijadan birini olish ehtimoli $2/6 = 1/3$ ga teng bo'ladi.

3.3-MISOL

Keyingi tashlashda 1, 2, 3, 4, 5, yoki 6 chiqish ehtimoli qancha?

100%. Natija bu raqamlardan biri bo'lishi shart.

3.4-MISOL

2 chiqmaslik ehtimoli qancha?

---

2 chiqish ehtimoli 1/6 yoki $16,\bar{6}\%$ bo'lgani uchun, 2 chiqmaslik ehtimoli $100\% - 16,\bar{6}\% = 83,\bar{3}\%$ yoki 5/6 ga teng bo'ladi. E'tibor bering, masalan biz $16,\bar{6}\%$ yozuvini $16,66666\ldots\%$ uchun ishlatamiz. Balki siz maktabda bu davriy kasr uchun $16,(6)$ yozuvini ishlatgandirsiz.

Bundan tashqari, 2 chiqmaslik 1, 3, 4, 5 yoki 6 chiqish bilan bir xil ekanini payqashimiz mumkin edi. Bu oltita teng imkoniyatli natijadan beshtasini tashkil qiladi va ehtimoli 5/6 ga teng.

3.5-MISOL

Ikkita kubni tashlashni ko'rib chiqaylik. Agar birinchi kubning 1 bo'lish ehtimoli 1/6 bo'lsa va ushbu holatlarning 1/6 qismi ikkinchi kubning ham 1 bo'lishiga to'g'ri kelsa, ikkala kubning ham 1 bo'lish ehtimoli qancha?

Agar birinchi kub 1 bo'lishi ehtimoli 1/6 ($16,\bar{6}\%$) bo'lsa va ushbu holatlarning 1/6 qismi ikkinchi kubning ham 1 bo'lishiga to'g'ri kelsa, unda ikkala kubning ham 1 bo'lish ehtimoli $(1/6) \times (1/6)$ yoki 1/36 ga teng bo'ladi.

3.1.2 Ehtimollik

Ehtimollikdan biz ko'rinib turgan tasodifiylikni tavsiflash va anglash uchun vositalar yaratishda foydalanamiz. Odatda ehtimollikni biror **tasodifiy jarayon** muayyan natijani keltirib chiqaradi

degan tarzda qaraymiz.

kub tashlash	→	`1`, `2`, `3`, `4`, `5` yoki `6`
tanga tashlash	→	`R` yoki `G`

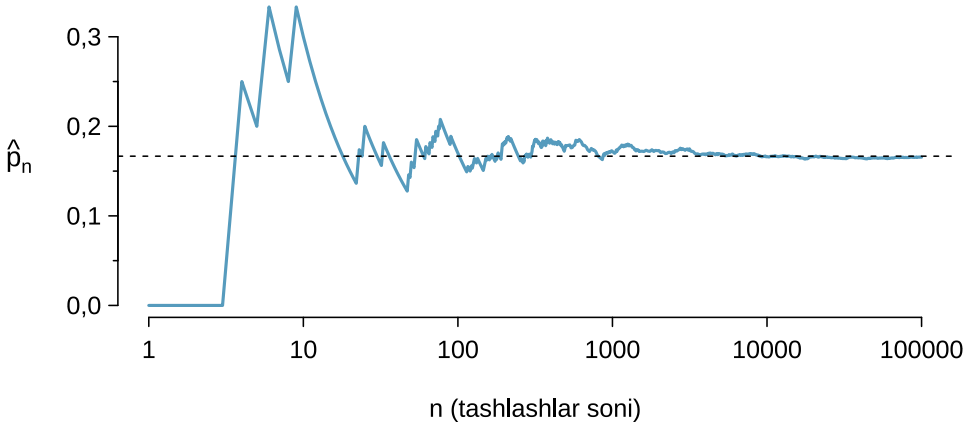
kub yoki tanga tashlash tasodifiy jarayon bo'lib, har biri ma'lum natijaga olib keladi.

EHTIMOLLIK

Ehtimollik - bu tasodifiy jarayonni cheksiz marta kuzatganimizda biror natijaning yuz berish ulushi.

Ehtimollik ulush sifatida aniqlanadi va har doim 0 va 1 oralig'idagi (chegaralar kiradi) qiymatlarni oladi. Uni shuningdek 0% dan 100% gacha ko'rinishida ifodalash ham mumkin.

Ehtimollikni ko'p marta kub tashlash orqali tasvirlash mumkin. $\hat{p}_n$ birinchi n marta tashlashdan keyin `1` chiqishi ulushi bo'lsin. Tashlashlar soni oshgani sayin, `1` tushishi ehtimoli $\hat{p}_n$ ning qiymati $p = 1/6$ ga yaqinlashadi. 3.1-rasmda bu yaqinlashuv 100000 marta kub tashlash uchun ko'rsatilgan. $\hat{p}_n$ ning p atrofida tebranish (yoki barqarorlashish) tendentsiyasi **katta sonlar qonuni** orqali izohlanadi.



3.1-rasm. Har bir bosqichda kub tashlashda `1` tushishining ulushi. Tajribalar soni ortgani sari bu ko'rsatkich $1/6 \approx 0{,}167$ ehtimollikka yaqinlashadi.

KATTA SONLAR QONUNI

Kuzatuvlar soni ortgani sari, ma'lum bir natijaning $\hat{p}_n$ ulushi ushbu natijaning p ehtimolligiga yaqinlashadi.

Ba'zida ulush ehtimollikdan uzoqlashadi va katta sonlar qonuniga zid ko'rinadi, masalan, $\hat{p}_n$ 3.1-rasmda ko'rsatilganidek bir necha marta bunday holatga tushadi. Ammo, bu og'ishlar kub tashlashlar soni ortgani sari kichiklashib boradi.

Yuqorida p ni `1` tushishi ehtimolligi sifatida yozdik. Ushbu ehtimollikni quyidagicha ham yozishimiz mumkin:

$$P(\texttt{1 tushish ehtimolligi}) \ .$$

Bu belgilashga ko'nikkanimiz sari, uni qisqartirib yozamiz. Masalan, jarayon "kub tashlash" ekanligi aniq bo'lsa, $P(\texttt{1 tushishi})$ qisqartirilgan holda $P(\texttt{1})$ deb yozilishi mumkin.

Y **3.6-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Tasodifiy jarayonlarga kub tashlash va tanga tashlash kiradi. (a) Yana bir tasodifiy jarayonni o'ylab toping. (b) Ushbu jarayonning barcha mumkin bo'lgan natijalarini tavsiflang. Masalan, kub tashlash tasodifiy jarayon bo'lib, mumkin bo'lgan natijalari `1`, `2`, ..., `6` bo'ladi.[1]

Biz tasodifiy jarayon deb hisoblaydigan narsalar har doim ham tasodifiy emas, balki ularni aniq tushunish qiyin bo‘lishi mumkin. 3.6-yo‘naltirilgan mashqda keltirilgan izohning to‘rtinchi misoli xonadoshning xatti-harakatlarini tasodifiy jarayon sifatida ko‘rsatadi. Ammo, xonadoshning xatti-harakati haqiqatan ham tasodifiy bo‘lmasa ham, uni tasodifiy jarayon sifatida modellashtirish foydali bo‘lishi mumkin.

3.1.3 Birgalikdamas yoki o‘zaro istisno natijalar

Ikki natija **birgalikdamas** (birgalikda bo‘lmagan) yoki **o‘zaro istisno** deb ataladi, agar ular bir vaqtda sodir bo‘lishi mumkin bo‘lmasa. Masalan, agar biz kub tashlasak, `1` va `2` natijalari birgalikdamas hisoblanadi, chunki ular bir vaqtda yuzaga kelishi mumkin emas. Boshqa tomondan, `1` va “toq tushishi” natijalari birgalikda yuz berishi mumkin. Chunki agar tashlash natijasi `1` bo‘lsa, har ikkalasi ham yuz beradi. *Birgalikdamas* va *o‘zaro istisno* tushunchalari bir-biriga teng kuchli va bir-birining o‘rniga ishlatilishi mumkin.

Birgalikdamas natijalar ehtimolini hisoblash oson. Kub tashlaganda, `1` va `2` natijalari birgalikdamas bo‘lib, ushbu natijalardan birining yuzaga kelish ehtimolini ularning alohida ehtimollarini qo‘shish orqali hisoblaymiz:

$$P(\texttt{1 yoki 2}) = P(\texttt{1} \cup \texttt{2}) = P(\texttt{1}) + P(\texttt{2}) = 1/6 + 1/6 = 1/3.$$

Kubning `1`, `2`, `3`, `4`, `5` yoki `6` natijalari chiqishi ehtimoli ham birgalikdamas bo‘lib, biz ehtimolliklarni qo‘shamiz:

$$\begin{aligned} &P(\texttt{1 yoki 2 yoki 3 yoki 4 yoki 5 yoki 6}) \\ &\quad = P(\texttt{1}) + P(\texttt{2}) + P(\texttt{3}) + P(\texttt{4}) + P(\texttt{5}) + P(\texttt{6}) \\ &\quad = 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1. \end{aligned}$$

Qo‘shish qoidasi natijalar birgalikdamas bo‘lganda bu yondashuvning to‘g‘riligini kafolatlaydi.

BIRGALIKDAMAS NATIJALAR UCHUN QO‘SHISH QOIDASI

Agar A_1 va A_2 ikkita birgalikdamas natijalarni ifodalasa, unda ulardan birining sodir bo‘lish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi:

$$P(A_1 \text{ yoki } A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Agar ko‘plab birgalikdamas natijalar mavjud bo‘lsa, masalan, A_1, ..., A_k unda ushbu natijalarning birining sodir bo‘lish ehtimoli quyidagicha aniqlanadi:

$$P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k)\ .$$

3.7-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Biz `1`, `4` yoki `5` natijalarini olish ehtimolini hisoblamoqchimiz. (a) `1`, `4` va `5` natijalari nima uchun birgalikdamas ekanligini tushuntiring. (b) birgalikdamas natijalar uchun qo‘shish qoidasi yordamida $P(\texttt{1 yoki 4 yoki 5})$ ni aniqlang.[2]

3.8-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

`loans` ma’lumotlar to‘plamida (2-bob) `homeownership` o‘zgaruvchisi qarz oluvchining ijarada yashashi, ipoteka uyga egaligi yoki uyni o‘z mulkida ekanligini tasvirlaydi. 10000 qarz oluvchidan

[1] Mana to‘rtta misol. (i) Kimningdir kelasi oy kasal bo‘lishi yoki bo‘lmasligi tasodifiy jarayon bo‘lib, natijalari `kasal` va `kasal emas`. (ii) tasodifiy jarayonni yaratish uchun bir kishini tasodifiy tanlab, uning bo‘yini o‘lchash mumkin. Bu jarayonning natijasi musbat son bo‘ladi. (iii) Kelasi hafta fond bozori ko‘tariladi yoki tushadi, bu tasodifiy jarayon `ko‘tariladi`, `tushadi` va `o‘zgarmaydi` natijalari bilan ko‘rib chiqiladi. Shuningdek, fond bozorining o‘zgarishini foizlarda raqamli natija sifatida ishlatish mumkin edi. (iv) Xonadoshingiz bugun kechqurun idishlarni yuvadimi yoki yo‘qmi, bu tasodifiy jarayon bo‘lib tuyuladi va natijalar `idish yuvdi` va `idish yuvmadi`.

[2] (a) tasodifiy jarayon kub tashlash bo‘lib, bu natijalardan bir vaqtning o‘zida faqat bittasi yuzaga kelishi mumkin. Bu ularning birgalikdamas ekanligini anglatadi. (b) $P(\texttt{1 yoki 4 yoki 5}) = P(\texttt{1}) + P(\texttt{4}) + P(\texttt{5}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

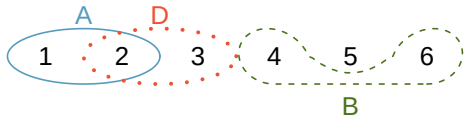
3858 tasi ijarada yashagan, 4789 tasi ipotekaga ega va 1353 tasi o'z uyiga ega bo'lgan.[3]

(a) ijara (`rent`), ipoteka (`mortgage`), va uy-joyga egalik (`own`) natijalari birgalikdami?

(b) Ipoteka va uy-joyga egalik qarzdorlar ulushini alohida hisoblang.

(c) birgalikdamas natijalar uchun qo'shish qoidasi yordamida tasodifiy tanlangan qarz ipoteka yoki uy-joyga ega bo'lgan shaxsga tegishli bo'lish ehtimolini hisoblang.

Ma'lumotlar bilan ishlaydigan olimlar kamdan-kam hollarda individual natijalar bilan ishlaydi. Buning o'rniga *natijalar to'plamlari* bilan shug'ullanadi. Keling, A hodisa kub tashlash natijasi `1` yoki `2` bo'lishini, B esa kub natijasi `4` yoki `6` bo'lishini ifodalasin. Biz A ni $\{$`1`, `2`$\}$ natijalar to'plami sifatida va $B = \{$`4`, `6`$\}$ sifatida yozamiz. Ushbu to'plamlar odatda **hodisa** deb ataladi. A va B umumiy elementlarga ega bo'lmagani uchun ular birgalikdamas hodisalar hisoblanadi. A va B 3.2-rasmda tasvirlangan.



3.2-rasm. Uchta hodisa A, B va D kub tashlash natijalaridan iborat. A va B birgalikdamas, chunki ular umumiy natijalarga ega emas.

Qo'shish qoidasi birgalikdamas natijalar va birgalikdamas hodisalar uchun qo'llaniladi. Birgalikdamas hodisalar A yoki B dan birining sodir bo'lish ehtimoli ularning alohida ehtimollari yig'indisiga teng:

$$P(A \text{ yoki } B) = P(A) + P(B) = 1/3 + 1/3 = 2/3.$$

3.9-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) Qo'shish qoidasi yordamida A hodisa ehtimoli $P(A)$ ni $1/3$ ga teng ekanligini tasdiqlang. (b) Xuddi shu usulda B hodisa uchun ham hisoblang.[4]

3.10-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) 3.2-rasmda tasvirlanganidek, D hodisa qaysi natijalarni ifodalaydi? (b) B va D hodisalari birgalikdami? (c) A va D hodisalari birgalikdami?[5]

3.11-YO'NALTIRILGAN MASHQ

3.10-yo'naltirilgan mashg'ulotida siz 3.2-rasmda B va D hodisalarining birgalikdamas ekanligini tasdiqladingiz. B yoki D hodisa sodir bo'lish ehtimolini hisoblang.[6]

3.1.4 Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimolliklari

Keling, 52 talik odatiy kartalar to'plamida birgalikdamas ikkita hodisa uchun hisob-kitoblarni ko'rib chiqamiz. Bular 3.3-rasmda tasvirlangan. Agar odatiy karta to'plami bilan tanish bo'lmasangiz, izohni qarang.[7]

3.3-rasmda o'yin kartalarining to'liq to'plami tasvirlangan. Ushbu rasmda kartalar shakllari (mastlari) ketma-ket qatorlar ko'rinishida joylashtirilgan. Quyida har bir shaklning o'zbek tilidagi nomi va uning 3.3-rasmdagi vizual ifodasi izohlanadi. Xususan, birinchi qatorda `chillak` (g'ola) (♣), ikkinchi qatorda `g'isht` (olmos) (♢) , uchinchi qator `toppon` (qalb, yurak) (♡) va to'rtinchi

[3](a) Ha. Har bir qarz faqat `homeownership` o'zgaruvchisining bitta toifasiga kiradi. (b) Ipoteka: $\frac{4789}{10000} = 0{,}479$. O'z uyi: $\frac{1353}{10000} = 0{,}135$. (c) $P($`ipoteka` yoki `egalik`$) = P($`ipoteka`$) + P($`egalik`$) = 0{,}479 + 0{,}135 = 0{,}614$.

[4](a) $P(A) = P($`1` yoki `2`$) = P($`1`$) + P($`2`$) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. (b) Xuddi shu tarzda, $P(B) = 1/3$.

[5](a) Natijalar: `2` va `3`. (b) Ha, B va D hodisalari birgalikdamas, chunki ular umumiy natijalarga ega emas. (c) A va D hodisalari umumiy natija `2` ga ega, shuning uchun ular birgalikda.

[6]Chunki B va D birgalikdamas hodisalar, Qo'shish qoidasi qo'llaniladi: $P(B$ yoki $D) = P(B) + P(D) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

[7]52 ta karta to'rtta shaklga bo'linadi: ♣ (chillak), ♢ (g'isht), ♡ (tappon), ♠ (qarg'a). Har bir shakl 13 ta kartaga ega: `2`, `3`, ... , `10`, `J` (valet), `Q` (malika), `K` (qirol) va `A` (tuz). Shu bilan birga, har bir karta shakl va belgining o'ziga xos kombinatsiyasidir, masalan, 4♡ va J♣. Valet, malika va qirollar bilan ifodalangan 12 ta karta `suratli kartalar` deb ataladi. ♢ yoki ♡ bo'lgan kartalar odatda qizil rangda bo'ladi, qolgan ikkita shakl esa qora rangda bo'ladi.

2♣	3♣	4♣	5♣	6♣	7♣	8♣	9♣	10♣	J♣	Q♣	K♣	A♣
2♢	3♢	4♢	5♢	6♢	7♢	8♢	9♢	10♢	J♢	Q♢	K♢	A♢
2♡	3♡	4♡	5♡	6♡	7♡	8♡	9♡	10♡	J♡	Q♡	K♡	A♡
2♠	3♠	4♠	5♠	6♠	7♠	8♠	9♠	10♠	J♠	Q♠	K♠	A♠

3.3-rasm. Kartalar to‘plamidagi 52 ta karta tasviri.

qatorda esa `qarg‘a` (qilich) (♠) shakliga mansub kartalar ko‘rsatilgan.

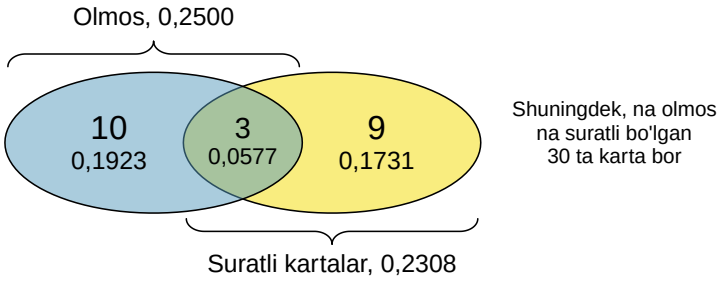
Bundan tashqari, kartalar ikki asosiy turga ajratiladi: suratli kartalar va suratli bo‘lmagan kartalar. Suratli kartalarga valet (`J`), dama (malika) (`Q`) va qirol (`K`) kiradi, suratli bo‘lmagan kartalar esa raqamli kartalardan va tuzdan (`A`) iborat. Ushbu farqlash kartalar tuzilishini to‘g‘ri tushunishga yordam beradi va 3.3-rasmni talqin qilishni osonlashtiradi.

Y

3.12-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

(a) Tasodifiy tanlangan karta g‘isht bo‘lish ehtimoli qanday? (b) Tasodifiy tanlangan karta suratli karta bo‘lish ehtimoli qanday?[8]

Venn diagrammalari natijalarni ikki yoki uchta o‘zgaruvchi, atribut yoki tasodifiy jarayon uchun “ichida” yoki “tashqarida” sifatida tasniflashda foydali. 3.4-rasmdagi Venn diagrammasida bir doira g‘ishtlarni, ikkinchisi esa suratli kartalarni ifodalaydi. Agar bir karta g‘isht va suratli karta bo‘lsa, u doiralar kesishmasiga tushadi. Agar karta g‘isht bo‘lib, suratli karta bo‘lmasa, u chap doiraning o‘ng doira bilan kesishmaydigan qismiga tushadi (va hokazo). G‘isht bo‘lgan kartalar soni g‘isht doirasidagi kartalar umumiy soni bilan berilgan: $10 + 3 = 13$. Ehtimollar ham ko‘rsatilgan (masalan, $10/52 = 0{,}1923$).



3.4-rasm. Olmoslar (yoki g‘ishtlar) va suratli kartalar uchun Venn diagrammasi.

A yordamida tasodifiy tanlangan karta g‘isht bo‘lish hodisasini, B bilan esa suratli karta bo‘lish hodisasini belgilaymiz. $P(A \text{ yoki } B)$ ni qanday hisoblaymiz? A va B hodisalari kesishadi – $J♢$, $Q♢$ va $K♢$ kartalari ikkala toifaga ham kiradi – shuning uchun biz kesishadigan hodisalar uchun qo‘shish qoidasidan foydalana olmaymiz. Buning o‘rniga Venn diagrammasidan foydalanamiz. Dastlab, ikkala hodisa ehtimollarini qo‘shamiz:

$$P(A) + P(B) = P(♢) + P(\text{suratli karta}) = 13/52 + 12/52 \ .$$

Biroq, ikkala hodisadagi uchta karta – ikkala ehtimolda ham ishtirok etgan. Ya’ni ikki marta hisoblangan. Biz bu ikki marta hisoblashni tuzatishimiz kerak:

$$\begin{aligned} P(A \text{ yoki } B) &= P(♢ \text{ yoki suratli karta}) \\ &= P(♢) + P(\text{suratli karta}) - P(♢ \text{ va suratli karta}) \\ &= 13/52 + 12/52 - 3/52 \\ &= 22/52 = 11/26 \ . \end{aligned}$$

Ushbu tenglama **umumiy qo‘shish qoidasi**ga misoldir.

[8] (a) 52 ta kartada jami 13 ta g‘ishtli karta mavjud. Agar kartalar yaxshilab aralashtirilgan bo‘lsa, har bir kartani tanlash ehtimoli bir xil, shuning uchun tasodifiy tanlangan karta g‘isht bo‘lish ehtimoli $P(♢) = \frac{13}{52} = 0{,}250$. (b) Xuddi shunday, 12 ta suratli karta mavjud, shuning uchun $P(\text{suratli karta}) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13} = 0{,}231$.

UMUMIY QO'SHISH QOIDASI

Agar A va B har qanday ikkita hodisa bo'lsa (kesishadigan yoki kesishmaydigan), unda hech bo'lmaganda bittasi sodir bo'lish ehtimoli:

$$P(A \text{ yoki } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ va } B)$$

bu yerda $P(A \text{ va } B)$ ikkala hodisaning ham sodir bo'lish ehtimoli.

IZOH: "yoki" inklyuzivdir

Statistikada biz "yoki" deb yozsak, agar boshqacha ko'rsatilmagan bo'lsa "va/yoki" ni nazarda tutamiz. Shunday qilib, A yoki B sodir bo'lishi A, B yoki ikkalasi (A va B birgalikda) sodir bo'lishi deganidir.

3.13-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) Agar A va B kesishmaydigan bo'lsa, nima uchun $P(A \text{ va } B) = 0$ bo'lishini tushuntiring. (b) yuqoridagi (a) qismdan foydalangan holda, umumiy qo'shish qoidasining A va B kesishmaydigan bo'lganda oddiy qo'shish qoidasiga soddalashishini tasdiqlang.[9]

3.14-YO'NALTIRILGAN MASHQ

`loans` ma'lumotlar to'plamida 10000 ta kredit tasvirlangan, 1495 ta kredit qo'shma arizalardan (masalan, juftlik birgalikda murojaat qilgan), 4789 ta murojaat qiluvchining ipotekasi bo'lgan, va 950 tasi ushbu ikkala xususiyatga ega edi. Ushbu vaziyat uchun Venn diagrammasini yarating.[10]

3.15-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) 3.14-yo'naltirilgan mashqdagi Venn diagrammadan foydalanib, tasodifiy tanlangan kredit `loans` ma'lumotlar to'plamidan ipotekaga ega bo'lgan juftlikning qo'shma arizasidan ekanligini aniqlang. (b) Kredit ushbu xususiyatlardan hech bo'lmaganda biriga ega bo'lish ehtimoli qanday?[11]

3.1.5 Ehtimollik taqsimotlari

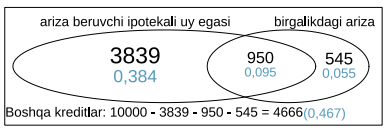
Ehtimollik taqsimoti – bu barcha birgalikdamas natijalar va ularga tegishli ehtimollarning jadvali. 3.5-rasmda ikkita kub yig'indisi uchun ehtimollik taqsimoti tasvirlangan.

Kublar yig'indisi	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ehtimollik	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

3.5-rasm. Ikkita kub yig'indisi uchun ehtimollik taqsimoti.

[9] (a) Agar A va B kesishmaydigan bo'lsa, A va B hech qachon bir vaqtning o'zida sodir bo'la olmaydi. (b) Agar A va B kesishmaydigan bo'lsa, unda umumiy qo'shish qoidasidagi $P(A \text{ va } B)$ oxirgi qismi 0 ga teng ((a) qismga qarang) va bizda kesishmaydigan voqealar uchun qo'shish qoidasigina qoladi.

[10] Faqat ipotekali uyga tegishli ehtimollar (masalan, 3839/10000 = 0,384) ko'rsatilgan. Chap doira bilan ifodalangan kreditlar soni 3839 + 950 = 4789 ga, va o'ng doira bilan ifodalangan kreditlar soni 950 + 545 = 1495 ga teng.



[11] (a) Yechim ikki doiraning kesishmasi bilan ifodalanadi: 0,095. (b) Bu doiralarda ko'rsatilgan uchta kesishmaydigan ehtimollarning yig'indisi: 0,384 + 0,095 + 0,055 = 0,534 (yaxlitlash xatosi tufayli 0,001 ga farq qilishi mumkin).

EHTIMOLLIK TAQSIMOTI QOIDALARI

Ehtimollik taqsimoti, quyidagi uchta qoidaga bo‘ysunadigan, mumkin bo‘lgan natijalar va ularga mos ehtimolliklar ro‘yxatidir:

1. Ro‘yxatdagi natijalar birgalikda bo‘lmasligi kerak;
2. Har bir ehtimollik 0 va 1 oralig‘ida bo‘lishi kerak;
3. Ehtimolliklarning yig‘indisi 1 ga teng bo‘lishi kerak.

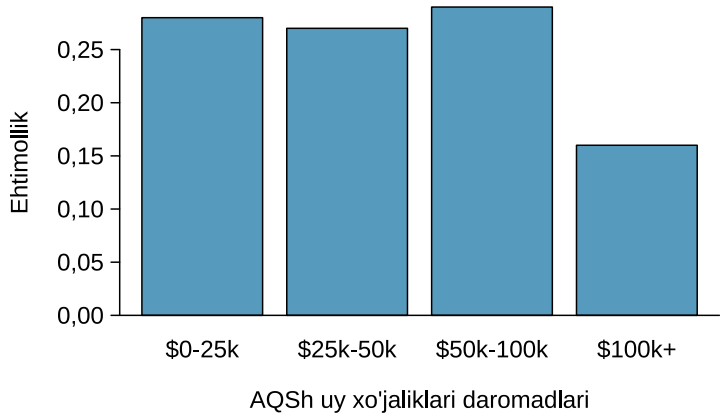
Y **3.16-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.6-rasm AQShdagi uy xo‘jaliklari daromadlari uchun uchta taqsimotni taklif qiladi. Faqat bittasi to‘g‘ri. Qaysi biri to‘g‘ri? Qolganlari nima uchun noto‘g‘ri?[12]

Daromad diapazoni	$0-25k	$25k-50k	$50k-100k	$100k+
(a)	0,18	0,39	0,33	0,16
(b)	0,38	−0,27	0,52	0,37
(c)	0,28	0,27	0,29	0,16

3.6-rasm. AQShdagi uy xo‘jaliklari daromadlari uchun taklif qilingan taqsimotlar.

1-bobda ma’lumotlarni tezkor xulosa chiqarish uchun grafikli tasvirlashning muhimligi ta’kidlangan edi. Ehtimollik taqsimotlarini ham ustunli diagramma yordamida qisqacha ko‘rsatish mumkin. Masalan, AQSh uy xo‘jaliklari daromadlari taqsimoti 3.7-rasmda ustunli diagramma sifatida tasvirlangan. Ikkita kub yig‘indisi uchun ehtimollik taqsimoti 3.5-rasmda va uning ustunli diagramma ko‘rinishi 3.8-rasmda tasvirlangan.



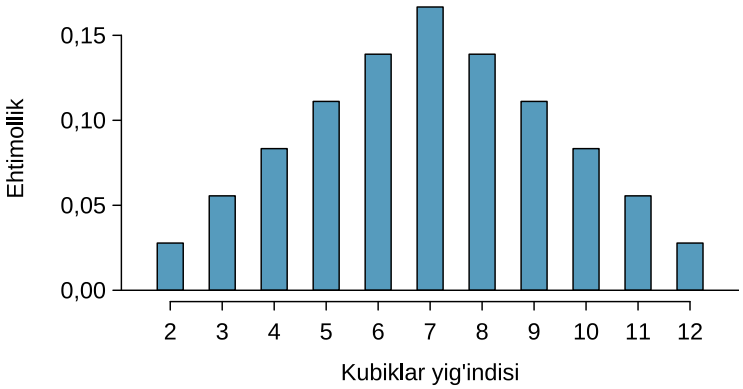
3.7-rasm. AQShdagi uy xo‘jaliklari daromadlari uchun ehtimollik taqsimoti.

Ushbu ustunli diagrammalarda, ustunlarning balandligi natijalar ehtimollarini ifodalaydi. Agar natijalar raqamli va diskret bo‘lsa, ikkita kub yig‘indisi holatidagi kabi, gistogrammaga o‘xshash ustunli diagrammani tuzish odatda qulay bo‘ladi. Ustunlarning mos joylashuvlarda tasvirlangan yana bir misoli 3.18-rasmda (113-sahifa) ko‘rsatilgan.

3.1.6 Hodisaning to‘ldiruvchisi

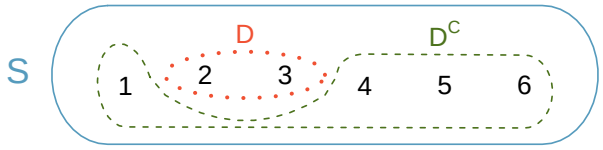
Kub tashlash natija sifatida $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ to‘plamini hosil qiladi. Ushbu barcha mumkin bo‘lgan natijalarning to‘plami kub tashlash uchun **elementar hodisalar fazosi** deb ataladi. Biz ko‘pincha elementar hodisalar fazosidan voqea yuz bermagan holatni o‘rganish uchun foydalanamiz. Tasodifiy kub tashlash natijasi 2 yoki 3 bo‘lishi hodisasini $D = \{2, 3\}$ deb belgilaymiz. Unda D ning

[12] (a)-dagi ehtimolliklar yig‘indisi 1 ga teng emas. (b)-dagi ikkinchi ehtimollik manfiy. Faqat (c) qoladi va u ehtimollik taqsimoti talablariga mos keladi. Uchta taqsimotdan biri AQShdagi uy xo‘jaliklari daromadlarining haqiqiy taqsimoti deb aytilgan. Shuning uchun bu (c) bo‘lishi kerak.



3.8-rasm. Ikkita kub yig'indisi uchun ehtimollik taqsimoti.

to'ldiruvchisi (yoki teskarisi) muqarrar hodisa (elementar hodisalar fazosi)dagi D ga kirmaydigan barcha natijalarni ifodalaydi va $D^c = \{1, 4, 5, 6\}$ deb yoziladi. Ya'ni, D^c hodisa D ga kiritilmagan barcha mumkin bo'lgan natijalar to'plamidir. 3.9-rasmda D, D^c va muqarrar hodisa S o'rtasidagi munosabatlar tasvirlangan.



3.9-rasm. $D = \{2, 3\}$ hodisa va uning to'ldiruvchisi $D^c = \{1, 4, 5, 6\}$. S muqarrar hodisa (elementar hodisalar fazosi)ni ifodalaydi, bu barcha mumkin bo'lgan natijalar to'plamidir.

3.17-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) $P(D^c) = P(1, 4, 5 \text{ yoki } 6)$ ni hisoblang. (b) $P(D) + P(D^c)$ ni hisoblang?[13]

3.18-YO'NALTIRILGAN MASHQ

85-sahifadagi 3.2-rasmda $A = \{1, 2\}$ va $B = \{4, 6\}$ hodisalari tasvirlangan. (a) A^c va B^c nimani ifodalaydi? (b) $P(A^c)$ va $P(B^c)$ ni hisoblang. (c) $P(A) + P(A^c)$ va $P(B) + P(B^c)$ ni hisoblang.[14]

Hodisa A ning to'ldiruvchisi A^c ikkita juda muhim xossaga ega: (i) A ga kirmaydigan har bir mumkin bo'lgan natija A^c ga kiradi va (ii) A va A^c birgalikdamas. (i) xossa quyidagini anglatadi:

$$P(A \text{ yoki } A^c) = 1 \ .$$

Ya'ni, agar natija A ga kirmasa, u A^c da bo'lishi kerak. Birgalikdamas hodisalar uchun qo'shish qoidasidan foydalangan holda, (ii)-xossani qo'llaymiz:

$$P(A \text{ yoki } A^c) = P(A) + P(A^c) \ .$$

So'nggi ikkita tenglamani birlashtirish hodisa va uning to'ldiruvchisi ehtimolligi o'rtasida juda foydali bog'liqlikni beradi.

[13](a) Hodisalar birgalikda emas, har biri 1/6 ehtimolga ega, shuning uchun umumiy ehtimol $4/6 = 2/3$. (b) Shuningdek, $P(D) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1/3$. D va D^c birgalikda emas bo'lgani uchun, $P(D) + P(D^c) = 1$.

[14]Qisqa yechimlar: (a) $A^c = \{3, 4, 5, 6\}$ va $B^c = \{1, 2, 3, 5\}$. (b) Har bir hodisa birgalikdamas ekanligini hisobga olib, hodisa ehtimollarini qo'shing: $P(A^c) = 2/3$ va $P(B^c) = 2/3$. (c) A va A^c birgalikdamas va B va B^c uchun ham shunday. Shuning uchun, $P(A) + P(A^c) = 1$ va $P(B) + P(B^c) = 1$.

TO‘LDIRUVCHI

A hodisaning to‘ldiruvchisi A^c bilan belgilanadi va A^c hodisa A ga kirmaydigan barcha natijalarni ifodalaydi. A va A^c matematik jihatdan quyidagicha bog‘langan:

$$P(A) + P(A^c) = 1, \quad \text{ya'ni} \quad P(A) = 1 - P(A^c) \ .$$

Oddiy misollarda A yoki A^c ni hisoblash bir necha qadamda amalga oshirilishi mumkin. Ammo, masalalar murakkablashganida, to‘ldiruvchidan foydalanish ko‘p vaqtni tejashi mumkin.

Y **3.19-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

A hodisa ikkita kub tashlanganda, ularning yig‘indisi 12 dan kichik bo‘lgan holatni ifodalaydi. (a) A^c hodisa nimani anglatadi? (b) $P(A^c)$ ni 3.5-rasmdan (87-sahifa) foydalanib hisoblang. (c) $P(A)$ ni aniqlang.[15]

Y **3.20-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ikki kub tashlash uchun quyidagi ehtimollarni aniqlang:[16]

(a) kub yig‘indisi 6 emas.

(b) Yig‘indi kamida 4 ga teng. Ya'ni, $B = \{4, 5, ..., 12\}$ hodisaning ehtimolini aniqlang.

(c) Yig‘indi 10 dan oshmasligi kerak. Ya'ni, $D = \{2, 3, ..., 10\}$ hodisaning ehtimolini aniqlang.

3.1.7 Bog‘liqsizlik

Xuddi o‘zgaruvchilar va kuzatuvlar bog‘liqsiz bo‘lishi mumkin bo‘lgani kabi, tasodifiy hodisalar ham bog‘liqsiz bo‘lishi mumkin. Agar bir hodisa natijasini bilish ikkinchi hodisa natijasiga oid hech qanday foydali ma'lumot bermasa, bu hodisalar **bog‘liqsiz** deb ataladi. Masalan, tangani tashlash va kubni tashlash ikki bog‘liqsiz hodisadir – tangada gerb tushganini bilish kub tashlash natijasini aniqlashga yordam bermaydi. Boshqa tomondan, aksiya narxlarini olsak, ular odatda birgalikda ko‘tariladi yoki tushadi. Shuning uchun ularni bog‘liqsiz deb bo‘lmaydi.

3.5-misol ikkita kubning tashlanishiga oid bog‘liqsiz hodisa misolini taqdim etadi. Har ikkala kubda ham 1 chiqishi ehtimolini aniqlamoqchimiz. Faraz qilaylik, kublardan biri qizil, ikkinchisi oq. Agar qizil kub natijasi 1 bo‘lsa, bu oq kub natijasi haqida hech qanday ma'lumot bermaydi. Ushbu savolni biz ilk bor 3.5-misol (82-sahifa) da ko‘rib chiqdik va ehtimolni quyidagi mantiq yordamida hisobladik: tashlashlarning 1/6 qismida qizil kub 1 va tashlashlarning 1/6 qismida oq kub ham 1 bo‘ladi. Bu holat 3.10-rasmda ko‘rsatilgan. Tashlashlar bog‘liqsiz bo‘lgani uchun, tegishli natijalarning ehtimolliklarini yakuniy javobni olish uchun ko‘paytirish mumkin: $(1/6) \times (1/6) = 1/36$. Ushbu mantiqni ko‘plab bog‘liqsiz hodisa(jarayon)larga umumlashtirish mumkin.

M **3.21-MISOL**

Agar ikkitasidan boshqa bog‘liqsiz ko‘k kub ham bo‘lsa-chi? Uchta kubni tashlashda hammasida 1 tushish ehtimoli qanday?

Xuddi shu mantiq 3.5-misolda qo‘llaniladi. Agar 1/36 qismida oq va qizil kublar ikkalasida ham 1 tushsa, unda o‘sha holatlarning 1/6 qismida ko‘k kubda ham 1 tushadi, shuning uchun ko‘paytiramiz:

$$\begin{aligned} P(\text{oq} = 1 \text{ va qizil} = 1 \text{ va ko‘k} = 1) &= P(\text{oq} = 1) \times P(\text{qizil} = 1) \times P(\text{ko‘k} = 1) \\ &= (1/6) \times (1/6) \times (1/6) = 1/216. \end{aligned}$$

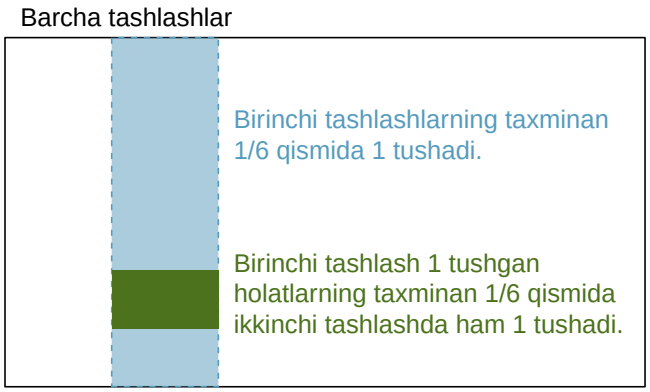
3.21-misol bog‘liqsiz hodisalar uchun ko‘paytirish qoidasini namoyish etadi.

[15] (a) A ning to‘ldiruvchisi yig‘indi 12 ga teng bo‘lgan holat. (b) $P(A^c) = 1/36$. (c) To‘ldiruvchining ehtimolidan foydalanib $P(A^c) = 1/36$ ni olamiz. Tenglama bo‘yicha $P(12 \text{ dan kichik}) = 1 - P(12) = 1 - 1/36 = 35/36$.

[16] (a) Avval $P(6) = 5/36$ ni toping, so‘ngra to‘ldiruvchidan foydalaning $P(6 \text{ emas}) = 1 - P(6) = 31/36$.

(b) Avval to‘ldiruvchisini toping, bu kamroq vaqt talab qiladi: $P(2 \text{ yoki } 3) = 1/36 + 2/36 = 1/12$. Keyin $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 1/12 = 11/12$.

(c) Xuddi avvalgidek, to‘ldiruvchisini topish orqali $P(D)$ ni hisoblang. Avval $P(D^c) = P(11 \text{ yoki } 12) = 2/36 + 1/36 = 1/12$ ni toping. Keyin $P(D) = 1 - P(D^c) = 11/12$.



3.10-rasm. Tashlashlarning 1/6 qismida `1` tushadi. Keyin shu holatlarning 1/6 qismida ikkinchi tashlash ham `1` bo'ladi.

BOG'LIQSIZ HODISALAR UCHUN KO'PAYTIRISH QOIDASI

Agar A va B ikki turli va bog'liqsiz hodisalarni ifodalasa, unda har ikkala A va B hodisalarning sodir bo'lish ehtimolini ularning alohida ehtimolliklarining ko'paytmasi sifatida hisoblash mumkin:

$$P(A \text{ va } B) = P(A) \times P(B).$$

Xuddi shuningdek, agar A_1, ..., A_k hodisalar k ta bog'liqsiz hodisalar bo'lsa, unda ularning barchasini sodir bo'lish ehtimoli quyidagiga teng bo'ladi:

$$P(A_1) \times P(A_2) \times \cdots \times P(A_k).$$

3.22-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Taxminan 9% odamlar chap qo'l bilan yozadi. Faraz qilaylik, AQSh aholisidan 2 kishi tasodifiy tanlanadi. Tanlanma hajmi aholi soniga nisbatan juda kichik bo'lganligi sababli, bu ikki kishini bog'liqsiz deb faraz qilish mumkin. (a) Ikkalasini ham chap qo'l bilan yozish ehtimoli qanday? (b) Ikkalasini ham o'ng qo'l bilan yozish ehtimoli qanday?[17]

3.23-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Faraz qilaylik, 5 kishi tasodifiy tanlandi.[18]

(a) Hammasining o'ng qo'l bilan yozish ehtimoli qancha?

(b) Hammasining chap qo'l bilan yozish ehtimoli qancha?

(c) Barcha kishilar o'ng qo'l bilan yozmaydi, degan taxmin ehtimoli qancha?

[17] (a) Birinchi kishining chap qo'l bilan yozish ehtimoli 0,09 va bu ikkinchi kishi uchun ham bir xil. Bog'liqsiz hodisalar uchun ko'paytirish qoidasini qo'llab, ikkalasi ham chap qo'l bilan yozish ehtimolini aniqlaymiz: $0{,}09 \times 0{,}09 = 0{,}0081$.

(b) Odamlarning ikkala qo'l bilan yozadiganlari ulushi (ambidextrous) deyarli 0 ga teng deb faraz qilish mumkin. Bu esa $P(\text{o'ng qo'l}) = 1 - 0{,}09 = 0{,}91$ natijani beradi. (a) qismidagi mantiqni ishlatib, ikkalasi ham o'ng qo'l bilan yozish ehtimolini hisoblaymiz: $0{,}91 \times 0{,}91 = 0{,}8281$.

[18] (a) `O'Q` va `ChQ` qisqartmalari mos ravishda o'ng qo'l va chap qo'l uchun ishlatiladi. Har bir kishi bog'liqsiz bo'lgani uchun, Bog'liqsiz hodisalar uchun ko'paytirish qoidasi qo'llaniladi:

$$\begin{aligned} P(\text{besh kishining ham } \texttt{O'Q}) &= P(\text{birinchi} = \texttt{O'Q}, \text{ikkinchi} = \texttt{O'Q}, \ldots, \text{beshinchi} = \texttt{O'Q}) \\ &= P(\text{birinchi} = \texttt{O'Q}) \times P(\text{ikkinchi} = \texttt{O'Q}) \times \cdots \times P(\text{beshinchi} = \texttt{O'Q}) \\ &= 0{,}91 \times 0{,}91 \times 0{,}91 \times 0{,}91 \times 0{,}91 = 0{,}624\ . \end{aligned}$$

(b) (a)-qismidagi mantiqni ishlatib, $0{,}09 \times 0{,}09 \times 0{,}09 \times 0{,}09 \times 0{,}09 = 0{,}0000059$.

(c) Komplementni, ya'ni $P(\text{besh kishining ham } \texttt{O'Q})$ ni qo'llab, ushbu savolga javob bering:

$$P(\text{besh kishining ham } \texttt{O'Q} \text{ emasligi}) = 1 - P(\text{besh kishining ham } \texttt{O'Q}) = 1 - 0{,}624 = 0{,}376\ .$$

Faraz qilaylik, `qo‘li ustunligi` (`handedness`) va `jinsi` (`sex`) o‘zgaruvchilari bog‘liqsiz, ya’ni kimningdir `jinsi` haqida bilish uning `qo‘li ustunligi` haqida hech qanday foydali ma’lumot bermaydi va aksincha. Keyin tasodifiy tanlangan kishi o‘ng qo‘l bilan yozadigan va ayol bo‘lish ehtimolini hisoblash mumkin.[19] Bog‘liqsiz hodisalar uchun ko‘paytirish qoidasi yordamida:

$$\begin{aligned} P(\text{o‘ng qo‘l bilan yozadigan va ayol}) &= P(\text{o‘ng qo‘l bilan yozadigan}) \times P(\text{ayol}) \\ &= 0{,}91 \times 0{,}50 = 0{,}455. \end{aligned}$$

Y **3.24-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Uch kishi tasodifiy tanlandi.[20]

(a) Dastlabki kishi erkak va o‘ng qo‘l bilan yozuvchi bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Dastlabki ikkata kishi erkak va o‘ng qo‘l bilan yozuvchi bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Uchinchi kishi ayol va chap qo‘l bilan yozuvchi bo‘lish ehtimoli qancha?

(d) Dastlabki ikkata kishi erkak va o‘ng qo‘l bilan yozuvchi, uchinchi kishi esa ayol va chap qo‘l bilan yozuvchi bo‘lish ehtimoli qancha?

Ba’zida biz bir hodisa boshqa hodisa haqida foydali ma’lumot beradimi, deb qiziqamiz. Bizning savolimiz shuki, ikkita hodisaning sodir bo‘lishi bir-biriga bog‘liqmi? Agar ikkita hodisa A va B quyidagi shartni qanoatlantirsa, ular bog‘liqsiz deyiladi: $P(\text{A va B}) = P(A) \times P(B)$.

M **3.25-MISOL**

Kartalar to‘plamini aralashtirib, bir kartani tortganimizda, kartaning `tappon` (♡) bo‘lishi va bir vaqtda tuz bo‘lishi hodisalari bir-biriga bog‘liqsizmi?

Kartaning tappon ♡ bo‘lish ehtimoli $1/4$ va uning tuz bo‘lish ehtimoli $1/13$. Kartaning tuz tappon (♡ va tuz) bo‘lish ehtimoli $1/52$. Quyidagilarni tekshiramiz: $P(A \text{ va } B) = P(A) \times P(B)$ bajariladimi?

$$P(\heartsuit) \times P(\text{tuz}) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52} = P(\heartsuit \text{ va tuz}).$$

Tenglama to‘g‘ri bo‘lganligi sababli, kartaning tappon va tuz bo‘lishi hodisalari bog‘liqsiz hodisalardir.

Mashqlar

3.1 To‘g‘ri yoki noto‘g‘ri. Quyidagi bayonotlar to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang va fikringizni izohlang.

(a) Agar simmetrik (adolatli) tanga ko‘p marta tashlansa va so‘nggi sakkiz tashlashning barchasi gerb bo‘lsa, keyingi tashlashda gerb tushish ehtimoli 50% dan kamroq.

(b) To‘liq kartalar to‘plamidan rasmli karta (valet, malika yoki qirol)ni tortib olish va qizil kartani tortib olish bir-biriga mos kelmaydigan hodisalardir.

(c) To‘liq kartalar to‘plamidan rasmli kartani tortib olish va tuzni tortib olish bir-biriga mos kelmaydigan hodisalardir.

3.2 Ruletka g‘ildiragi. Ruletka o‘yini 38 uyaga ega bo‘lgan g‘ildirakni aylantirishni o‘z ichiga oladi. Unda 18 ta qizil, 18 ta qora va 2 ta yashil. G‘ildirakka to‘p tashlanadi va u oxir-oqibat bir uyaga tushadi. Har bir uyaning to‘pni tutib olish ehtimoli tengdir.

---

[19] AQSh aholisining `ayol` jinsida bo‘lganlarning haqiqiy ulushi taxminan 50% ni tashkil qiladi, shuning uchun biz ayolni tanlash ehtimoli uchun 0,5 dan foydalanamiz. Biroq, bu ehtimol boshqa mamlakatlarda farq qilishi mumkin.

[20] Qisqa javoblar keltirilgan. (a) Bu ehtimolni quyidagicha yozish mumkin: $P(\text{tasodifiy tanlangan kishi erkak va o‘ng qo‘l bilan yozuvchi}) = 0{,}455$. (b) 0,207. (c) 0,045. (d) 0,0093.

(a) Agar ruletka g'ildiragini ketma-ket 3 marta aylantirsangiz va to'p har safarda qizil uyaga tushsa, keyingi aylantirishda to'p qizil uyaga tushish ehtimoli qancha?
(b) Agar ruletka g'ildiragini ketma-ket 300 marta aylantirsangiz va to'p har safarda qizil uyaga tushsa, keyingi aylantirishda to'p qizil uyaga tushish ehtimoli qancha?
(c) (a) va (b) qismlariga bergan javoblaringizga bir xil darajada ishonasizmi? Nima uchunligini tushuntiring.



Håkan Dahlström tomonidan fotosurat (http://flic.kr/p/93fEzp) CC BY 2.0 license

3.3 To'rt o'yin, bitta g'olib. Quyida bitta o'yinning to'rt xil versiyasi keltirilgan. Sizning asosiy raqibingiz o'yinning qaysi versiyasini tanlashni hal qiladi, keyin esa siz tangani 10 marta yoki 100 marta tashlashni tanlaysiz. Har bir o'yinni o'ynash narxi \$1. Har bir versiya uchun necha marta tanga tashlashni tanlashingiz kerakligini aniqlang. Fikringizni tushuntiring.

(a) Agar gerbning ulushi 0,60 dan katta bo'lsa, \$1 yutasiz.
(b) Agar gerbning ulushi 0,40 dan katta bo'lsa, \$1 yutasiz.
(c) Agar gerbning ulushi 0,40 va 0,60 orasida bo'lsa, \$1 yutasiz.
(d) Agar gerbning ulushi 0,30 dan kichik bo'lsa, \$1 yutasiz.

3.4 Narda o'yini. Narda o'yini bu ikki o'yinchi uchun mo'ljallangan stol o'yini bo'lib, bunda o'yin figuralari ikkita kubni tashlash natijasiga ko'ra harakatlanadi. O'yinchilar o'z figuralarini taxtadan olib tashlash orqali g'alaba qozonadi, shuning uchun odatda katta raqamlarni tashlash foydali. Do'stingiz bilan narda o'yini o'ynayapsiz va birinchi tashlashda ikkita 6, ikkinchi tashlashda ham ikkita 6 tashladingiz. Do'stingiz birinchi tashlashda ikkita 3 va ikkinchi tashlashda ham ikkita 3 tashladi. Do'stingiz ikki marta ketma-ket ikkita 6 tushishi imkonsiz ekanligini aytib, sizni aldashda aybladi. Ehtimollikdan foydalanib, sizning tashlashlaringiz do'stingiznikidan ko'ra ehtimoliyroq emasligini ko'rsating.

3.5 Tanga tashlash. Agar simmetrik (adolatli) tanga 10 marta tashlansa, quyidagi hodisalarning ehtimolligi qancha?

(a) Faqat gerb tushish ehtimoli?
(b) Faqat raqam tushish ehtimoli?
(c) Hech bo'lmaganda bir marta gerb tushish ehtimoli?

3.6 Kublarni tashlash. Agar simmetrik (adolatli) ikkita kubning natijalari yig'indisini hisoblasak, quyidagi ehtimolliklar qanday?

(a) Natijalar yig'indisi 1 bo'lish ehtimoli?
(b) Natijalar yig'indisi 5 bo'lish ehtimoli?
(c) Natijalar yig'indisi 12 bo'lish ehtimoli?

3.7 O'zgaruvchan saylovchilar. "Pew Research" tomonidan 2373 nafar tasodifiy tanlangan ro'yxatga olingan saylovchilardan ularning siyosiy mansubligi (respublikachi, demokrat yoki mustaqil) va o'zlarini o'zgaruvchan saylovchi sifatida biladimi yoki yo'qmi so'raldi. Respondentlarning 35% o'zlarini mustaqil deb hisoblaydilar, 23% o'zgaruvchan saylovchi va 11% ikkalasini birgalikda keltirishgan.[21]

(a) Mustaqil bo'lish va o'zgaruvchan saylovchi bo'lish birgalikda bo'lmagan hodisalarmi?
(b) O'zgaruvchilar va ularning tegishli ehtimolliklarini aks ettiruvchi Venn diagrammasini chizing.
(c) Saylovchilarning qancha foizi mustaqil, ammo o'zgaruvchan saylovchi emas?
(d) Saylovchilarning qancha foizi mustaqil yoki o'zgaruvchan saylovchi?
(e) Saylovchilarning qancha foizi na mustaqil, na o'zgaruvchan saylovchi?
(f) Biror kishining o'zgaruvchan saylovchi bo'lish hodisasi va uning siyosiy mustaqil bo'lish hodisasi bir-biriga bog'liqsizmi?

3.8 Qashshoqlik va til. Amerika hamjamiyati so'rovi jamoalarga sarmoya kiritish va xizmatlarni rejalashtirish uchun zarur bo'lgan dolzarb ma'lumotlarni taqdim etish uchun har yili o'tkaziladigan so'rovdir. 2010-yilgi so'rov natijalariga ko'ra, amerikaliklarning 14,6% qashshoqlik chegarasidan pastda yashaydi, 20,7% uyda ingliz tilidan boshqa tilda gapiradi va 4,2% ikkala toifaga kiradi.[22]

[21] Pew Research Center, With Voters Focused on Economy, Obama Lead Narrows, data collected between April 4-15, 2012.
[22] U.S. Census Bureau, 2010 American Community Survey 1-Year Estimates, Characteristics of People by Language Spoken at Home.

(a) Qashshoqlik chegarasidan pastda yashash va uyda xorijiy tilda gapirish birgalikda bo‘lmagan hodisalarmi?

(b) O‘zgaruvchilar va ularning tegishli ehtimolliklarini aks ettiruvchi Venn diagrammasini chizing.

(c) Amerikaliklarning qancha foizi qashshoqlik chegarasidan pastda yashaydi va uyda faqat ingliz tilida gapiradi?

(d) Amerikaliklarning qancha foizi qashshoqlik chegarasidan pastda yashaydi yoki uyda xorijiy tilda gapiradi?

(e) Amerikaliklarning qancha foizi qashshoqlik chegarasidan yuqorida yashaydi va uyda faqat ingliz tilida gapiradi?

(f) Biror kishining qashshoqlik chegarasidan pastda yashash hodisasi va uning uyda xorijiy tilda gapirish hodisasi bir-biriga bog‘liqsizmi?

3.9 Birgalikda bo‘lmagan va bog‘liqsiz. Quyidagi (a) va (b) qismlarda hodisalar birgalikdamas, bog‘liqsiz yoki ikkalasi ham emasligini aniqlang.

(a) Siz va sinfingizdan tasodifiy tanlangan bir talaba ushbu kursdan A baho oladi.

(b) Siz va sinfdagi o‘quv sherigingiz ushbu kursdan A baho oladi.

(c) Agar ikkita hodisa bir vaqtning o‘zida sodir bo‘la olsa, ular albatta bog‘liqmi?

3.10 Imtihonda taxmin qilish. Bir nechta tanlovli imtihonda 5 ta savol va har bir savol uchun 4 ta variant (a, b, c, d) mavjud. Nensi umuman tayyorlanmagan va javoblarni tasodifiy tanlashga qaror qiladi. Quyidagi hodisalar ehtimolini toping:

(a) u birinchi to‘g‘ri javobni 5-savolda beradi;

(b) u barcha savollarga to‘g‘ri javob beradi;

(c) u hech bo‘lmaganda bitta savolga to‘g‘ri javob beradi.

3.11 Juftliklarning ta’lim darajasi. Quyidagi jadval 2010-yilgi Amerika hamjamiyati so‘rovi natijalariga asoslanib, AQSh aholisi orasida jins bo‘yicha ta’lim darajasi taqsimotini ko‘rsatadi.[23]

		Jins	
		Erkak	Ayol
Eng yuqori ta’lim darajasi	9-sinfdan past	0,07	0,13
	9-12-sinf, diplomsiz	0,10	0,09
	O‘rta maktab bitiruvchisi (yoki teng)	0,30	0,20
	Ba’zi kollej, diplomsiz	0,22	0,24
	Associate (kollej/texnikum) darajasi	0,06	0,08
	Bakalavr darajasi	0,16	0,17
	Magistr yoki professional daraja	0,09	0,09
	Jami	1,00	1,00

(a) Tasodifiy tanlangan erkak kamida bakalavr darajasiga ega bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Tasodifiy tanlangan ayol kamida bakalavr darajasiga ega bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Erkak va ayolning turmush qurishi va ikkalasi ham kamida bakalavr darajasiga ega bo‘lish ehtimoli qancha? Ushbu savolga javob berish uchun qanday taxminlarni qabul qilishingizni ko‘rsating.

(d) Agar (c) qismida taxmin qilsangiz, bu asoslimi? Agar taxmin qilmagan bo‘lsangiz, avvalgi javobingizni ikki marta tekshirib, so‘ngra ushbu qismga qayting.

3.12 Maktabga qatnashmaslik. DeKalb okrugi, GA boshlang‘ich maktablarida to‘plangan ma’lumotlar har yili talabalarning taxminan 25% i faqat bir kunni, 15% i ikki kunni va 28% i esa kasallik tufayli 3 yoki undan ko‘p kunlarni o‘tkazib yuborishini ko‘rsatadi.[24]

(a) Tasodifiy tanlangan o‘quvchi ushbu yilda kasallik tufayli maktabni umuman qoldirmaslik ehtimoli qancha?

(b) Tasodifiy tanlangan o‘quvchi bir kundan ko‘p bo‘lmagan kunlarni o‘tkazib yuborish ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan o‘quvchi hech bo‘lmaganda bir kunni o‘tkazib yuborish ehtimoli qancha?

(d) Agar ota-onaning DeKalb okrugidagi boshlang‘ich maktabda o‘qiyotgan ikki farzandi bo‘lsa, ikkalasi ham maktabga umuman qatnashmaslik ehtimoli qancha? Ushbu savolga javob berish uchun qanday taxminlarni qabul qilishingizni ko‘rsating.

[23] U.S. Census Bureau, 2010 American Community Survey 1-Year Estimates, Educational Attainment.

[24] S.S. Mizan et al. “Absence, Extended Absence, and Repeat Tardiness Related to Asthma Status among Elementary School Children”. In: *Journal of Asthma* 48.3 (2011), pp. 228–234.

(e) Agar ota-onaning DeKalb okrugidagi boshlang‘ich maktabda o‘qiyotgan ikki farzandi bo‘lsa, ikkalasi ham maktabni bir oz bo‘lsa ham o‘tkazib yuborish ehtimoli (ya’ni, hech bo‘lmaganda bir kun) qancha? Qabul qilgan taxminlaringizni ko‘rsating.

(f) Agar (d) yoki (e) qismida taxmin qilgan bo‘lsangiz, bu asoslimi? Agar hech qanday taxmin qilmagan bo‘lsangiz, avvalgi javoblaringizni ikki marta tekshiring.

3.2 Shartli ehtimollik

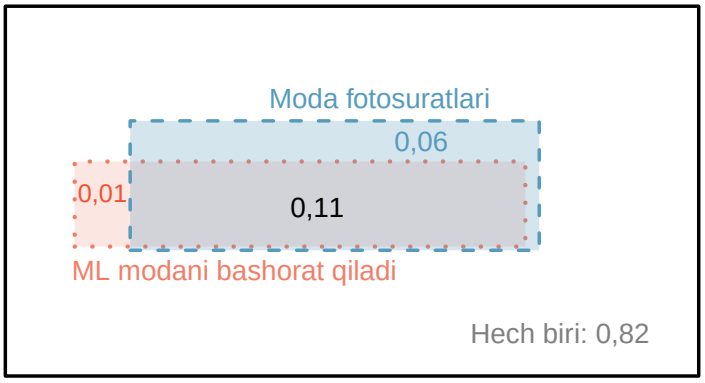
Ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchilar o‘rtasida foydali bo‘lgan murakkab munosabatlar bo‘lishi mumkin va ularni tushunish muhimdir. Masalan, avtomobil sug‘urtasi kompaniyasi biror shaxsning haydash tarixiga oid ma’lumotlarni tahlil qilib, uning avariya uchun javobgar bo‘lish xavfini baholaydi. Bunday munosabatlar shartli ehtimolliklar sohasi bilan bog‘liq.

3.2.1 Kontingensiya jadvali bilan ehtimollarni o‘rganish

`photo_classify` ma’lumotlar to‘plami fotosurat almashish saytining 1822 fotosuratidan namunani ifodalaydi. Ma’lumot olimlari fotosurat moda haqida yoki yo‘qligini aniqlash bo‘yicha klassifikatorni yaxshilash ustida ishlamoqda va ushbu 1822 ta fotosurat ularning klassifikatori uchun sinov hisoblanadi. Har bir fotosurat ikki xil tasnifga ega: birinchisi `mach_learn` deb nomlanadi va u mashinani o‘rganish (inglizcha: Machine Learning yoki qisqacha ML) tizimining `pred_fashion` yoki `pred_not` tasnifini beradi. Ushbu 1822 fotosuratlarning har biri ehtiyotkorlik bilan insonlar guruhi tomonidan tasniflangan va biz bu ma’lumotlarni haqiqat manbai sifatida qabul qilamiz; ushbu o‘zgaruvchi `truth` deb nomlanadi va `fashion` va `not` qiymatlarini oladi. 3.11-rasm natijalarni umumlashtiradi.

		truth		
		fashion	not	Jami
mach_learn	pred_fashion	197	22	219
	pred_not	112	1491	1603
	Jami	309	1513	1822

3.11-rasm. `photo_classify` ma’lumotlar to‘plamini umumlashtiruvchi kontingensiya jadvali.



3.12-rasm. `photo_classify` ma’lumotlar to‘plami uchun qutilardan foydalanilgan Venn diagram.

3.26-MISOL

Agar fotosurat haqiqatan ham moda haqida bo‘lsa, ML klassifikatori ushbu fotosuratni to‘g‘ri

aniqlash ehtimoli qancha?

Ushbu ehtimolni ma'lumotlardan foydalanib baholashimiz mumkin. 309 ta moda fotosuratidan, ML algoritmi 197 fotosuratni to'g'ri tasniflagan:

$$P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ bo'lsa, } \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ bo'lsa}) = \frac{197}{309} = 0{,}638 \ .$$

Ⓜ **3.27-MISOL**

Ma'lumotlar to'plamidan bitta fotosurat tanladik va ML algoritmi ushbu fotosuratni moda haqida emas deb bashorat qilganini bilib oldik. Ushbu bashorat noto'g'ri bo'lib, fotosurat moda haqida bo'lish ehtimoli qancha?

Agar ML klassifikatori fotosurat moda haqida emas deb bashorat qilsa, u holda bu ma'lumotlar to'plamining ikkinchi qatoridan keladi. Ushbu 1603 fotosuratlarning 112 tasi aslida moda haqida bo'lgan:

$$P(\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ bo'lsa, } \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_not} \text{ bo'lsa}) = \frac{112}{1603} = 0{,}070 \ .$$

3.2.2 Chegaraviy va qo'shma ehtimollar

3.11-rasm har bir o'zgaruvchi uchun qatordagi va ustundagi jami qiymatlarni ko'rsatadi `photo_classify` ma'lumotlar to'plamida. Bu jami qiymatlar **chegaraviy ehtimollar** hisoblanadi, ya'ni bu faqat bitta o'zgaruvchiga asoslangan ehtimollar, boshqa o'zgaruvchilarni hisobga olmagan holda. Masalan, faqat `mach_learn` o'zgaruvchiga asoslangan ehtimol chegaraviy ehtimoldir:

$$P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ bo'lsa}) = \frac{219}{1822} = 0{,}12 \ .$$

Ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchi yoki jarayonlar uchun ehtimollar qo'shma ehtimol deb ataladi:

$$P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ bo'lsa va } \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ bo'lsa}) = \frac{197}{1822} = 0{,}11 \ .$$

Qo'shma ehtimolni ifodalashda odatda "va" o'rniga vergul ishlatiladi, lekin "va" so'zi yoki verguldan foydalanishning har ikkalasi ham maqbuldir:

$P(\texttt{mach_learn}$ tasnifi $\texttt{pred_fashion}$ bo'lsa, $\texttt{truth}$ tasnifi $\texttt{fashion}$ bo'lsa$)$

shu bilan bir xil ma'noni anglatadi

$P(\texttt{mach_learn}$ tasnifi $\texttt{pred_fashion}$ bo'lsa va $\texttt{truth}$ tasnifi $\texttt{fashion}$ bo'lsa$)$

CHEGARAVIY VA QO'SHMA EHTIMOLLAR

Agar ehtimol bitta o'zgaruvchiga asoslangan bo'lsa, u *chegaraviy ehtimol* deb ataladi. Ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchi yoki jarayonlarning natijalari ehtimoli esa *qo'shma ehtimol* deb ataladi.

Biz **jadval ulushlari** dan `photo_classify` namunasi uchun qo'shma ehtimollarni umumlashtirishda foydalanamiz. Ushbu ulushlar 3.11-rasmdagi har bir sonni jadvalning umumiy qiymati 1822 ga bo'lish orqali hisoblanadi va 3.13-rasmdagi ulushlarni olishga imkon beradi. `mach_learn` va `truth` o'zgaruvchilari uchun qo'shma ehtimol taqsimoti 3.14-rasmda ko'rsatilgan.

	`truth: fashion`	`truth: not`	Jami
`mach_learn: pred_fashion`	0,1081	0,0121	0,1202
`mach_learn: pred_not`	0,0615	0,8183	0,8798
Jami	0,1696	0,8304	1,00

3.13-rasm. `photo_classify` ma'lumotlar to'plamini umumlashtiruvchi ehtimollik jadvali.

Qo‘shma natija	Ehtimollik
`mach_learn` tasnifi `pred_fashion` va `truth` tasnifi `fashion`	0,1081
`mach_learn` tasnifi `pred_fashion` va `truth` tasnifi `not`	0,0121
`mach_learn` tasnifi `pred_not` va `truth` tasnifi `fashion`	0,0615
`mach_learn` tasnifi `pred_not` va `truth` tasnifi `not`	0,8183
Jami	1,0000

3.14-rasm. `photo_classify` ma’lumotlar to‘plami uchun qo‘shma ehtimol taqsimoti.

Y **3.28-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.14-rasm ehtimol taqsimotini ifodalashini tasdiqlang: hodisalar o‘zaro birgalikdamas (istisno), barcha ehtimollar musbat va ehtimollar yig‘indisi 1 ga teng.[25]

Oddiy holatlarda qo‘shma ehtimollarni ishlatib, chegaraviy ehtimollarni hisoblashimiz mumkin. Masalan, ma’lumotlar to‘plamidan tasodifiy tanlangan fotosuratning moda haqida ekanligi ehtimoli `truth` o‘zgaruvchisi `fashion` qiymatini olgan holatlarning natijalarini qo‘shish orqali topiladi:

$$\begin{aligned} P(\underline{\texttt{truth tasnifi fashion}}) &= P(\texttt{mach_learn tasnifi pred_fashion va } \underline{\texttt{truth tasnifi fashion}}) \\ &\quad + P(\texttt{mach_learn tasnifi pred_not va } \underline{\texttt{truth tasnifi fashion}}) \\ &= 0{,}1081 + 0{,}0615 \\ &= 0{,}1696 \ . \end{aligned}$$

3.2.3 Shartli ehtimolni aniqlash

ML klassifikatori fotosurat moda haqida ekanligini bashorat qiladi, garchi u mukammal bo‘lmasa ham. Biz `mach_learn` kabi bir o‘zgaruvchi haqidagi ma’lumotdan foydalanib, ikkinchi bir o‘zgaruvchi, ushbu misolda `truth`, haqidagi ehtimoliy baholashni qanday yaxshilashni yaxshiroq tushunishni xohlaymiz. Ma’lumotlar to‘plamidan tasodifiy tanlangan fotosurat moda haqida bo‘lish ehtimoli taxminan 0,17 ni tashkil qiladi. Agar mashinani o‘rganish klassifikatori fotosuratni moda haqida deb bashorat qilganini bilsak, fotosuratning aslida moda haqida ekanligi ehtimolini yaxshiroq baholashimiz mumkinmi? Albatta. Buni amalga oshirish uchun faqat 219 ta holatga, ya’ni ML klassifikatori fotosuratni moda haqida deb bashorat qilgan holatlarga e’tibor qaratamiz va fotosuratning aslida moda haqida bo‘lgan holatlarning ulushini hisoblaymiz:

$$P(\texttt{truth tasnifi fashion bo‘lsa, mach_learn tasnifi pred_fashion}) = \frac{197}{219} = 0{,}900 \ .$$

Buni **shartli ehtimollik** deb ataymiz, chunki biz ehtimolni bir shart ostida hisobladik: ML klassifikatori fotosurat moda haqida deb bashorat qildi.

Shartli ehtimolda ikkita asosiy qism bor: **qiziqish natijasi** va **shart**. Shartni biz biladigan haqiqat sifatida qabul qilish foydalidir va bu ma’lumot odatda ma’lum bir natija yoki hodisa sifatida tavsiflanishi mumkin. Ehtimol belgilaridagi matnni qiziqish natijasi va shartni vertikal chiziq bilan ajratib yozish odatiy holdir:

$$\begin{aligned} &P(\texttt{truth tasnifi fashion, mach_learn tasnifi pred_fashion}) \\ &= P(\texttt{truth tasnifi fashion} \mid \texttt{mach_learn tasnifi pred_fashion}) = \frac{197}{219} = 0{,}900 \ . \end{aligned}$$

Vertikal chiziq “|” “berilgan” deb o‘qiladi.

So‘nggi tenglamada biz fotosurat moda haqida ekanligi ehtimolini ML algoritmi moda haqida

[25] To‘rt natija kombinatsiyasining har biri o‘zaro birgalikdamas (istisno), barcha ehtimollar haqiqatda musbat va ehtimollar yig‘indisi $0{,}1081 + 0{,}0121 + 0{,}0615 + 0{,}8183 = 1{,}00$.

deb bashorat qilgan holatdagi shart asosida fraksiyalar sifatida hisobladik:

$$P(\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \mid \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion}) = \frac{\#\ \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ va } \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ holatlar soni}}{\#\ \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ holatlar soni}} = \frac{197}{219} = 0{,}900\ .$$

Biz faqat shartga javob bergan holatlarga e'tibor qaratdik, ya'ni `mach_learn` tasnifi `pred_fashion` va keyin qiziqish natijasiga javob bergan holatlar, ya'ni fotosuratning aslida moda haqida ekanligi nisbatini hisobladik.

Ko'pincha, chegara va qo'shma ehtimollar sonli ma'lumotlar o'rniga foiz shaklida taqdim etiladi. Masalan, kasallik darajalari odatda foizlarda beriladi. Biz shartli ehtimollarni sonli ma'lumotlar bo'lmaganda ham hisoblashni o'rganishimiz kerak va biz ushbu usulni tushunish uchun so'nggi tenglamadan shablon sifatida foydalanamiz.

Biz faqat shartga javob bergan holatlarni ko'rib chiqdik, ya'ni ML algoritmi moda haqida deb bashorat qilgan holatlar. Ushbu holatlarning ichida, shartli ehtimol qiziqish natijasini ifodalovchi fraksiyani, ya'ni fotosuratning moda haqida ekanligini tashkil qildi. Tasavvur qilaylik, bizga faqat 3.13-rasmdagi ma'lumotlar, ya'ni faqat ehtimol ma'lumotlari taqdim etilgan. Shunda, agar biz 1000 fotosuratdan iborat tanlanma (namuna)ni ko'rib chiqsak, taxminan 12,0% yoki $0{,}120 \times 1000 = 120$ tasi moda haqida deb bashorat qilinadi (`mach_learn` tasnifi `pred_fashion`). Xuddi shunday, taxminan 10,8% yoki $0{,}108 \times 1000 = 108$ holatlar har ikkala shartga javob beradi va qiziqish natijasini ifodalaydi. Shunda shartli ehtimolni quyidagicha hisoblash mumkin:

$$P(\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \mid \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion}) = \frac{\#\ (\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ va } \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ holatlar soni})}{\#\ (\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ holatlar soni})} = \frac{108}{120} = \frac{0{,}108}{0{,}120} = 0{,}90\ .$$

Bu yerda biz ikkita ehtimolning, 0,108 va 0,120, nisbatini ko'rib chiqamiz, buni quyidagicha yozish mumkin:

$$P(\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion} \text{ va } \texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion}) \quad \text{va} \quad P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion}).$$

Ushbu ehtimollar nisbatini shartli ehtimolning umumiy formulasi misoli sifatida qarashimiz mumkin.

SHARTLI EHTIMOL

B sharti berilgan holda A natijasi uchun shartli ehtimol quyidagicha hisoblanadi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \text{ va } B)}{P(B)}\ .$$

3.29-YO'NALTIRILGAN MASHQ

(a) Quyidagi bayonotni shartli ehtimol yozuvida ifodalang: "*Fotosurat moda haqida bo'lgan holatda, ML bashorati to'g'ri bo'lgan ehtimol*". Bu yerda shart ML algoritmiga emas, balki fotosuratning `truth` holatiga asoslangan.

(b) (a) qismidagi ehtimolni hisoblang. 96-sahifadagi 3.13-jadval foydali bo'lishi mumkin.[26]

[26] (a) Agar fotosurat moda haqida bo'lsa va ML algoritmi bashorati to'g'ri bo'lsa, ML algoritmi `pred_fashion` qiymatiga ega bo'lishi kerak:

$$P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \mid \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion})\ .$$

(b) Shartli ehtimol tenglamasi ko'rsatadi, biz birinchi navbatda quyidagilarni topishimiz kerak: $P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \text{ va } \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion}) = 0{,}1081$ va $P(\texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion}) = 0{,}1696$. Keyin ushbu nisbat shartli ehtimolni ifodalaydi: $0{,}1081/0{,}1696 = 0{,}6374$.

3.30-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

(a) Fotosurat moda haqida ekanligi ma’lum bo‘lgan holatda, algoritmning xato bo‘lish ehtimolini aniqlang.

(b) (a) qismidagi javob va 3.29-yo‘naltirilgan mashq (b) natijalaridan foydalanib quyidagilarni hisoblang:

$$P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_fashion} \mid \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion}) + P(\texttt{mach_learn} \text{ tasnifi } \texttt{pred_not} \mid \texttt{truth} \text{ tasnifi } \texttt{fashion}) .$$

(c) (b) da yig‘indining nima uchun 1 ga tengligini tushuntiruvchi intuitiv izoh bering.[27]

3.2.4 1721-yilda Boston shahridagi chechak epidemiyasi

`smallpox` ma’lumotlar to‘plami 1721-yilda Boston shahrida chechak kasalligiga duchor bo‘lgan 6224 kishidan iborat tanlanmani taqdim etadi. O‘sha davrdagi shifokorlar immunizatsiya, ya’ni kasallikka nazorat ostida duchor qilish, o‘lim ehtimolini kamaytirishi mumkinligiga ishonishgan.

Har bir holatda ikkita o‘zgaruvchi mavjud: `inoculated` va `result`. `inoculated` o‘zgaruvchisi (o‘zbekcha: emlangan) ikki qiymatga ega bo‘lishi mumkin: `yes` (o‘zbekcha: ha) yoki `no` (o‘zbekcha: yo‘q), bu odamning emlangan yoki emlanmaganligini (immunizatsiya) qilingan-qilinmaganligini bildiradi. `result` o‘zgaruvchisi (o‘zbekcha: natija) esa `lived` (o‘zbekcha: tirik) yoki `died` (o‘zbekcha: o‘lgan) natijalarni o‘z ichiga oladi. Ushbu ma’lumotlar 3.15- va 3.16-rasmlarda umumlashtirilgan.

		inoculated		
		yes	no	Jami
result	lived	238	5136	5374
	died	6	844	850
	Jami	244	5980	6224

3.15-rasm. `smallpox` ma’lumotlar to‘plami uchun kontingensiya jadvallari.

		inoculated		
		yes	no	Jami
result	lived	0,0382	0,8252	0,8634
	died	0,0010	0,1356	0,1366
	Jami	0,0392	0,9608	1,0000

3.16-rasm. `smallpox` ma’lumotlari uchun jadval ulushlari, har bir qiymatni jadvalning umumiy qiymati 6224 ga bo‘lish orqali hisoblangan.

3.31-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Immunizatsiya qilinmagan va chechakdan vafot etgan tasodifiy tanlangan odamning ehtimolini formal yozuvda yozing va ushbu ehtimolni toping.[28]

3.32-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Immunizatsiya qilingan odamning chechakdan vafot etgan ehtimolini aniqlang. Ushbu natijani 3.31-yo‘naltirilgan mashqdagi natija bilan taqqoslang.[29]

[27] (a) Bu ehtimol quyidagiga teng: $\frac{P(\texttt{mach_learn tasnifi pred_not, truth tasnifi fashion})}{P(\texttt{truth tasnifi fashion})} = \frac{0{,}0615}{0{,}1696} = 0{,}3626$. (b) Umumiy qiymat 1 ga teng. (c) Fotosurat moda haqida ekanligi sharti ostida, ML algoritmi moda haqida deb bashorat qilgan yoki moda haqida emas deb bashorat qilgan bo‘lishi kerak. To‘ldiruvchi (komplement) usuli shartli ehtimollarda ham ishlaydi, agar ehtimollar bir xil ma’lumotga asoslangan bo‘lsa.

[28] $P(\texttt{result} = \texttt{died} \mid \texttt{inoculated} = \texttt{no}) = \frac{P(\texttt{result} = \texttt{died va inoculated} = \texttt{no})}{P(\texttt{inoculated} = \texttt{no})} = \frac{0{,}1356}{0{,}9608} = 0{,}1411$.

[29] $P(\texttt{result} = \texttt{died} \mid \texttt{inoculated} = \texttt{yes}) = \frac{P(\texttt{result} = \texttt{died va inoculated} = \texttt{yes})}{P(\texttt{inoculated} = \texttt{yes})} = \frac{0{,}0010}{0{,}0392} = 0{,}0255$ (agar biz aylantirish xatolarini oldini olsak, $6/244 = 0{,}0246$ bo‘ladi). Immunizatsiya qilingan odamlar uchun o‘lim darajasi taxminan 1 dan 40 ga teng, immunizatsiya qilinmagan odamlar uchun esa bu ko‘rsatkich taxminan 1 dan 7 ga teng.

Y **3.33-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Bostonliklar o‘zlari immunizatsiya qilinish yoki qilinmaslikni tanladilar. (a) Ushbu tadqiqot kuzatuvmi yoki eksperiment? (b) Ushbu ma’lumotlardan foydalangan holda qandaydir sababiy bog‘liqlikni aniqlashimiz mumkinmi? (c) Qanday potentsial aralash omillar odamning `lived` yoki `died` natijalariga hamda uning immunizatsiya qilinishiga ta’sir qilishi mumkin?[30]

3.2.5 Umumiy ko‘paytirish qoidasi

3.1.7-bo‘lim bog‘liqsiz hodisalar uchun ko‘paytirish qoidasi bilan tanishtirdi. Bu yerda bog‘liqsiz bo‘lmagan hodisalar uchun **umumiy ko‘paytirish qoidasi** keltiriladi.

UMUMIY KO‘PAYTIRISH QOIDASI

Agar A va B ikkita natija yoki hodisani ifodalasa, u holda

$$P(A \text{ va } B) = P(A|B) \times P(B) \ .$$

Bu yerda A ni qiziqtiruvchi natija, B ni esa shart sifatida tushunish foydali.

Umumiy ko‘paytirish qoidasi oddiygina shartli ehtimol tenglamasining qayta tartiblangan shaklidir.

M **3.34-MISOL**

`smallpox` ma’lumotlar to‘plamini ko‘rib chiqing. Faraz qilaylik, biz faqat ikkita ma’lumotga egamiz: aholining 96,08% qismi emlanmagan va emlanmagan aholining 85,88% qismi tirik qolgan. Emlanmagan va tirik qolgan odam ehtimolini qanday hisoblash mumkin?

Javobni Umumiy Ko‘paytirish Qoidasi yordamida hisoblaymiz va keyin 3.16-rasmdan foydalanib uni tasdiqlaymiz. Biz quyidagini aniqlashni xohlaymiz:

$$P(\texttt{result} = \texttt{lived} \text{ va } \texttt{inoculated} = \texttt{no})$$

va bizga quyidagilar ma’lum:

$$P(\texttt{result} = \texttt{lived} \mid \texttt{inoculated} = \texttt{no}) = 0{,}8588 \qquad P(\texttt{inoculated} = \texttt{no}) = 0{,}9608 \ .$$

Emlanmagan odamlarning 96,08% qismida 85,88% tirik qolgan:

$$P(\texttt{result} = \texttt{lived} \text{ va } \texttt{inoculated} = \texttt{no}) = 0{,}8588 \times 0{,}9608 = 0{,}8251 \ .$$

Bu Umumiy Ko‘paytirish Qoidasi bilan teng. Ushbu ehtimolni 3.16-rasmda `no` va `lived` kesishmasida (kichik yaxlitlash xatosi bilan) tasdiqlashimiz mumkin.

Y **3.35-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

$P(\texttt{inoculated} = \texttt{yes}) = 0{,}0392$ va $P(\texttt{result} = \texttt{lived} \mid \texttt{inoculated} = \texttt{yes}) = 0{,}9754$ yordamida shaxs emlangan va tirik qolgan ehtimolini aniqlang.[31]

Y **3.36-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Agar emlangan odamlarning 97,54% qismi tirik qolgan bo‘lsa, emlangan odamlarning qancha qismi vafot etgan bo‘lishi mumkin?[32]

---

[30] Qisqa javoblar: (a) Kuzatuv. (b) Yo‘q, bu kuzatuv tadqiqotidan sababiy bog‘liqlikni aniqlay olmaymiz. (c) Eng so‘nggi va eng yaxshi tibbiy yordamga ega bo‘lish. (c) qismi uchun boshqa to‘g‘ri javoblar ham mavjud.

[31] Javob 0,0382 bo‘lib, uni 3.16-rasmdan foydalanib tasdiqlash mumkin.

[32] Faqat ikkita mumkin bo‘lgan natija bor edi: `lived` yoki `died`. Bu shuni anglatadiki, 100% - 97,54% = 2,46% emlangan odamlar vafot etgan.

SHARTLI EHTIMOLLAR YIG‘INDISI

Agar A_1, ..., A_k o‘zgaruvchi yoki hodisa (jarayon) uchun barcha o‘zaro birgalikdamas (ajratilgan) hodisa(natija)larni ifodalasa va B boshqa bir o‘zgaruvchi yoki hodisa (jarayon) uchun hodisa bo‘lsa, u holda:

$$P(A_1|B) + \cdots + P(A_k|B) = 1 \ .$$

Komplement qoidasi bir xil ma’lumotga asoslangan hodisa va uning teskarisi (komplementi) uchun ham amal qiladi:

$$P(A|B) = 1 - P(A^c|B) \ .$$

Y **3.37-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Yuqorida hisoblangan ehtimollarga asoslanib, emlash chechakdan o‘lim xavfini kamaytirishda samarali ekanligini ko‘rsatadimi?[33]

3.2.6 Shartli ehtimollikdagi bog‘liqsizlikni hisobga olish

Agar ikki hodisa bog‘liqsiz bo‘lsa, ulardan birining natijasini bilish ikkinchisiga oid hech qanday ma’lumot bermasligi kerak. Biz buni shartli ehtimolliklarni qo‘llab matematik jihatdan ko‘rsatishimiz mumkin.

Y **3.38-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

X va Y ikkita kub tashlash natijalarini ifodalaydi.[34]

(a) Birinchi kubning, X, natijasi `1` bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) X va Y natijalari ikkalasi ham `1` bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Shartli ehtimollik formulasidan foydalanib $P(Y = \texttt{1} \mid X = \texttt{1})$ ni hisoblang.

(d) $P(Y = 1)$ qancha? Bu (c)-bo‘limdagi javobdan farq qiladimi? Izohlang.

3.38-yo‘naltirilgan mashq (c) da ko‘rsatishimiz mumkinki, shartli ma’lumot bog‘liqsiz hodisalari uchun ko‘paytirish qoidasi yordamida ta’sir ko‘rsatmaydi:

$$\begin{aligned} P(Y = \texttt{1} \mid X = \texttt{1}) &= \frac{P(Y = \texttt{1} \text{ va } X = \texttt{1})}{P(X = \texttt{1})} \\ &= \frac{P(Y = \texttt{1}) \times P(X = \texttt{1})}{P(X = \texttt{1})} \\ &= P(Y = \texttt{1}) \ . \end{aligned}$$

Y **3.39-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ron kazinoda ruletka stoliga qarab o‘tirgan va so‘nggi beshta natija `qora` bo‘lganini sezgan. U, olti marta ketma-ket `qora` natijani olish ehtimoli juda kichik (taxminan 1/64) deb o‘ylaydi va barcha maoshini `qizil` ga tikadi. Uning mulohazalarida nima noto‘g‘ri?[35]

[33] Tanlanma(Namuna)lar ”emlangan” va ”emlanmagan” guruhlar uchun o‘lim ko‘rsatkichlaridagi farqga nisbatan katta, shuning uchun `inoculated` va `outcome` o‘rtasida bog‘liqlik bor ko‘rinadi. Ammo, 3.33-yo‘naltirilgan mashqning yechimidagi qayd etilganidek, bu kuzatuv tadqiqotidir va biz sababiy bog‘liqlik bor-yo‘qligiga ishonch hosil qila olmaymiz. (Keyingi tadqiqotlar emlash o‘lim darajasini kamaytirishda samarali ekanligini ko‘rsatdi.)

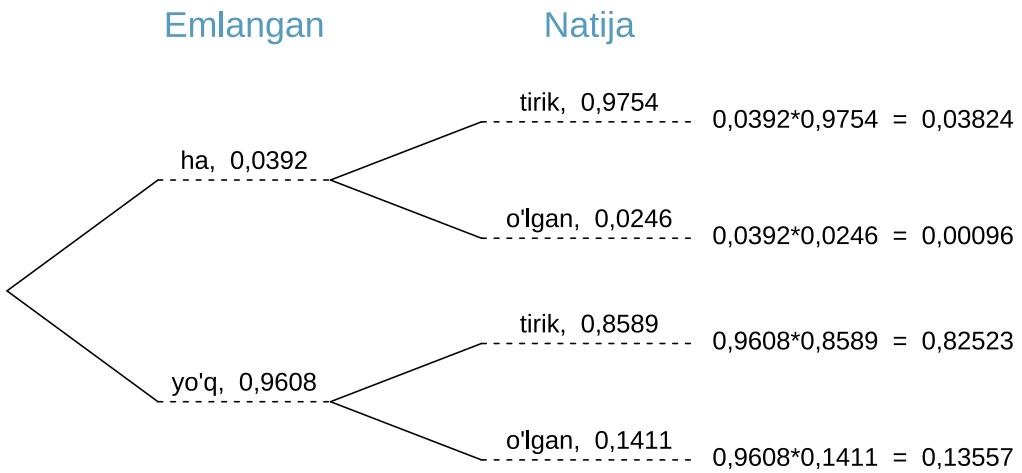
[34] Qisqa javoblar: (a) 1/6. (b) 1/36. (c) $\frac{P(Y=1 \text{ va } X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/36}{1/6} = 1/6$. (d) Ehtimol (c)-bo‘limdagi kabi bir xil: $P(Y = 1) = 1/6$. $Y = 1$ bo‘lish ehtimoli X haqida bilish orqali o‘zgarmadi, bu mantiqiy, chunki X va Y bog‘liqsizdir.

[35] U keyingi ruletka aylanishi oldingi aylanishlardan bog‘liqsiz ekanligini unutgan. Kazinolar bu usulni qo‘llaydi, ko‘p o‘yinlarning so‘nggi natijalarini ko‘rsatib, gumonsiz qimorbozlarni o‘z foydasiga ishlayapti deb o‘ylashiga majburlashadi. Bu holat **qimorboz xatosi** deb ataladi.

3.2.7 Daraxt diagrammalari

Daraxt diagrammalari — bu natijalar va ehtimolliklarni ma'lumotlar tuzilmasiga mos ravishda tashkil qilish uchun foydali vosita. Ular, asosan, ketma-ket ikkita yoki undan ko'p hodisa (jarayon) sodir bo'lganda va har bir hodisa (jarayon) o'zidan oldingi jarayonlarga bog'liq bo'lganda qo'llaniladi.

`smallpox` ma'lumotlari bu ta'rifga mos keladi. Biz aholini `inoculation` orqali ajratilgan deb tasavvur qilamiz: `ha` va `yo'q`. Ushbu ajratishdan so'ng, har bir guruh uchun tirik qolish darajalari kuzatildi. Ushbu tuzilma 3.17 - rasmda ko'rsatilgan **daraxt diagramma** aks etgan. Daraxt diagrammasining birinchi `inoculation` bo'lagi **birlamchi** bo'lak deb ataladi, qolgan bo'laklar esa **ikkinchi darajali** deb ataladi.



3.17-rasm. `smallpox` ma'lumotlar to'plamining daraxt diagrammasi.

Daraxt diagrammalari 3.17-rasmdagi kabi marginal va shartli ehtimolliklar bilan belgilangan. Ushbu daraxt diagrammasi `inoculation` bo'yicha `ha` va `yo'q` guruhlari bo'ylab bo'linadi, mos ravishda 0,0392 va 0,9608 marginal ehtimolliklar bilan. Ikkinchi darajali bo'laklar birinchi bo'lakka bog'liq, shuning uchun biz ushbu bo'laklarga shartli ehtimolliklarni belgilaymiz. Misol uchun, 3.17-rasmdagi yuqori bo'lak $\texttt{inoculated} = \texttt{ha}$ holatida $\texttt{result} = \texttt{lived}$ ehtimolligini anglatadi. Daraxt bo'ylab chapdan o'ngga o'tishda uchraydigan sonlarni ko'paytirib, daraxtning har bir bo'lagida qo'shma ehtimolliklarni hisoblashimiz mumkin. Ushbu qo'shma ehtimolliklar Umumiy ko'paytirish qoidasi yordamida hisoblanadi:

$$\begin{aligned} &P(\texttt{inoculated} = \texttt{yes} \text{ va } \texttt{result} = \texttt{lived}) \\ &\quad = P(\texttt{inoculated} = \texttt{yes}) \times P(\texttt{result} = \texttt{lived} | \texttt{inoculated} = \texttt{yes}) \\ &\quad = 0{,}0392 \times 0{,}9754 = 0{,}0382 \ . \end{aligned}$$

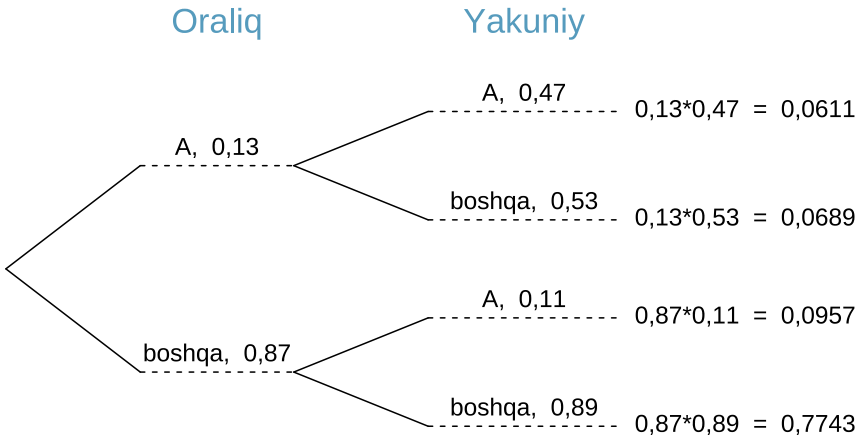
3.40-MISOL

Statistika fanidan oraliq (o'rta) imtihon va yakuniy imtihon natijalarini ko'rib chiqamiz. Aytaylik, talabalarning 13% oraliq imtihonda (inglizcha: `midterm`) `A` bahosini olgan. Oraliq imtihonda `A` bahosini olgan talabalarning 47% yakuniy imtihonda (inglizcha: `final`) ham `A` bahosini olgan. Oraliq imtihonda `A` dan pastroq baho olgan talabalarning esa 11% yakuniy imtihonda `A` bahosini olgan. Tasodifan bir yakuniy imtihon javob varag'ini tanlaysiz va unda talabaga `A` bahosi qo'yilganini ko'rasiz. Ushbu talaba oraliq imtihonda ham `A` olgan bo'lish ehtimolini aniqlang.

Bizning maqsadimiz $P(\texttt{midterm} = \texttt{A} | \texttt{final} = \texttt{A})$ ni topish. Ushbu shartli ehtimollikni hisoblash uchun bizga quyidagi ehtimolliklar kerak bo'ladi:

$$P(\texttt{midterm} = \texttt{A} \text{ and } \texttt{final} = \texttt{A}) \qquad \text{va} \qquad P(\texttt{final} = \texttt{A}) \ .$$

Lekin, bu ma'lumot berilmagan va ushbu ehtimolliklarni qanday hisoblashni aniqlash qiyin. Qanday davom etishni bilmasak, ma'lumotlarni daraxt diagrammasi yordamida tartibga solish foydali:



Daraxt diagrammasini yaratgandan so'ng, zarur ehtimolliklarni hisoblashimiz mumkin:

$$
\begin{aligned}
&P(\texttt{midterm} = \texttt{A} \text{ va } \texttt{final} = \texttt{A}) = 0.0611\\
&P(\underline{\texttt{final} = \texttt{A}})\\
&\quad = P(\texttt{midterm} = \texttt{boshqa} \text{ va } \underline{\texttt{final} = \texttt{A}}) + P(\texttt{midterm} = \texttt{A} \text{ va } \underline{\texttt{final} = \texttt{A}})\\
&\quad = 0{,}0957 + 0{,}0611 = 0{,}1568\ .
\end{aligned}
$$

Chegaraviy ehtimollik $P(\texttt{final} = \texttt{A})$, daraxtning o'ng tomonida $\texttt{final} = \texttt{A}$ bo'lishga mos keladigan barcha qo'shma ehtimolliklarni qo'shish orqali hisoblandi. Endi ikkala ehtimollik nisbatini hisoblashimiz mumkin:

$$
\begin{aligned}
P(\texttt{midterm} = \texttt{A} | \texttt{final} = \texttt{A}) &= \frac{P(\texttt{midterm} = \texttt{A} \text{ va } \texttt{final} = \texttt{A})}{P(\texttt{final} = \texttt{A})}\\
&= \frac{0{,}0611}{0{,}1568} = 0{,}3897\ .
\end{aligned}
$$

Talabaning oraliq imtihonda ham A olgan bo'lish ehtimoli taxminan 0,39.

Y **3.41-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Statistikaga kirish kursidan so'ng, talabalarning 78% daraxt diagrammalarini muvaffaqiyatli tuzishi mumkin. Daraxt diagrammalarini tuzishga qodir bo'lgan talabalarning 97% kursdan muvaffaqiyatli o'tdi, daraxt diagrammalarini tuza olmagan talabalarning esa faqat 57% kursdan o'tdi. (a) Ushbu ma'lumotni daraxt diagrammasiga joylashtiring. (b) Tasodifiy tanlangan talaba kursdan o'tgan bo'lish ehtimoli qanday? (c) Agar talaba kursdan o'tganligi ma'lum bo'lsa, uning daraxt diagrammasini tuza olish ehtimolini hisoblang.[36]

3.2.8 Bayes teoremasi

Ko'plab holatlarda bizga quyidagi shartli ehtimollik berilgan bo'ladi:

$$P(\text{1-o'zgaruvchi haqida bayonot} \mid \text{2-o'zgaruvchi haqida bayonot})$$

[36] (a) Daraxt diagrammasi quyida keltirilgan.
(b) Kursdan muvaffaqiyatli o'tgan talabalarni ifodalovchi ikkita birgalikdagi ehtimolni aniqlang va ularni qo'shing: $P(\text{kursdan o'tgan}) = 0{,}7566 + 0{,}1254 = 0{,}8820$.
(c) $P(\text{daraxt diagrammasini tuza olish} \mid \text{kursdan o'tgan}) = \frac{0{,}7566}{0{,}8820} = 0{,}8578$.

ammo biz aslida teskari shartli ehtimollikni bilishni istaymiz:

$$P(\text{2-o‘zgaruvchi haqida bayonot} \mid \text{1-o‘zgaruvchi haqida bayonot}) \ .$$

Daraxt (Shoxcha) diagrammalaridan birinchi ehtimollik berilganida ikkinchi shartli ehtimollikni topishda foydalanish mumkin. Ammo ba’zan bu holatni daraxt (shoxcha) diagrammasida chizishning imkoni yo‘q. Bunday hollarda biz juda foydali va umumiy formula - Bayes teoremasidan foydalanishimiz mumkin.

Avvaliga, daraxt (shoxcha) diagrammasidan foydalanadigan holatda shartli ehtimolliklarni teskari aylantirish misolini ko‘rib chiqamiz.

M

3.42-MISOL

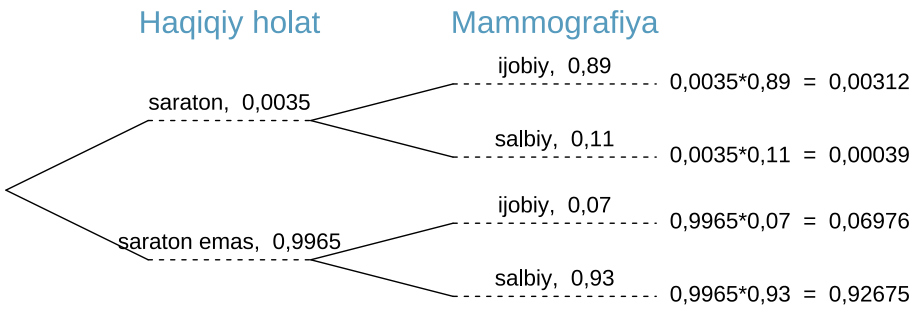
Kanadada, 40 yoshdan oshgan taxminan 0,35% ayollar har qanday yil ichida ko‘krak bezi saratoniga chalinadi. Saratonni aniqlash uchun keng tarqalgan testlardan biri mammogram hisoblanadi, ammo bu test mukammal emas. Saraton kasalligiga ega bo‘lgan taxminan 11% bemorlarda test **yolg‘on salbiy** natija beradi: ya’ni, ayolda ko‘krak saratoni bor bo‘lsa-da, test saraton yo‘qligini ko‘rsatadi. Xuddi shunday, test saratonga ega bo‘lmagan 7% bemorlarda **yolg‘on ijobiy** natija beradi: ya’ni, bu bemorlarda saraton yo‘qligiga qaramay, test ularda saraton borligini ko‘rsatadi. Agar biz 40 yoshdan oshgan tasodifiy bir ayolni mammogram orqali tekshirib, test ijobiy natija bersa – ya’ni, test bemorda saraton borligini ko‘rsatsa – bemorda aslida saraton bo‘lish ehtimoli qanday?

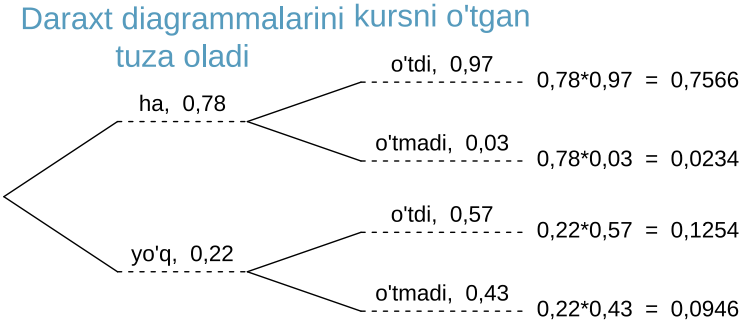
Shuni unutmaslik kerakki, bizga ayolning ko‘krak saratoniga chalinganida ijobiy test natijasiga ega bo‘lish ehtimolini tezda hisoblash uchun yetarli ma’lumot berilgan ($1{,}00-0{,}11=0{,}89$). Ammo biz ijobiy test natijasiga ega bo‘lganida saraton ehtimolini teskari hisoblashni izlamoqdamiz. (Tibbiy tilning intuitiv bo‘lmagan xususiyatlariga e’tibor bering: mammografiya tekshiruvida ijobiy natija ko‘krak saratonining mavjud bo‘lishi mumkinligini ko‘rsatadi.) Ushbu teskari ehtimol ikki qismga bo‘linishi mumkin:

$$P(\text{BC bor} \mid \text{mammogram}^{+}) = \frac{P(\text{BC bor va mammogram}^{+})}{P(\text{mammogram}^{+})} \ ,$$

bu yerda “`BC bor`” bemorning ko‘krak saratoniga ega ekanligini va “$\texttt{mammogram}^{+}$” esa mammografiya tekshiruvi ijobiy bo‘lganligini bildiradi.

Ushbu ehtimollar uchun daraxt diagrammasini yaratishimiz mumkin:





Bemorda ko‘krak saratoni bor va mammografiya ijobiy bo‘lish ehtimoli quyidagicha:

$$\begin{aligned} P(\text{BC bor va mammogram}^+) &= P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor})P(\text{BC bor}) \\ &= 0{,}89 \times 0{,}0035 = 0{,}00312 \ . \end{aligned}$$

Ijobiy test natijasi ehtimoli esa ikkita tegishli holatning yig‘indisiga teng:

$$\begin{aligned} P(\underline{\text{mammogram}^+}) &= P(\underline{\text{mammogram}^+} \text{ va BC bor}) \\ &\quad + P(\underline{\text{mammogram}^+} \text{ va BC yo‘q}) \\ &= P(\text{BC bor})P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor}) \\ &\quad + P(\text{BC yo‘q})P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC yo‘q}) \\ &= 0{,}0035 \times 0{,}89 + 0{,}9965 \times 0{,}07 = 0{,}07288 \ . \end{aligned}$$

Shunday qilib, agar bemor mammografiya tekshiruvi ijobiy natijaga ega bo‘lsa, unda bemorning ko‘krak saratoniga chalinish ehtimoli quyidagicha:

$$P(\text{BC bor} \mid \text{mammogram}^+) = \frac{P(\text{BC bor va mammogram}^+)}{P(\text{mammogram}^+)} = \frac{0{,}00312}{0{,}07288} \approx 0{,}0428 \ .$$

Ya’ni, hatto bemorning mammografiya tekshiruvida ijobiy natija bo‘lsa ham, uning ko‘krak saratoniga chalingan bo‘lish ehtimoli faqat 4% ni tashkil qiladi.

3.42-misol shifokorlar nega birinchi ijobiy test natijasidan keyin ko‘proq testlar o‘tkazishni afzal ko‘rishini ko‘rsatadi. Agar tibbiy holat kam uchrasa, yagona ijobiy test odatda aniq hisoblanmaydi.

3.42-misol oxirgi tenglamasini yana bir bor ko‘rib chiqaylik. Daraxt diagrammasidan foydalanib, sur’at (kasrning yuqori qismi) quyidagi mahsulotga teng ekanligini ko‘rishimiz mumkin:

$$P(\text{BC bor va mammogram}^+) = P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor})P(\text{BC bor}) \ .$$

Mahraj – skrining ijobiy bo‘lgan ehtimol – har bir ijobiy skrining holati uchun ehtimollar yig‘indisiga teng:

$$P(\underline{\text{mammogram}^+}) = P(\underline{\text{mammogram}^+} \text{ va BC yo‘q}) + P(\underline{\text{mammogram}^+} \text{ va BC bor}) \ .$$

Misolda, o‘ng tomondagi har bir ehtimol daraxt diagrammasidan foydalanib, shartli ehtimol va marginal ehtimol mahsulotiga ajratilgan:

$$\begin{aligned} P(\text{mammogram}^+) &= P(\text{mammogram}^+ \text{ va BC yo‘q}) + P(\text{mammogram}^+ \text{ va BC bor}) \\ &= P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC yo‘q})P(\text{BC yo‘q}) \\ &\quad + P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor})P(\text{BC bor}) \ . \end{aligned}$$

Bayes teoremasi qo‘llanilishini ko‘rishimiz mumkin, bunda asl shartli ehtimolning sur’ati va mahrajiga hosil bo‘lgan ehtimol ifodalarini qo‘shish orqali:

$$\begin{aligned} &P(\text{BC bor} \mid \text{mammogram}^+) \\ &\quad = \frac{P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor})P(\text{BC bor})}{P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC yo‘q})P(\text{BC yo‘q}) + P(\text{mammogram}^+ \mid \text{BC bor})P(\text{BC bor})} \ . \end{aligned}$$

BAYES TEOREMASI: EHTIMOLLARNI TESKARI HISOBLASH

Quyidagi shartli ehtimolni ko‘rib chiqing, 1- va 2-o‘zgaruvchilar uchun:

$$P(\text{1-o‘zgaruvchining } A_1 \text{ natijasi} \mid \text{2-o‘zgaruvchining } B \text{ natijasi})$$

Bayes teoremasi bu shartli ehtimol quyidagi kasr sifatida ifodalanishi mumkinligini ta’kidlaydi:

$$\frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_k)P(A_k)},$$

bu yerda A_2, A_3, ... va A_k birinchi o‘zgaruvchining barcha boshqa mumkin bo‘lgan natijalarini ifodalaydi.

Bayes teoremasi daraxt diagrammalaridan foydalangan holda qilgan ishlarimizning umumlashtirilgan shaklidir. Surat bo‘lagi A_1 va B hodisalarining birgalikda yuz berish ehtimolini aniqlaydi. Mahraj esa B hodisaning marginal ehtimolini bildiradi. Ushbu kasrning pastki qismi uzun va murakkab ko‘rinishi mumkin, chunki B hodisaga olib keladigan barcha turli yo‘llarning ehtimollarini qo‘shishimiz kerak. Daraxt diagrammalaridan foydalanganimizda, biz bu bosqichni alohida qadamda bajarardik, shuning uchun u unchalik murakkab ko‘rinmas edi.
Bayes teoremasini to‘g‘ri qo‘llash uchun quyidagi ikkita tayyorgarlik bosqichini bajarish lozim:

(1) Avval birinchi miqdorning har bir mumkin bo‘lgan natijasining marginal ehtimollarini aniqlang: $P(A_1)$, $P(A_2)$, ..., $P(A_k)$.

(2) Keyin B natijasi ehtimolini, birinchi miqdorning har bir mumkin bo‘lgan ssenariyiga shartli ravishda aniqlang: $P(B|A_1)$, $P(B|A_2)$, ..., $P(B|A_k)$.

Ushbu ehtimollar aniqlangach, ular formula ichida bevosita qo‘llanilishi mumkin. Bayes teoremasi, agar juda ko‘p ssenariy mavjud bo‘lsa va daraxt diagrammasini chizish qiyin bo‘lsa, yaxshi tanlov hisoblanadi.

Y **3.43-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

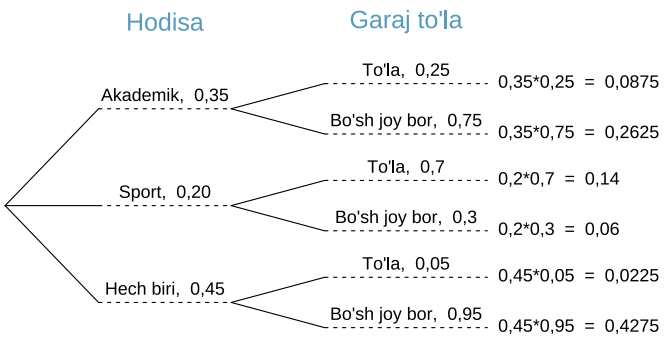
Jose har payshanba oqshomida kampusga tashrif buyuradi. Biroq, ba’zi kunlari avtoturargoh to‘lgan bo‘ladi, bu ko‘pincha kollej tadbirlari tufayli yuz beradi. Akademik tadbirlar oqshomlarning 35% ida, sport tadbirlari 20% ida va hech qanday tadbir yo‘q oqshomlar 45% ida bo‘ladi. Agar akademik tadbir bo‘lsa, avtoturargoh taxminan 25% vaqtda to‘ladi, sport tadbirlari bo‘ladigan oqshomlarda esa 70% vaqtda to‘ladi. Tadbir bo‘lmagan oqshomlarda esa, u faqat taxminan 5% vaqtda to‘ladi. Agar Jose kampusga kelib, avtoturargoh to‘lganini topsa, sport tadbiri bor bo‘lish ehtimoli qanday? Ushbu masalani daraxt diagrammasidan foydalangan holda yeching.[37]

M **3.44-MISOL**

Bu yerda biz 3.43-yo‘naltirilgan mashqda keltirilgan muammoni hal qilamiz, lekin bu safar Bayes’ teoremasidan foydalanamiz.

Qiziqish natijasi sport tadbiri bor-yo‘qligi (buni A_1 deb ataymiz) va shart avtoturargoh to‘lgan (B). A_2 akademik tadbirni va A_3 esa kampusda hech qanday tadbir yo‘qligini bildiradi. Berilgan

[37] Daraxt diagrammasi, uchta asosiy shoxga ega, o‘ng tomonda ko‘rsatilgan. Keyingi bosqichda daraxt diagrammasidan ikkita ehtimollik aniqlanadi. (1) Sport tadbiri va avtoturargoh to‘lgan bo‘lish ehtimoli: 0,14. (2) Avtoturargohning to‘lgan bo‘lish ehtimoli: $0{,}0875 + 0{,}14 + 0{,}0225 = 0{,}25$. Keyin yechim bu ehtimolliklarning nisbati: $\frac{0{,}14}{0{,}25} = 0{,}56$. Agar avtoturargoh to‘lgan bo‘lsa, sport tadbiri bor bo‘lish ehtimoli 56% ga teng.



ehtimollarni quyidagicha yozish mumkin:

$$P(A_1) = 0{,}2 \qquad P(A_2) = 0{,}35 \qquad P(A_3) = 0{,}45$$
$$P(B \mid A_1) = 0{,}7 \qquad P(B \mid A_2) = 0{,}25 \qquad P(B \mid A_3) = 0{,}05\ .$$

Bayes' teoremasidan sport tadbiri bor (A_1) bo'lish ehtimolini hisoblash uchun foydalanish mumkin, shart shuki, avtoturargoh to'lgan (B):

$$\begin{aligned} P(A_1 \mid B) &= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{(0{,}7)(0{,}2)}{(0{,}7)(0{,}2) + (0{,}25)(0{,}35) + (0{,}05)(0{,}45)} \\ &= 0{,}56\ . \end{aligned}$$

Avtoturargoh to'lganligi haqidagi ma'lumotlarga asoslanib, ushbu oqshomda kampusda sport tadbiri bo'lish ehtimoli 56% ga teng.

Y **3.45-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Avvalgi mashq va misoldagi ma'lumotlardan foydalanib, avtoturargoh to'lgan sharti ostida akademik tadbir bo'lish ehtimoli 0,35 ekanligini tasdiqlang.[38]

Y **3.46-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

3.43 va 3.45-yo'naltirilgan mashqda avtoturargoh to'lgan sharti ostida sport tadbiri bo'lish ehtimoli 0,56 va akademik tadbir bo'lish ehtimoli 0,35 ekanligini topdingiz. Ushbu ma'lumotlardan foydalanib, P(hech qanday tadbir yo'q | avtoturargoh to'lgan) ni hisoblang.[39]

Oxirgi bir nechta mashqlar avtoturargoh to'lganligi haqidagi ma'lumotlarga asoslangan holda, kampusda sport tadbiri, akademik tadbir yoki hech qanday tadbir yo'qligi haqidagi ishonchimizni yangilash usulini taqdim etdi. Bayes' teoremasidan foydalanib, *ishonchni yangilash* strategiyasi statistikaning **Bayes statistikasi** deb ataladigan butun bir bo'limining asosi hisoblanadi. Garchi Bayes statistikasi juda muhim va foydali bo'lsa-da, biz bu kitobda undan ko'proq narsalarni yoritish uchun vaqt topolmaymiz.

Mashqlar

3.13 Qo'shma va shartli ehtimollar. P(A) = 0,3, P(B) = 0,7 .

(a) Faqat P(A) va P(B) qiymatlarini bilgan holda P(A va B) ni hisoblash mumkinmi?

(b) Agar A va B hodisalari bog'liqmas tasodifiy hodisa(jarayon)lardan kelib chiqsa,

  i. P(A va B) qanday bo'ladi?
  ii. P(A yoki B) qanday bo'ladi?
  iii. P(A|B) qanday bo'ladi?

(c) Agar bizga P(A va B) = 0,1 berilgan bo'lsa, A va B hodisalarini keltirib chiqaruvchi tasodifiy miqdor (o'zgaruvchi)lar bog'liqsizmi?

(d) Agar bizga P(A va B) = 0,1 berilgan bo'lsa, P(A|B) qanday bo'ladi?

3.14 Yer yong'oq pastasi va jele. Faraz qiling, odamlarning 80% yer yong'oq pastasini yaxshi ko'radi, 89% jeleni yaxshi ko'radi va 78% ikkisini ham yaxshi ko'radi. Tasodifiy tanlangan bir kishining yer yong'oq pastasini yaxshi ko'rishi ma'lum bo'lsa, uning jeleni ham yaxshi ko'rish ehtimoli qancha?

[38] Qisqa javob:

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid B) &= \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) + P(B \mid A_3)P(A_3)} \\ &= \frac{(0{,}25)(0{,}35)}{(0{,}7)(0{,}2) + (0{,}25)(0{,}35) + (0{,}05)(0{,}45)} \\ &= 0{,}35\ . \end{aligned}$$

[39] Har bir ehtimollik avtoturargoh to'lgan ma'lumotiga asoslanganligi sababli, komplemantdan foydalanish mumkin: $1{,}00 - 0{,}56 - 0{,}35 = 0{,}09$.

3.15 Global isish. Pew Research tomonidan o‘tkazilgan so‘rovda 1306 amerikalikka ”o‘qigan va eshitganlaringizdan kelib chiqib, yerning o‘rtacha harorati oxirgi o‘n yilliklarda isib bormoqda degan ishonchli dalillar bormi yoki yo‘qmi?” degan savol berilgan. Quyidagi jadvalda javoblarning partiya va mafkuraga ko‘ra taqsimoti keltirilgan bo‘lib, sonlar nisbiy chastotalar bilan almashtirilgan.[40]

		Javob			
		Yer isimoqda	Isimayapti	Bilmayman	Umumiy
Partiya va Mafkura	Konservativ respublikachi	0,11	0,20	0,02	0,33
	O‘rta liberal respublikachi	0,06	0,06	0,01	0,13
	O‘rta konservativ demokrat	0,25	0,07	0,02	0,34
	Liberal demokrat	0,18	0,01	0,01	0,20
	Umumiy	0,60	0,34	0,06	1,00

(a) Yer isimoqda degan ishonch va liberal demokrat bo‘lish bir-biriga mos kelmaydimi?

(b) Tasodifiy tanlangan respondent yer isimoqda deb hisoblaydi yoki liberal demokrat bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan respondent yer isimoqda deb hisoblaydi, agar u liberal demokrat bo‘lsa, ehtimoli qancha?

(d) Tasodifiy tanlangan respondent yer isimoqda deb hisoblaydi, agar u konservativ respublikachi bo‘lsa, ehtimoli qancha?

(e) Respondentning yer isimoqda deb hisoblashining partiya va mafkurasidan bog‘liqmas ekanligi kuzatiladimi? Fikringizni tushuntiring.

(f) Tasodifiy tanlangan respondent yer isimoqda deb hisoblamasa, u o‘rta liberal respublikachi bo‘lish ehtimoli qancha?

3.16 Sog‘liqni sug‘urtalash, nisbiy chastotalar. Xulq-atvor xavf omillari monitoring tizimi (BRFSS) kattalar orasida xavf omillarini aniqlash va sog‘liqni saqlashning yangi tendentsiyalarini xabar qilish uchun har yili telefon orqali o‘tkaziladigan so‘rovdir. Quyidagi jadvalda javoblarning sog‘liq holati (zo‘r, juda yaxshi, yaxshi, o‘rtacha, yomon) va sog‘liq sug‘urtasi bor yoki yo‘qligiga ko‘ra taqsimoti keltirilgan.

		Sog‘liq Holati					
		Zo‘r	Juda yaxshi	Yaxshi	o‘rtacha	Yomon	Umumiy
Sug‘urta Holati	Yo‘q	0,0230	0,0364	0,0427	0,0192	0,0050	0,1262
	Ha	0,2099	0,3123	0,2410	0,0817	0,0289	0,8738
	Umumiy	0,2329	0,3486	0,2838	0,1009	0,0338	1,0000

(a) Zo‘r sog‘liq va sog‘liq sug‘urtasiga ega bo‘lish bir-biriga mos kelmaydimi?

(b) Tasodifiy tanlangan shaxsning sog‘lig‘i zo‘r bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan shaxsning sog‘lig‘i zo‘r bo‘lish ehtimoli, agar uning sog‘liq sug‘urtasi bo‘lsa, qancha?

(d) Tasodifiy tanlangan shaxsning sog‘lig‘i zo‘r bo‘lish ehtimoli, agar uning sog‘liq sug‘urtasi bo‘lmasa, qancha?

(e) Zo‘r sog‘liq va sog‘liq sug‘urtasi bog‘liqsizdek ko‘rinadimi?

3.17 Burger tanlovi. 2010-yilda SurveyUSA tomonidan 500 Los-Anjeles aholisi orasida o‘tkazilgan so‘rovda: ”Janubiy Kaliforniyadagi eng yaxshi hamburger joyi qaysi? Five Guys Burgers? In-N-Out Burger? Fat Burger? Tommy’s Hamburgers? Umami Burger? Yoki boshqa bir joy?” degan savol berildi. Javoblarning gender bo‘yicha taqsimoti quyida keltirilgan.[41]

		Gender		
		Erkak	Ayol	Jami
Eng yaxshi hamburger joyi	Five Guys Burgers	5	6	11
	In-N-Out Burger	162	181	343
	Fat Burger	10	12	22
	Tommy’s Hamburgers	27	27	54
	Umami Burger	5	1	6
	Boshqa	26	20	46
	Aniq emas	13	5	18
	Jami	248	252	500

(a) Ayol bo‘lish va Five Guys Burgers’ni yoqtirish bir-biriga mos kelmaydimi?

[40] Pew Research Center, Majority of Republicans No Longer See Evidence of Global Warming, data collected on October 27, 2010.

[41] SurveyUSA, Results of SurveyUSA News Poll #17718, data collected on December 2, 2010.

(b) Tasodifiy tanlangan erkak In-N-Out Burgerni eng yaxshi deb hisoblash ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan ayol In-N-Out Burgerni eng yaxshi deb hisoblash ehtimoli qancha?

(d) Erkak va ayol o‘zaro uchrashayotgan bo‘lsa, ikkalasi ham In-N-Out Burgerni eng yaxshi deb hisoblash ehtimoli qancha? o‘zingiz qabul qilgan taxminlarni ko‘rsating va bu taxmin qanchalik asosli ekanligini baholang.

(e) Tasodifiy tanlangan shaxs Umami Burgerni eng yaxshi deb hisoblaydi yoki u ayol bo‘lish ehtimoli qancha?

3.18 Assortativ nikoh. Assortativ nikoh bu tasodifiy bo‘lmagan nikoh tartibi bo‘lib, unda o‘xshash genotip va/yoki fenotiplarga ega bo‘lgan shaxslar tasodifiy nikoh tartibiga nisbatan ko‘proq bir-birlari bilan turmush qurishadi. Ushbu mavzuni o‘rganayotgan tadqiqotchilar 204 skandinaviyalik erkak va ularning ayol hamkorlarining ko‘z ranglariga oid ma’lumotlarni to‘plashdi. Quyidagi jadval natijalarni umumlashtiradi.[42]

		Hamkor (ayol)			
		Ko‘k	Jigar	Yashil	Jami
o‘zini (erkak)	Ko‘k	78	23	13	114
	Jigarrang	19	23	12	54
	Yashil	11	9	16	36
	Jami	108	55	41	204

(a) Tasodifiy tanlangan erkak yoki uning hamkori ko‘k ko‘zga ega bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Tasodifiy tanlangan ko‘k ko‘zli erkakning hamkori ham ko‘k ko‘zli bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan jigarrang ko‘zli erkakning hamkori ko‘k ko‘zli bo‘lish ehtimoli qancha? Yashil ko‘zli erkakning hamkori ko‘k ko‘zli bo‘lish ehtimoli-chi?

(d) Erkak respondentlar va ularning hamkorlarining ko‘z ranglari mustaqildek ko‘rinadimi? Fikringizni tushuntiring.

3.19 Quti diagrammalarini chizish. Kirish statistikasi kursidan so‘ng, talabalarining 80% quti diagrammalarini muvaffaqiyatli chiza oladi. Quti diagrammalarini chiza olganlarning 86% kursdan o‘tgan, quti diagrammalarini chiza olmagan talabalar orasida esa faqatgina 65% kursdan o‘tgan.

(a) Ushbu vaziyatga mos daraxt diagrammasini chizing.

(b) Agar talabaning kursdan o‘tganligi ma’lum bo‘lsa, uning quti diagrammasini chiza olish ehtimolini hisoblang.

3.20 Trombozga moyillik. Genetik test odamlarning *trombozga* moyilligini aniqlash uchun ishlatiladi. Tromboz qon tomirida qon ivib, qon aylanish tizimida qon oqimini to‘sib qo‘yadigan holatdir. Ma’lumki, odamlarning 3% da ushbu moyillik mavjud. Agar odamda haqiqatan ham moyillik bo‘lsa, genetik test 99% aniq bo‘ladi, ya’ni odamda haqiqatan moyillik bo‘lganda ijobiy test natijasi ehtimoli 0,99. Agar odamda moyillik bo‘lmasa, test 98% aniq bo‘ladi. Test natijasida moyillik mavjud deb topilgan tasodifiy tanlangan odamda haqiqatan moyillik bo‘lish ehtimoli qancha?

3.21 Bu hech qachon lupus emas. Lupus - bu tibbiy hodisa bo‘lib, unda infektsiyalarni oldini olish uchun begona hujayralarga hujum qiladigan antitanalar plazma oqsillarini begona modda sifatida qabul qiladi, bu esa qon ivishining yuqori xavfini keltirib chiqaradi. Ma’lumki, aholining 2% i ushbu kasallikdan aziyat chekadi. Agar odamda haqiqatan kasallik bo‘lsa, test 98% aniq. Agar odamda kasallik bo‘lmasa, test 74% aniq. *House* nomli Fox telekanali shousida bir bemor lupusga ijobiy test berganida tez-tez ishlatiladigan satr bor: ”Bu hech qachon lupus emas.” Ushbu bayonotda haqiqat bormi, deb o‘ylaysizmi? Tegishli ehtimolliklardan foydalanib, javobingizni asoslang.

3.22 Chiqish so‘rovi. Edison Research Scott Walker’ning Viskonsin chaqiruv saylovlari uchun bir nechta manbalardan chiqish so‘rov natijalarini yig‘di. Ular respondentlarning 53% i Scott Walker’ni qo‘llab-quvvatlab ovoz berganini aniqlashdi. Bundan tashqari, Scott Walker’ni qo‘llab ovoz berganlarning 37% i kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan, Scott Walker’ga qarshi ovoz berganlarning esa 44% i kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan. Tasodifiy ravishda chiqish so‘roviga qatnashgan va kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan odamni tanladik, deb faraz qiling. Uning Scott Walker’ni qo‘llab ovoz bergan ehtimoli qancha?[43]

3.3 Kichik bosh to‘plamdan tanlanma olish

[42] B. Laeng et al. “Why do blue-eyed men prefer women with the same eye color?” In: *Behavioral Ecology and Sociobiology* 61.3 (2007), pp. 371–384.

[43] New York Times, Wisconsin recall exit polls.

Biz bosh to‘plamdan kuzatuvlarni tanlaganimizda, odatda faqatgina bosh to‘plamdagi mumkin bo‘lgan individ yoki holatlarning kichik bir qismini tanlaymiz. Biroq, ba’zan tanlamamiz shunchalik katta yoki bosh to‘plam shunchalik kichik bo‘ladiki, biz bosh to‘plamning 10% idan ko‘p qismini tanlaymiz[44] *takrorlarsiz tanlash* (ya’ni bir xil holatlarni ikki marta tanlash imkoniyati yo‘q). Bosh to‘plamning shunday katta bir qismini tanlash namunani qanday tahlil qilishimizga muhim ta’sir ko‘rsatishi mumkin.

M **3.47-MISOL**

Professor ba’zan savolga javob berish uchun bir talabani tasodifiy ravishda tanlaydi. Agar har bir talabani tanlash imkoniyati teng bo‘lsa va sinfda 15 kishi bo‘lsa, keyingi savolda u sizni tanlash ehtimoli qanday?

Agar savol berilishi mumkin bo‘lgan 15 kishi bo‘lsa va hech kim darsga kelmagan bo‘lmasa, ehtimol $1/15$ yoki taxminan 0,067 bo‘ladi.

M **3.48-MISOL**

Agar professor 3 ta savol bersa, siz tanlanmaslik ehtimoli qanday? Faraz qilaylik, u bitta dars davomida bir xil odamni ikki marta tanlamaydi.

Birinchi savol uchun u boshqa odamni tanlash ehtimoli $14/15$ bo‘ladi. Ikkinchi savolni berganida, hali so‘roq qilinmagan 14 ta odam qoladi. Shunday qilib, agar birinchi savolda siz tanlanmagan bo‘lsangiz, sizni yana tanlanmaslik ehtimoli $13/14$ bo‘ladi. Xuddi shunday, uchinchi savolda yana tanlanmaslik ehtimoli $12/13$ bo‘ladi va uchta savoldan birortasida ham tanlanmaslik ehtimoli quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned} &P(\text{3 ta savolda tanlanmaslik}) \\ &\quad = P(\texttt{Q1} = \texttt{tanlanmadi}, \texttt{Q2} = \texttt{tanlanmadi}, \texttt{Q3} = \texttt{tanlanmadi}.) \\ &\quad = \frac{14}{15} \times \frac{13}{14} \times \frac{12}{13} = \frac{12}{15} = 0{,}80\ . \end{aligned}$$

Y **3.49-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.1-misolda ehtimollarni ko‘paytirishga qanday qoida ruxsat berdi?[45]

M **3.50-MISOL**

Faraz qilaylik, professor oldin kimni tanlaganiga ahamiyat bermasdan tasodifiy ravishda tanlaydi, ya’ni talabalar bir necha marta tanlanishi mumkin. Uchta savolning birortasi uchun tanlanmaslik ehtimoli qanday?

Har bir tanlash bog‘liqmas va har bir savol uchun tanlanmaslik ehtimoli $14/15$ ga teng. Shunday qilib, bog‘liqsiz hodisa(jarayon)lar uchun ko‘paytirish qoidasidan foydalanishimiz mumkin.

$$\begin{aligned} &P(\text{uchta savolda tanlanmaslik}) \\ &\quad = P(\texttt{Q1} = \texttt{tanlanmadi}, \texttt{Q2} = \texttt{tanlanmadi}, \texttt{Q3} = \texttt{tanlanmadi}.) \\ &\quad = \frac{14}{15} \times \frac{14}{15} \times \frac{14}{15} = 0{,}813\ . \end{aligned}$$

Har bir savol uchun yangi odamni tanlagan holatga nisbatan tanlanmaslik ehtimoli biroz yuqoriroq. Biroq, endi siz bir necha marta tanlanishingiz mumkin.

Y **3.51-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.3-misoldagi holatda, uchta savolga javob berish uchun tanlanish ehtimoli qanday?[46]

[44] 10% qoidasi bu holatlarda muhim bo‘lishini ko‘rsatadigan bir tavsiya chegarasi.

[45] Hisoblangan uchta ehtimollikdan biri marginal ehtimollik edi: $P(\texttt{Q1=tanlanmadi})$ va ikkitasi shartli ehtimollik edi:

$$\begin{aligned} &P(\texttt{Q2} = \texttt{tanlanmadi} \mid \texttt{Q1} = \texttt{tanlanmadi}) \\ &P(\texttt{Q3} = \texttt{tanlanmadi} \mid \texttt{Q1} = \texttt{tanlanmadi}, \texttt{Q2} = \texttt{tanlanmadi})\ . \end{aligned}$$

Umumiy ko‘paytirish qoidasi (*General Multiplication Rule*) dan foydalanib, ushbu uchta ehtimollikning ko‘paytmasi uchta savolda tanlanmaslik ehtimolini bildiradi.

Agar kichik bosh to‘plamdan **takrorlarsiz** tanlash amalga oshirilsa, bizning kuzatuvlarimiz orasida bog‘liqsizlik bo‘lmaydi. 3.1-misolda, ikkinchi savol uchun tanlanmaslik ehtimoli birinchi savol uchun tanlanmaganlikka bog‘liq edi. 3.3-misolda esa, professor talabalarini **takroran** tanladi: u butun sinfni bir necha marta tanladi va oldin kimni tanlaganiga ahamiyat bermadi.

Y **3.52-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Sizning bo‘limingiz lotereya tashkil qilmoqda. Ular 30 ta chipta sotib, yettita mukofot taklif qilishadi. (a) Ular chiptalarni shapka ichiga solib, har bir mukofot uchun bittadan tanlaydilar. Chiptalar *takrorlarsiz* tanlanadi, ya’ni tanlangan chiptalar shapkaga qaytarilmaydi. Agar siz bir dona chipta sotib olsangiz, mukofot yutish ehtimoli qanday? (b) Agar chiptalar *takroran* tanlansa, natija qanday bo‘ladi?[47]

Y **3.53-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.52-yo‘naltirilgan mashqdagi javoblaringizni taqqoslang. Tanlash usuli mukofot yutish imkoniyatingizga qanday ta’sir qiladi?[48]

Agar 3.52-yo‘naltirilgan mashqni 30 ta chipta o‘rniga 300 ta chipta bilan takrorlaganimizda, qiziqarli natijani ko‘rgan bo‘lardik: natijalar deyarli bir xil bo‘ladi. Takrorlarsiz tanlashda ehtimollik 0,0233, takror bilan esa 0,0231 ga teng bo‘ladi. Agar namunalar bosh to‘plamning faqat kichik bir qismi (10% dan kam) bo‘lsa, takrorlarsiz tanlashda ham kuzatuvlar deyarli bog‘liqsiz bo‘ladi.

Mashqlar

3.23 Idishda marmarlar. Faraz qiling, sizda 5 ta qizil, 3 ta ko‘k va 2 ta to‘q sariq marmar bo‘lgan idish bor.

(a) Birinchi tortilgan marmar ko‘k bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Faraz qiling, birinchi tortishda ko‘k marmar tortildi. Agar qaytarib qo‘yish bilan tortilsa, ikkinchi tortishda ko‘k marmar tortilish ehtimoli qancha?

(c) Faraz qiling, buning o‘rniga birinchi tortishda to‘q sariq marmar tortildi. Agar qaytarib qo‘yish bilan tortilsa, ikkinchi tortishda ko‘k marmar tortilish ehtimoli qancha?

(d) Agar qaytarib qo‘yish bilan tortilsa, ketma-ket ikki ko‘k marmar tortilish ehtimoli qancha?

(e) Qaytarib qo‘yish bilan tortishda tortishlar bog‘liqsizmi? Tushuntiring.

3.24 Tortmada paypoqlar. Sizning paypoq tortmangizda 4 ta ko‘k, 5 ta kulrang va 3 ta qora paypoq bor. Bir kuni ertalab uyg‘onganingizda, yarim uxlab ikki paypoqni tasodifiy olib kiyib oldingiz. Quyidagi holatlarning ehtimolini toping:

(a) 2 ta ko‘k paypoq

(b) hech qanday kulrang paypoq

(c) hech bo‘lmaganda 1 ta qora paypoq

(d) yashil paypoq

(e) mos keluvchi paypoqlar

3.25 Sumkada chiplar. Faraz qiling, sizda 5 ta qizil, 3 ta ko‘k va 2 ta to‘q sariq chiplar bo‘lgan sumka bor.

(a) Faraz qiling, siz chip tortdingiz va u ko‘k edi. Agar qaytarib qo‘ymasdan tortilsa, keyingisi ham ko‘k bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Faraz qiling, siz chip tortdingiz va u to‘q sariq edi, va keyin qaytarib qo‘ymasdan ikkinchi chip tortildi. Ushbu ikkinchi chip ko‘k bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Agar qaytarib qo‘ymasdan tortilsa, ketma-ket ikki ko‘k chip tortilish ehtimoli qancha?

(d) Qaytarib qo‘ymasdan tortishda tortishlar bog‘liqsizmi? Tushuntiring.

[46] $P(\text{uchta savolga javob berish uchun tanlanish}) = \left(\frac{1}{15}\right)^3 = 0{,}00030$.

[47] (a) Avval yutqazish ehtimolini aniqlaymiz. Chiptalar *takrorlarsiz* tanlanadi, bu esa birinchi tanlovda yutmaslik ehtimoli 29/30, ikkinchisida 28/29, ... va yettinchisida 23/24 ekanligini bildiradi. Hech qanday mukofot yutmaslik ehtimoli bu alohida ehtimolliklarning ko‘paytmasiga teng: 23/30. Demak, mukofot yutish ehtimoli $1-23/30 = 7/30 = 0{,}233$. (b) Agar chiptalar *takror bilan* tanlansa, yettita bog‘liqsiz (mustaqil) tanlov amalga oshiriladi. Yana, avval mukofot yutmaslik ehtimolini topamiz: $(29/30)^7 = 0{,}789$. Shunday qilib, *kamida* bitta mukofot yutish ehtimoli 0,211 ga teng.

[48] Takrorlarsiz tanlashda mukofot yutish ehtimoli takror bilan tanlashga nisbatan taxminan 10% yuqori. Biroq, ushbu tanlash protsedurasi ostida ko‘pi bilan bitta mukofot yutib olish mumkin.

3.26 Kitoblar kitob javonida. Quyidagi jadvalda kitoblarning badiiy yoki ilmiy bo‘lishi va qattiq muqovali yoki yumshoq muqovali bo‘lishiga qarab taqsimoti keltirilgan.

		Format		
		Qattiq muqova	Yumshoq muqova	Jami
Turi	Badiiy	13	59	72
	Ilmiy	15	8	23
	Jami	28	67	95

(a) Qaytarib qo‘ymasdan tortishda birinchi bo‘lib qattiq muqovali kitob, keyin yumshoq muqovali badiiy kitob tortilish ehtimoli qancha?

(b) Qaytarib qo‘ymasdan tortishda birinchi bo‘lib badiiy kitob, keyin qattiq muqovali kitob tortilish ehtimoli qancha?

(c) (b) qismidagi holatning ehtimolini hisoblang, lekin bu safar birinchi kitob kitob javoniga qaytarilib, ikkinchi kitob tasodifiy tortilgan holatda hisoblang.

(d) (b) va (c) qismlarining yakuniy javoblari juda o‘xshash. Nima uchun bunday ekanligini tushuntiring.

3.27 Talabalarning kiyimlari. Sinfda 24 ta talaba bor, ularning 7 tasi jinsi shim kiygan, 4 tasi shorti kiygan, 8 tasi yubka kiygan, va qolganlari legging kiygan. Agar 3 talaba tasodifiy qaytarib qo‘ymasdan tanlansa, ulardan biri legging kiygan va qolgan ikkitasi jinsi shim kiygan bo‘lish ehtimoli qancha? E’tibor bering, bu kiyim variantlari bir-birini istisno qiladi.

3.28 Tug‘ilgan kun masalasi. Faraz qilaylik, uch kishini tasodifiy tanladik. Quyidagi savollar uchun har kimning tug‘ilgan kuni fevralning 29-kuniga to‘g‘ri kelishi maxsus holatini hisobga olmang va tug‘ilishlar yil davomida teng taqsimlangan deb faraz qiling.

(a) Birinchi ikkita odamning tug‘ilgan kuni bir xil bo‘lish ehtimoli qancha?

(b) Hech bo‘lmaganda ikkita odamning tug‘ilgan kuni bir xil bo‘lish ehtimoli qancha?

3.4 Tasodifiy miqdorlar

Jarayonni **tasodifiy miqdor** deb ataladigan model yordamida ifodalash foydali bo‘lishi mumkin. Bunday model bizga matematik ramka va statistik tamoyillarni qo‘llash orqali haqiqiy dunyodagi natijalarni yaxshiroq tushunish va bashorat qilish imkonini beradi.

Ⓜ **3.54-MISOL**

Statistika darsi uchun ikkita kitob: asosiy darslik va unga mos keladigan o‘quv qo‘llanma belgilangan. Universitet do‘koni ro‘yxatdan o‘tgan talabalarning 20% -i hech qaysi kitobni sotib olmasligini, 55% -i faqat asosiy darslikni sotib olishini va 25% -i ikkala kitobni sotib olishini aniqladi. Bu foizlar bir semestrdan boshqasiga qaraganda nisbatan barqaror. Agar 100 ta talaba ro‘yxatdan o‘tgan bo‘lsa, bu sinfga universitet do‘koni qancha kitob sotishni kutishi mumkin?

Taxminan 20 talaba hech qanday kitob sotib olmaydi (jami 0 ta kitob), taxminan 55 tasi bitta kitob sotib oladi (jami 55 ta kitob) va taxminan 25 tasi ikkita kitob sotib oladi (bu 25 talaba uchun jami 50 ta kitob). Do‘kon bu sinfga taxminan 105 ta kitob sotishni kutishi mumkin.

Ⓨ **3.55-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Agar do‘kon 105 ta kitobdan bir oz ko‘proq yoki kamroq sotadigan bo‘lsa, ajablanasizmi?[49]

Ⓜ **3.56-MISOL**

Darslik narxi $137 va o‘quv qo‘llanmaning narxi $33. Bu 100 nafar talabadan iborat sinfdan universitet do‘koni qancha daromad kutishi mumkin?

Taxminan 55 talaba faqat darslik sotib oladi va bu quyidagicha daromad keltiradi:

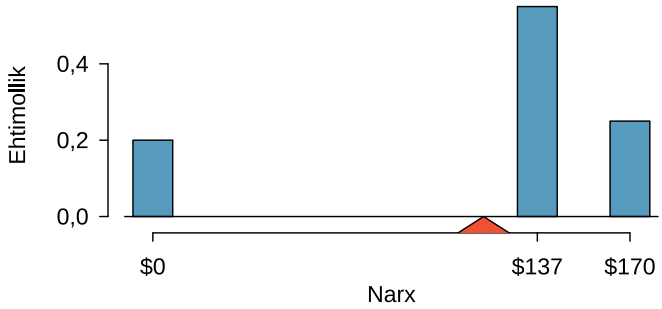
$$\$137 \times 55 = \$7535 \ .$$

[49] Agar ular biroz ko‘proq yoki kamroq sotishsa, bu ajablanarli emas. Umid qilamanki, 1 bo‘limi tabiiy o‘zgaruvchanlikni tushuntirib bergan. Masalan, agar biz tanga 100 marta tashlasak, u odatda aynan yarmida ”gerb” bo‘lmaydi, lekin bu natija yaqin bo‘ladi.

Taxminan 25 talaba esa ikkala kitobni sotib oladi va ular quyidagicha jami to‘laydi:

$$(\$137 + \$33) \times 25 = \$170 \times 25 = \$4250 \ .$$

Shunday qilib, universitet do‘koni ushbu 100 talabadan bir sinf uchun taxminan $\$7535 + \$4250 = \$11785$ daromad olishni kutishi mumkin. Biroq, ba’zi *tanlash o‘zgaruvchanligi* mavjud bo‘lishi mumkin, shuning uchun haqiqiy summa biroz farq qilishi mumkin.



3.18-rasm. Universitet do‘konining bitta talaba uchun daromadining ehtimollik taqsimoti. Uchburchak har bir talaba uchun o‘rtacha daromadni ko‘rsatadi.

M **3.57-MISOL**

Ushbu kurs uchun har bir talaba bo‘yicha o‘rtacha daromad qancha?

Kutilayotgan jami daromad \$11785 va 100 ta talaba bor. Shunday qilib, har bir talaba uchun kutilayotgan daromad $\$11785/100 = \$117{,}85$ ga teng.

3.4.1 Matematik kutilma (Kutilma qiymat)

O‘zgaruvchi yoki natijasi sonli bo‘lgan jarayonni **tasodifiy miqdor** deb ataymiz va odatda ushbu tasodifiy miqdorni X, Y yoki Z kabi katta harflar bilan ifodalaymiz. Bir talaba statistik kitoblari uchun qancha pul sarflashi tasodifiy miqdordir va uni X bilan belgilaymiz.

TASODIFIY MIQDOR

Natijasi sonli bo‘lgan tasodifiy jarayon yoki miqdor.

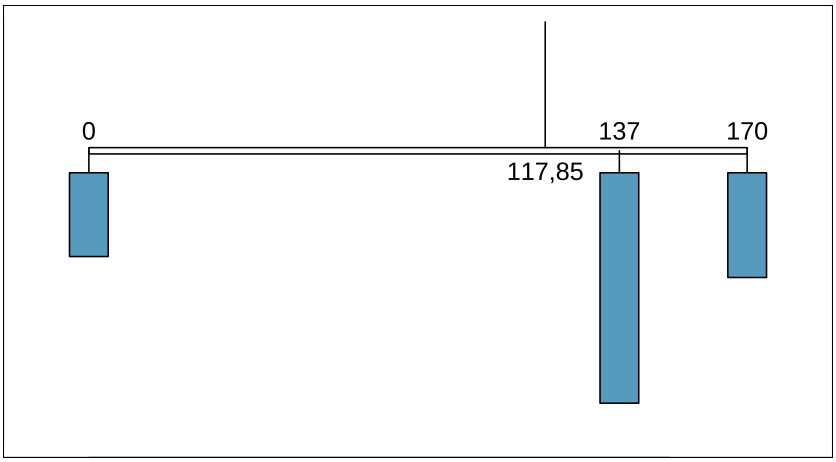
X ning mumkin bo‘lgan natijalari mos keluvchi kichik harflar x va indekslar bilan belgilanadi. Masalan, biz $x_1 = \$0$, $x_2 = \$137$ va $x_3 = \$170$ deb yozamiz, bu natijalar ehtimolliklari 0.20, 0.55 va 0.25. X ning taqsimoti 3.18-rasmda va 3.19-rasmda umumlashtirilgan.

i	1	2	3	Jami
x_i	\$0	\$137	\$170	–
$P(X = x_i)$	0,20	0,55	0,25	1,00

3.19-rasm. Bitta talaba uchun universitet do‘konining daromadini ifodalaydigan tasodifiy miqdor X ning ehtimollik taqsimoti.

X ning o‘rtacha natijasini 3.57-misolda \$117,85 sifatida hisobladik. Ushbu o‘rtacha qiymatni X ning **matematik kutilmasi** deb ataymiz va uni $E(X)$ deb belgilaymiz. tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi har bir natijani uning ehtimolligiga ko‘paytirib, ularni qo‘shish orqali hisoblanadi:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times P(X = 0) + 137 \times P(X = 137) + 170 \times P(X = 170) \\ &= 0 \times 0{,}20 + 137 \times 0{,}55 + 170 \times 0{,}25 = 117{,}85 \ . \end{aligned}$$



3.20-rasm. X uchun ehtimollik taqsimotini ifodalovchi og‘irliklar tizimi. Ip tizimni muvozanatda saqlash uchun taqsimotni o‘rtacha qiymatda ushlab turadi.

DISKRET TASODIFIY MIQDORNING MATEMATIK KUTILMASI (KUTILMA QIYMATI)

Agar X tasodifiy miqdor x_1, ..., x_k qiymat (natija)larni $P(X = x_1)$, ..., $P(X = x_k)$ ehtimolliklar bilan olsa, X ning matematik kutilmasi (kutilma qiymati) har bir qiymat (natija)ni uning mos ehtimolligiga ko‘paytirib, ularning yig‘indisidan iborat:

$$\begin{aligned} E(X) &= x_1 \times P(X = x_1) + \cdots + x_k \times P(X = x_k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) \ . \end{aligned}$$

$E(X)$ belgilash o‘rniga yunon harfi μ ishlatilishi mumkin.

Tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (kutilma qiymati) o‘rtacha qiymat(natija)ni bildiradi. Masalan, $E(X) = 117{,}85$ universitet do‘konining bitta talabadan kutayotgan o‘rtacha daromadini bildiradi va uni $\mu = 117{,}85$ deb ham yozishimiz mumkin.

Tasodifiy miqdorning kutilma qiymatini uzluksiz tasodifiy miqdor uchun ham hisoblash mumkin (qarang 3.5-bo‘lim). Biroq, bu biroz differensial hisoblashni talab qiladi va uni keyingi dars uchun qoldiramiz.[50]

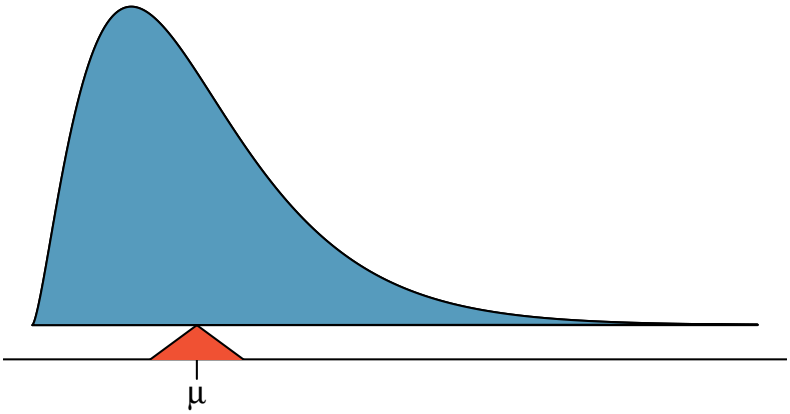
Fizikada matematik kutilma (kutilma qiymat) tortish markazi (og‘irlik markazi) bilan bir xil ma’noga ega. Taqsimot har bir natijada joylashgan og‘irliklar seriyasini ifodalashi mumkin va o‘rtacha qiymat muvozanat nuqtasini bildiradi. Bu fikr 3.18 va 3.20 rasmlarida ifodalangan. Og‘irlik markazi tushunchasi uzluksiz ehtimollik taqsimotlariga ham kengayadi. 3.21-rasmda o‘rtacha qiymatda joylashtirilgan tayanch ustida muvozanatga keltirilgan uzluksiz ehtimollik taqsimoti ko‘rsatilgan.

3.4.2 Tasodifiy miqdorlar o‘zgaruvchanligi

Faraz qilaylik, siz universitet do‘konini boshqaryapsiz. Qancha daromad kutilayotganini bilishdan tashqari, daromadning o‘zgaruvchanligini (volatiligi) bilishni ham xohlashingiz mumkin.

Dispersiya va standart chetlanish tasodifiy miqdorning o‘zgaruvchanligini tavsiflash uchun ishlatiladi. 2.1.4-bo‘limida dispersiya va standart chetlanishni ma’lumotlar to‘plami uchun qanday topish ko‘rsatib o‘tilgan edi. Biz avval o‘rtacha qiymatdan farqlarni $(x_i - \mu)$ hisobladik, ushbu farqlarni kvadratga oshirdik va ularning o‘rtachasini dispersiya sifatida oldik. Tasodifiy miqdor holatida biz yana kvadrat farqlarni hisoblaymiz. Ammo, ularning yig‘indisini mos ehtimolliklarga ko‘paytirib, kutilma qiymat uchun qilganimiz kabi hisoblaymiz. Ushbu kvadrat farqlarning vaznli yig‘indisi dispersiyaga teng, hamda standart chetlanishni dispersiyaning kvadrat ildizini olib hisoblaymiz, xuddi

[50] $\mu = \int x f(x) dx$ bu yerda $f(x)$ uzluksiz tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini ifodalaydi.



3.21-rasm. Uzluksiz taqsimotni ham uning o‘rtacha qiymatida muvozanatlash mumkin.

2.1.4-bo‘limidagi kabi.

UMUMIY DISPERSIYA FORMULASI

Agar X tasodifiy miqdor x_1, ..., x_k qiymat(natija)larni $P(X = x_1)$, ..., $P(X = x_k)$ ehtimolliklar bilan olsa (qabul qilsa) va matematik kutilmasi (kutilma qiymati) $\mu = E(X)$ bo‘lsa, X ning dispersiyasi $Var(X)$ yoki σ^2 bilan belgilanadi:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= (x_1 - \mu)^2 \times P(X = x_1) + \cdots \\ &\qquad \cdots + (x_k - \mu)^2 \times P(X = x_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k} (x_j - \mu)^2 P(X = x_j)\ .\end{aligned}$$

X ning standart chetlanishi σ, dispersiyaning kvadrat ildiziga teng.

3.58-MISOL

Universitet do‘koni uchun bitta statistik talabaning daromadi bo‘lgan X tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi (kutilma qiymati), dispersiyasi va standart chetlanishini hisoblang.

Har bir natija uchun hisoblarni alohida saqlovchi jadval yaratish foydali, so‘ng natijalarni qo‘shamiz.

i	1	2	3	Jami
x_i	\$0	\$137	\$170	
$P(X = x_i)$	0,20	0,55	0,25	
$x_i \times P(X = x_i)$	0	75,35	42,50	117,85

Shunday qilib, matematik kutilma (kutilma qiymat) $\mu = 117.85$, bu avvalroq hisoblangan edi. Dispersiyani hisoblash uchun jadvalni kengaytiramiz:

i	1	2	3	Jami
x_i	\$0	\$137	\$170	
$P(X = x_i)$	0,20	0,55	0,25	
$x_i \times P(X = x_i)$	0	75,35	42,50	117,85
$x_i - \mu$	−117,85	19,15	52,15	
$(x_i - \mu)^2$	13 888,62	366,72	2719,62	
$(x_i - \mu)^2 \times P(X = x_i)$	2777,7	201,7	679,9	3659,3

X ning dispersiyasi $\sigma^2 = 3659{,}3$, ya’ni standart chetlanish $\sigma = \sqrt{3659{,}3} = \$60{,}49$ ga teng.

Y **3.59-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Universitet do‘koni shuningdek, $159 narxdagi kimyo darsligini va $41 narxdagi qo‘shimcha kitobni taklif qiladi. Oldingi tajribaga asoslanib, ular kimyo talabalarining taxminan 25% i faqat darslikni sotib olishini, 60% i esa darslik va qo‘shimchani birga sotib olishini bilishadi.[51]

(a) Talabalar qanday ulushi hech qanday kitob sotib olmaydi? Faraz qilaylik, hech bir talaba faqat qo‘shimcha kitobni darsliksiz sotib olmaydi.

(b) Y ni bitta talabadan olinadigan daromadni ifodalovchi o‘zgaruvchi sifatida aniqlang. Y ning ehtimollik taqsimotini, ya’ni har bir natija va unga mos ehtimollik uchun jadval yozing.

(c) Bitta kimyo talabadan olinadigan o‘rtacha (kutilma) daromadni hisoblang.

(d) Standart chetlanishni topib, bitta talaba daromadiga bog‘liq o‘zgaruvchanlikni tavsiflang.

3.4.3 Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalari

Hozirgacha biz har bir o‘zgaruvchini o‘z-o‘zidan to‘liq hikoya sifatida ko‘rib chiqdik. Ba’zida esa o‘zgaruvchilar kombinatsiyasini ishlatish maqsadga muvofiqdir. Masalan, odamning haftasiga ishga qatnashga sarflaydigan vaqti bir nechta kunlik qatnovlarga bo‘linishi mumkin. Xuddi shunday, aktsiyalar portfelidagi umumiy foyda yoki zarar uning tarkibiy qismlaridagi foyda va zararlarning yig‘indisidir.

M **3.60-MISOL**

John haftada besh kun ishga qatnaydi. Biz X_1 ni dushanba kuni, X_2 ni seshanba kuni va hokazo, uning ishga borish vaqtini ifodalash uchun ishlatamiz. Uning haftalik ishga borish vaqtini W bilan belgilaymiz va X_1, ..., X_5 dan foydalangan holda tenglama yozing.

Uning haftalik ishga borish vaqti besh kunlik qiymatlarning yig‘indisidir:

$$W = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \ .$$

Haftalik ishga borish vaqti W ni qismlarga ajratish tasodifiylikning har bir manbasini tushunish uchun ramka beradi va W ni modellashtirishda foydalidir.

M **3.61-MISOL**

John har kuni ishga borish uchun o‘rtacha 18 daqiqa sarflaydi. Uning haftalik ishga borish vaqti uchun o‘rtacha qancha vaqt sarflashini kutasiz?

Bizga aytildiki, ishga borish vaqtining o‘rtacha qiymati (ya’ni, kutilma qiymati) kuniga 18 daqiqa: $E(X_i) = 18$. Besh kunlik yig‘indining kutilayotgan vaqtini topish uchun har bir kun uchun kutilayotgan vaqtni qo‘shishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} E(W) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \\ &= 18 + 18 + 18 + 18 + 18 = 90 \text{ daqiqa} \ . \end{aligned}$$

Jami vaqtning o‘rtacha (kutilma) qiymati har bir kunning o‘rtacha (kutilma) qiymatlarining yig‘indisiga teng. Umuman olganda, tasodifiy miqdorlar yig‘indisining o‘rtacha (kutilma) qiy-

[51] (a) 100% - 25% - 60% = 15% talabalar dars uchun hech qanday kitob sotib olmaydi. (b)-qism quyidagi jadvalning birinchi ikki qatori bilan ifodalanadi. (c)-qism uchun kutilma qiymat $y_i \times P(Y = y_i)$ qatoridagi jami sifatida berilgan. (d)-qism natijasi oxirgi qatorning jami bo‘yicha dispersiyaning kvadrat ildizi: $\sigma = \sqrt{Var(Y)} = \$69{,}28$.

i (holat)	1 (`kitobYo‘q`)	2 (`darslik`)	3 (`ikkalasi`)	Jami
y_i	0,00	159,00	200,00	
$P(Y = y_i)$	0,15	0,25	0,60	
$y_i \times P(Y = y_i)$	0,00	39,75	120,00	$E(Y) = 159{,}75$
$y_i - E(Y)$	−159,75	−0,75	40,25	
$(y_i - E(Y))^2$	25 520,06	0,56	1620,06	
$(y_i - E(Y))^2 \times P(Y)$	3828,0	0,1	972,0	$Var(Y) \approx 4800$

mati har bir tasodifiy miqdor uchun o‘rtacha (kutilma) qiymatlar yig‘indisiga teng.

Y **3.62-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Elena bir kassa auksionida televizor sotmoqda va auksionda toster pechni sotib olishni rejalashtirmoqda. Agar X televizorni sotishdan tushgan foydani, Y esa toster pechining narxini ifodalasa, Elenaning naqd puldagi sof o‘zgarishini ifodalovchi tenglama yozing.[52]

Y **3.63-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Oldingi auksionlarga asoslanib, Elena televizordan taxminan \$175 daromad olishni va toster pech uchun taxminan \$23 to‘lashni kutmoqda. Umumiy hisobda, u qancha daromad yoki xarajat qilishni kutmoqda?[53]

Y **3.64-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Agar John’s haftalik ishga borish vaqti aynan 90 daqiqa bo‘lmasa yoki Elena aynan \$152 daromad qilmasa, ajablanasizmi? Izohlang.[54]

Hozirgacha tasodifiy miqdorlarning kombinatsiyalariga oid ikkita muhim tushuncha kiritildi. Birinchidan, yakuniy qiymat ba’zan tenglama orqali uning qismlarining yig‘indisi sifatida tavsiflanishi mumkin. Ikkinchidan, intuitiv ravishda ushbu tenglamaga har bir individual o‘rtacha qiymatni kiritish biz kutilayotgan jami o‘rtacha qiymatni beradi. Ushbu ikkinchi nuqta aniqlashtirishga muhtoj – bu *tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalari* deb ataladigan holatlarda kafolatlangan to‘g‘ridir.

Ikki tasodifiy miqdor X va Y ning **chiziqli kombinatsiyasi** quyidagicha ifodalanadi:

$$aX + bY$$

bu yerda a va b ba’zi aniqlangan va ma’lum sonlardir. John ishga borish vaqti uchun har biri ish kuniga tegishli bo‘lgan beshta tasodifiy miqdor mavjud edi va har bir tasodifiy miqdor 1 koeffitsientga ega bo‘lgan:

$$1X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 1X_4 + 1X_5$$

Elena uchun sof foyda yoki zarar holatida esa X tasodifiy miqdor +1 koeffitsientga va Y tasodifiy miqdor -1 koeffitsientga ega edi.

Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyasining o‘rtacha qiymatini hisoblashda, har bir tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymatini kiritish va yakuniy natijani hisoblash mumkin (xavfsiz)dir. Tasodifiy miqdorlarning chiziqli bo‘lmagan kombinatsiyalari uchun misollar – bunday holatlarda o‘rtacha qiymatlarni kiritish natijada aniq o‘rtacha qiymatga olib kelmaydi – izohni qarang.[55]

TASODIFIY MIQDORLARNING CHIZIQLI KOMBINATSIYALARI VA O‘RTACHA QIYMAT (NATIJA)

Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$aX + bY$$

bu yerda a va b ba’zi o‘zgarmas (aniqlangan) sonlardir. Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyasining o‘rtacha qiymatini hisoblash uchun har bir tasodifiy miqdorning o‘rtacha qiymatini kiritib natijani hisoblang:

$$a \times E(X) + b \times E(Y) \ .$$

Eslatib o‘tamiz, kutilma qiymat o‘rtacha qiymat bilan bir xil, masalan, $E(X) = \mu_X$.

[52] U televizor uchun X dollar oladi, lekin toster pech uchun Y dollar sarflaydi: $X - Y$.

[53] $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 175 - 23 = \$152$. U taxminan \$152 daromad qilishni kutmoqda.

[54] Yo‘q, chunki ehtimol biroz o‘zgaruvchanlik mavjud. Masalan, har kuni tirbandlik har xil bo‘lishi mumkin va auksion narxlari tovarlarning sifati va ishtirokchilarning qiziqishiga qarab o‘zgarishi mumkin.

[55] Agar X va Y tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, quyidagi kombinatsiyalarni ko‘rib chiqing: X^{1+Y}, $X \times Y$, X/Y. Bunday hollarda har bir tasodifiy miqdor uchun o‘rtacha qiymatni kiritish va natijani hisoblash, odatda, yakuniy natijaning aniq o‘rtacha qiymatini bermaydi.

3.65-MISOL

Leonard Caterpillar Inc (aksiyalar kodi: CAT) ga \$6000 va Exxon Mobil Corp (XOM) ga \$2000 sarmoya kiritgan. Agar X kelasi oy Caterpillar aksiyalarining o‘zgarishini va Y Exxon Mobil aksiyalarining o‘zgarishini ifodalasa, Leonardning aksiyalardan kelgan foyda yoki zararini ifodalaydigan tenglamani yozing.

Soddalik uchun, X va Y foizlarda emas, balki o‘nli kasr sonlar shaklida ifodalangan deb hisoblaymiz (masalan, agar Caterpillar aksiyalari 1% ga oshsa, unda $X = 0{,}01$; yoki agar u 1% ga kamaygan bo‘lsa, unda $X = -0{,}01$). Shunda Leonardning foydasini quyidagicha tenglama shaklida yozishimiz mumkin:

$$\$6000 \times X + \$2000 \times Y \ .$$

Agar biz X va Y uchun aksiyalar qiymatlaridagi o‘zgarishni kiritadigan bo‘lsak, ushbu tenglama Leonardning aksiyalar portfeli qiymatidagi oylik o‘zgarishni beradi. Musbat qiymat foydani, manfiy qiymat esa zararni bildiradi.

3.66-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

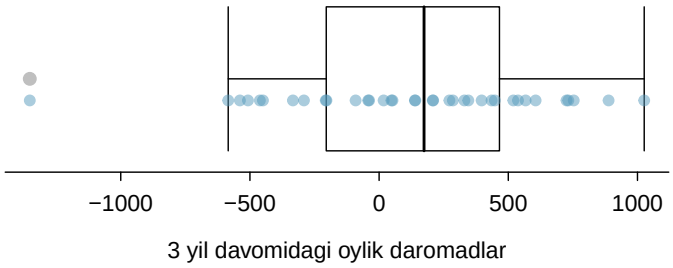
Caterpillar aksiyalari so‘nggi paytlarda oyiga 2,0% ga va Exxon Mobil aksiyalari 0,2% ga oshmoqda. Leonardning aksiyalar portfeli kelasi oyda qancha o‘zgarishini hisoblang.[56]

3.67-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

3.66-yo‘naltirilgan mashqga ko‘ra, Leonard ijobiy foyda keltirishini kutishingiz kerak edi. Ammo, agar u aslida bu oyda zarar ko‘rsa, hayron bo‘lasizmi?[57]

3.4.4 Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalaridagi o‘zgaruvchanlik

Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalaridan o‘rtacha natijani aniqlash foydali bo‘lsada, ushbu kombinatsiyalarning umumiy natijasiga bog‘liq noaniqlikni tushunish ham muhimdir. Leonardning aksiyalar portfeli sof foydasi yoki zarari 3.66-mashqda ko‘rib chiqilgan edi. Biroq, ushbu portfelning o‘zgaruvchanligi haqida miqdoriy muhokama o‘tkazilmagan. Masalan, ma’lumotlarga ko‘ra, oylik o‘rtacha foyda \$124 atrofida bo‘lishi mumkin, lekin bu kafolatlanmagan. 3.22-rasmda Leonardnikiga o‘xshash portfelning uch yillik davrdagi oylik o‘zgarishlari ko‘rsatilgan. Foydalar va zararlar juda keng ko‘lamda farqlanadi va ushbu o‘zgarishlarni miqdoriy baholash aksiyalarga investitsiya qilishda muhimdir.



3.22-rasm. Leonardnikiga o‘xshash portfelning 36 oylik o‘zgarishi, \$6000 Caterpillar aksiyalarida va \$2000 Exxon Mobil aksiyalarida.

Ko‘plab oldingi hollarda bo‘lgani kabi, Leonardning oylik daromadiga bog‘liq noaniqlikni tavsiflash uchun dispersiya va standart chetlanishdan foydalanamiz. Buning uchun har bir aksiya bo‘yicha oylik daromadning dispersiyalari foydali bo‘ladi va bu qiymatlar 3.23-rasmda ko‘rsatilgan. Aksiyalarning daromadlari deyarli bog‘liqsizdir.

Bu yerda Leonardning oylik daromadiga bog‘liq noaniqlikni tavsiflash uchun ehtimollar nazariya-

[56] $E(\$6000 \times X + \$2000 \times Y) = \$6000 \times 0{,}020 + \$2000 \times 0{,}002 = \$124$.

[57] Yo‘q. Aksiyalar vaqt o‘tishi bilan ko‘tarilishga moyil bo‘lsa-da, ular qisqa muddatda ko‘pincha o‘zgaruvchan bo‘ladi.

	O‘rtacha ($\bar{x}$)	Standart chetlanish (s)	Dispersiya (s^2)
CAT	0,0204	0,0757	0,0057
XOM	0,0025	0,0455	0,0021

3.23-rasm. CAT va XOM aksiyalari uchun o‘rtacha, standart chetlanish va dispersiya. Ushbu statistikalar tarixiy aksiyalar ma’lumotlaridan baholanib, tanlanma statistikalar uchun belgilash ishlatilgan.

sidagi bir tenglamadan foydalanamiz; ushbu usulning isbotini maxsus ehtimollar kursiga qoldiramiz. Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyasi dispersiyasini hisoblash uchun har bir tasodifiy miqdorning dispersiyasini kiritib, koeffitsientlarni kvadratga oshirish orqali hisoblash mumkin:

$$Var(aX + bY) = a^2 \times Var(X) + b^2 \times Var(Y) \ .$$

Ushbu tenglamaning to‘g‘ri bo‘lishi uchun tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liqsiz bo‘lishi kerak; agar bog‘liqsizlik buzilgan bo‘lsa, ushbu tenglama o‘zgartirilishi kerak, bu mavzuni kelajakdagi kurslar uchun qoldiramiz. Ushbu tenglamadan Leonardning oylik daromadining dispersiyasini hisoblash uchun foydalanish mumkin:

$$\begin{aligned} Var(6000 \times X + 2000 \times Y) &= 6000^2 \times Var(X) + 2000^2 \times Var(Y) \\ &= 36000000 \times 0{,}0057 + 4000000 \times 0{,}0021 \\ &\approx 213600 \ . \end{aligned}$$

Standart chetlanish dispersiyaning kvadrat ildizi sifatida hisoblanadi: $\sqrt{213600} = \$463$. \$8000 investitsiya uchun oylik \$124 o‘rtacha daromad juda yaxshi ko‘rinadi, biroq oylik daromadlarning o‘zgaruvchanligi shunchalik yuqoriki, Leonard bu daromad barqaror bo‘lishini kutmasligi kerak.

TASODIFIY MIQDORLARNING CHIZIQLI KOMBINATSIYALARINING O‘ZGARUVCHANLIGI

Tasodifiy miqdorlarning chiziqli kombinatsiyalarining dispersiyasi koeffitsientlarni kvadratga oshirib, tasodifiy miqdorlarning dispersiyalarini kiritish orqali hisoblanishi mumkin:

$$Var(aX + bY) = a^2 \times Var(X) + b^2 \times Var(Y) \ .$$

Ushbu tenglama tasodifiy miqdorlar bir-biriga bog‘liqsiz bo‘lsa to‘g‘ridir. Chiziqli kombinatsiyaning standart chetlanishi dispersiyaning kvadrat ildizini olish orqali topiladi.

M **3.68-MISOL**

Johnning har kungi ishga borish vaqti standart chetlanishi 4 daqiqa bo‘lsa, uning haftalik ishga borish vaqtidagi noaniqlik qancha bo‘ladi?

Johnning ishga borish vaqti uchun ifoda quyidagicha edi:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \ .$$

Har bir koeffitsient 1 ga teng va har bir kunning vaqti dispersiyasi $4^2 = 16$. Shunday qilib, umumiy haftalik ishga borish vaqti dispersiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{aligned} \text{dispersiya} \ &= 1^2 \times 16 + 1^2 \times 16 + 1^2 \times 16 + 1^2 \times 16 + 1^2 \times 16 = 5 \times 16 = 80 \\ \text{standart chetlanish} \ &= \sqrt{\text{dispersiya}} = \sqrt{80} = 8{,}94 \ . \end{aligned}$$

Johnning haftalik ishga borish vaqti uchun standart chetlanish taxminan 9 daqiqaga teng.

Y **3.69-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.68-misoldagi hisoblash muhim taxminlarga asoslangan edi: har bir kun uchun ishga borish vaqti shu haftaning boshqa kunlaridagi vaqtga bog‘liq emas. Bu taxminni haqli deb o‘ylaysizmi? Izohlang.[58]

Y **3.70-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

3.62-mashqdagi 117-sahifa bo‘yicha Elenaning ikki auksionini ko‘rib chiqing. Faraz qilaylik, ushbu auksionlar deyarli bog‘liqsiz va televizor va toster pechiga bog‘liq narxlarning o‘zgaruvchanligi $25 va $8 standart chetlanishlar bilan tavsiflanadi. Elenaning sof foydasining standart chetlanishini hisoblang.[59]

Yana 3.70-mashqni ko‘rib chiqing. Chiziqli kombinatsiyada Y uchun manfiy koeffitsiyent kvadratga oshirilganda yo‘q qilindi. Bu odatda to‘g‘ri: chiziqli kombinatsiyadagi manfiy qiymatlar o‘zgaruvchanlikni hisoblashga ta’sir qilmaydi, ammo ular kutilma qiymatni hisoblashga ta’sir qiladi.

Mashqlar

3.29 Kollej chekuvchilari. Bir universitetda talabalarning 13% sigaret chekadilar.

(a) Ushbu universitetdan 100 nafar talabani tasodifiy tanlashda sigaret chekuvchilar sonining o‘rtacha (kutilayotgan) qiymatini hisoblang.

(b) Universitet sport zali shanba kuni ertalab soat 9:00 da ochiladi. Bir shanba kuni ertalab soat 8:55 da sport zalining tashqarisida uni ochilishini kutayotgan 27 nafar talaba bor edi. Ushbu 27 talabadan sigaret chekuvchilar sonining o‘rtacha (kutilayotgan) qiymatini hisoblashda (a) banddagi yondashuvni ishlatish kerakmi?

3.30 Chillak tuzi yutadi. Quyidagi karta o‘yinini ko‘rib chiqing, bunda kartalar yaxshi aralashtirilgan. Agar qizil karta tortsangiz, hech narsa yutmaysiz. Agar g‘isht tortsangiz, $5 yutasiz. Har qanday chillak uchun $10, va chillak tuzi uchun qo‘shimcha $20 yutasiz.

(a) Ushbu o‘yinda yutgan summangiz uchun ehtimollik modelini yarating. Shuningdek, bitta o‘yin uchun kutilayotgan yutuqni va yutuq taqsimotining standart chetlanishini toping.

(b) Ushbu o‘yinni o‘ynash uchun qancha ko‘p pul to‘lashga tayyor bo‘lasiz? Fikringizni tushuntiring.

3.31 Yuraklar yutadi. Yangi karta o‘yinida siz yaxshi aralashtirilgan kartalar to‘plamidan 3 ta kartani almashtirmasdan tortasiz. Agar 3 ta yurak tortsangiz, $50 yutasiz. Agar 3 ta qora karta tortsangiz, $25 yutasiz. Boshqa har qanday tortishda, hech narsa yutmaysiz.

(a) Ushbu o‘yinda yutgan summangiz uchun ehtimollik modelini yarating va o‘rtacha (kutilayotgan) yutuqni toping. Shuningdek, ushbu taqsimotning standart chetlanishini hisoblang.

(b) Agar o‘yin uchun $5 to‘lash kerak bo‘lsa, sof foyda (yoki yo‘qotish) ning o‘rtacha (kutilayotgan) qiymati va standart chetlanishi qanday? *(Maslahat: foyda = yutuq − xarajat; $X - 5$)*

(c) Agar o‘yin uchun $5 to‘lash kerak bo‘lsa, ushbu o‘yinni o‘ynash kerakmi? Fikringizni tushuntiring.

3.32 Arziydimi? Endi har doim tez pul ishlashning yo‘llarini qidiradi. So‘nggi paytlarda u qimor o‘ynab pul ishlashga harakat qilmoqda. Mana u o‘ynashni ko‘rib chiqayotgan o‘yin: o‘yin uchun $2 to‘lash kerak. U kartalar to‘plamidan bir kartani tortadi. Agar u raqamli kartani (2-10) tortsa, hech narsa yutmadi. Yuzi bor har qanday karta (valet, malika yoki qirol) uchun u $3 yutadi. Har qanday tuz uchun $5 yutadi va chillak tuzini tortsa, qo‘shimcha $20 yutadi.

(a) Ehtimollik modelini yarating va Endining bitta o‘yindan kutilayotgan foydasini toping.

(b) Ushbu o‘yinni Endiga pul ishlashning yaxshi usuli sifatida tavsiya qilasizmi? Fikringizni tushuntiring.

3.33 Portfel daromadi. Portfel qiymati iqtisodiy ko‘tarilish paytida 18% ga, normal sharoitda 9% ga oshadi. Iqtisodiy tanazzul paytida esa 12% ga kamayadi. Agar har bir ssenariy teng ehtimolga ega bo‘lsa, ushbu portfelning kutilayotgan daromadi qancha bo‘ladi?

[58] Bitta xavotir shundaki, tirbandlik harakatlari haftalik tsiklga ega bo‘lishi mumkin (masalan, juma kunlari boshqa kunlarga qaraganda yomonroq bo‘lishi mumkin). Agar shunday bo‘lsa va John haydasa, bu taxmin haqli bo‘lmasligi mumkin. Ammo, agar John ishga piyoda borsa, uning qatnovi haftalik tirbandlik siklidan ta’sirlanmasligi ehtimoldan xoli.

[59] Elenaning tenglamasini quyidagicha yozish mumkin:

$$(1) \times X + (-1) \times Y \ .$$

X va Y ning dispersiyalari 625 va 64 ga teng. Koeffitsientlarni kvadratga oshirib, dispersiyalarni kiritamiz:

$$(1)^2 \times Var(X) + (-1)^2 \times Var(Y) = 1 \times 625 + 1 \times 64 = 689 \ .$$

Chiziqli kombinatsiyaning dispersiyasi 689 ga teng va standart chetlanish 689 ning kvadrat ildiziga teng: taxminan $26,25.

3.34 Bagaj to‘lovlari. Aviakompaniya quyidagi bagaj to‘lovlarini oladi: birinchi sumka uchun $25 va ikkinchi sumka uchun $35. Faraz qilaylik, yo‘lovchilarning 54% hech qanday yuk olib yurmaydi, 34% bitta sumka olib yuradi, va 12% ikki sumka olib yuradi. Faraz qilamizki, ikki sumkadan ko‘p yuk olib yuradigan odamlar ulushi e’tiborga olinmaydigan darajada kichik.

(a) Ehtimollik modelini yarating, bir yo‘lovchi uchun o‘rtacha tushumni va tegishli standart chetlanishni hisoblang.

(b) 120 yo‘lovchi bo‘lgan parvoz uchun aviakompaniya qancha tushum kutishi mumkin? Qaysi standart chetlanish bilan? Qabul qilgan har qanday taxminlaringizni ko‘rsating va ular asoslimi?

3.35 Amerika ruletkasi. Amerika ruletkasi o‘yini 38 ta uyali g‘ildirakni aylantirishni o‘z ichiga oladi: 18 ta qizil, 18 ta qora va 2 ta yashil. G‘ildirakka to‘p tashlanadi va u oxir-oqibat bir uyaga tushadi. Har bir uyaning to‘pni tutib olish ehtimoli tengdir. Qimorbozlar qizil yoki qora rangga tikishlari mumkin. Agar to‘p ularning rangiga tushsa, ular pulini ikki baravar oshiradi. Agar u boshqa rangga tushsa, ular pulini yo‘qotadi. Faraz qilaylik, siz qizil rangga $1 tikasiz. Sizning yutug‘ingizning kutilayotgan qiymati va standart chetlanishi qancha?

3.36 Yevropa ruletkasi. Yevropa ruletkasi o‘yini 37 ta uyali g‘ildirakni aylantirishni o‘z ichiga oladi: 18 ta qizil, 18 ta qora va 1 ta yashil. G‘ildirakka to‘p tashlanadi va u oxir-oqibat bir uyaga tushadi. Har bir uyaning to‘pni tutib olish ehtimoli tengdir. Qimorbozlar qizil yoki qora rangga tikishlari mumkin. Agar to‘p ularning rangiga tushsa, ular pulini ikki baravar oshiradi. Agar u boshqa rangga tushsa, ular pulini yo‘qotadi.

(a) Faraz qilaylik, siz ruletka o‘ynab, bitta raundda $3 tikasiz. Umumiy yutuqlaringizning o‘rtacha (kutilayotgan) qiymati va standart chetlanishi qancha?

(b) Faraz qilaylik, siz uchta turli raundda har biriga $1 tikasiz. Umumiy yutuqlaringizning o‘rtacha (kutilayotgan) qiymati va standart chetlanishi qancha?

(c) (a) va (b) qismlariga javoblaringizni solishtiring. Bu ikkita o‘yinning xavfliligiga nima deyishi mumkin?

3.5 Uzluksiz taqsimotlar

Bu bobda hozirgacha biz miqdorning natijasi diskret bo‘lgan hollarga e’tibor qaratdik. Ushbu bo‘limda biz natijasi uzluksiz sonli miqdor bo‘lgan kontekstni ko‘rib chiqamiz.

Ⓜ **3.71-MISOL**

3.24-rasm AQSh kattalarining bo‘ylari uchun bir nechta turli xil bo‘sh gistogrammalarni ko‘rsatadi. Binlar (yoki intervallar) sonining o‘zgarishi ma’lumotlarni turlicha talqin qilishga qanday imkon beradi?

Ko‘proq binlar qo‘shish ma’lumotlarning ko‘proq tafsilotlarini beradi. Ushbu namuna juda katta, shuning uchun juda kichik binlar ham yaxshi ishlaydi. Odatda kichik tanlanma (namuna) hajmlarida juda ko‘p binlardan foydalanilmaydi, chunki har bir bin uchun kichik sonlar bin balandliklarini juda o‘zgaruvchan qiladi.

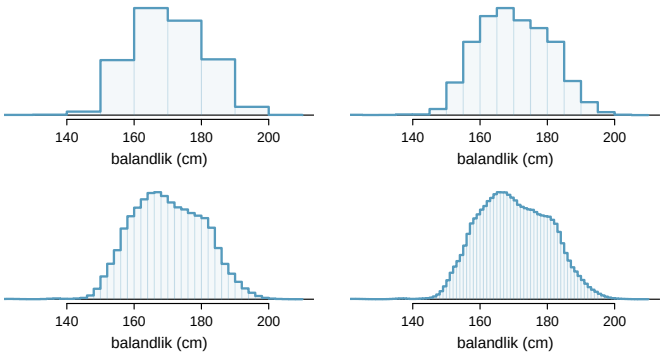
Ⓜ **3.72-MISOL**

Bo‘yi `180` sm dan `185` sm gacha bo‘lgan (taxminan 5’11” dan 6’1”) tanlanma(namuna)ning qanday ulushi?

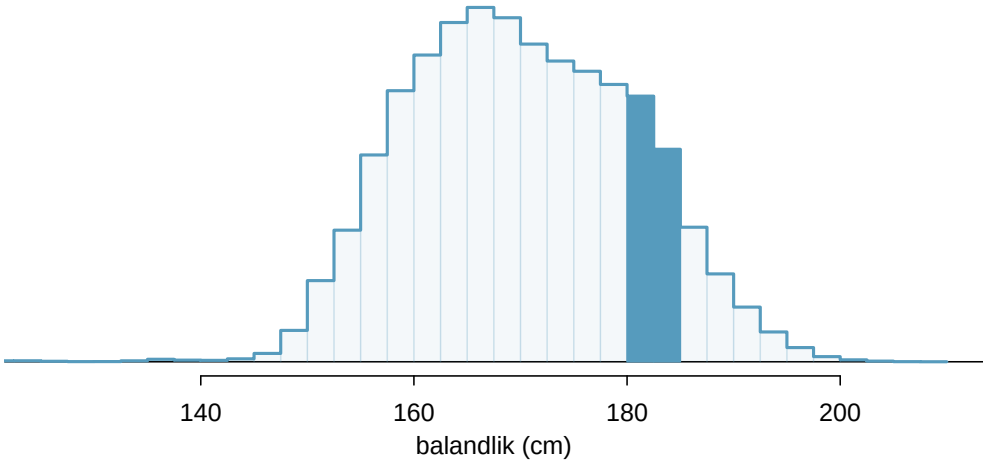
Biz `180` sm va `185` oralig‘idagi bin balandliklarini qo‘shib, tanlanma (namuna) hajmiga bo‘lishimiz mumkin. Masalan, bu 3.25-rasmda ko‘rsatilgan ikki soyali bin bilan amalga oshirilishi mumkin. Ushbu hududdagi ikkita binda 195307 va 156239 odam bor, bu quyidagi ehtimolni baholashga olib keladi:

$$\frac{195307 + 156239}{3000000} = 0{,}1172\ .$$

Ushbu ulush gistogrammaning `180` dan `185` sm oralig‘idagi maydon ulushiga teng.



3.24-rasm. AQSh kattalarining bo‘ylari uchun turli bin kengliklari bilan to‘rtta bo‘sh gistogramma.



3.25-rasm. Bin kengliklari 2,5 sm bo‘lgan gistogramma. bo‘yalgan soha 180 va 185 sm oralig‘idagi shaxslarni ifodalaydi.

3.5.1 Gistogrammalardan uzluksiz taqsimotlarga

3.24-rasmdagi yuqori chap tomondagi burchakli bo‘sh gistogrammadan past o‘ng tomondagi ancha silliq chiziqli tasvirdagi o‘tishni kuzating. Ushbu oxirgi tasvirdagi binlar shunchalik kichikki, bo‘sh gistogramma silliq chiziqqa o‘xshash ko‘rinadi. Bu shuni anglatadiki, bosh to‘plam bo‘yi *uzluksiz* sonli o‘zgaruvchi sifatida eng yaxshi tarzda juda tor binlarning chiziqlarini ifodalovchi chiziq bilan tavsiflanishi mumkin.

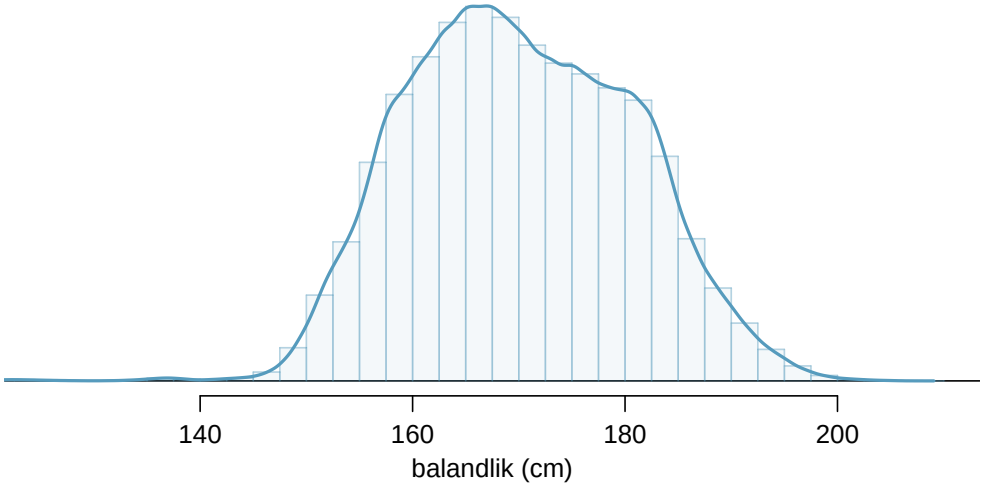
Ushbu silliq chiziq a **ehtimollik zichligi funksiyasi** (deb ham ataladi **zichlik** yoki **taqsimot**) va bunday chiziq 3.26-rasmda tanlanma(namuna)dagi gistogramma ustida chizilgan. Zichlik maxsus xossaga ega: zichlik chizig‘ining ostidagi umumiy yuza 1 ga teng.

3.5.2 Uzluksiz taqsimotlardan ehtimollar

3.72-misolda bo‘ylari 180 dan 185 sm gacha bo‘lgan shaxslar ulushi sifatida hisoblandi:

$$\frac{\text{180 dan 185 oralig‘idagi odamlar soni}}{\text{umumiy tanlanma hajmi}}.$$

Bu hududdagi gistogramma maydonining ulushini aniqlash orqali biz 180 va 185 sm oralig‘idagi bo‘yga ega bo‘lgan odamlar sonini topdik. Xuddi shunday, kompyuter yordamida chiziq ostidagi

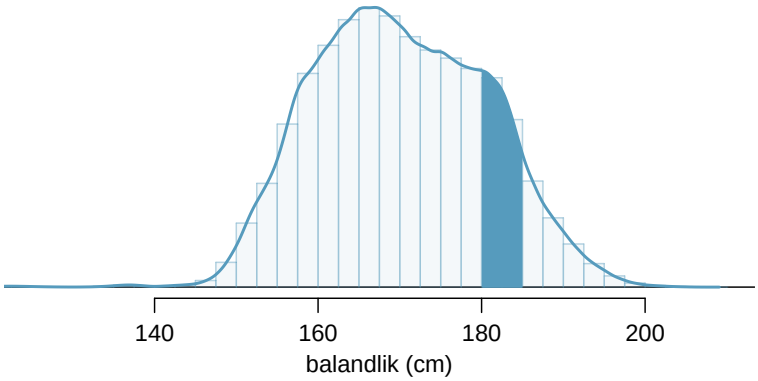


3.26-rasm. AQShdagi katta yoshdagi aholining bo‘ylari uchun uzluksiz ehtimollik taqsimoti.

bo‘yalgan sohaning yuzasi yordamida ehtimolni topishimiz mumkin:

$P(\texttt{bo‘y 180 dan 185 oralig‘ida}) = \texttt{180 dan 185 oralig‘idagi bo‘yalgan soha yuzasi} = 0{,}1157$.

Tasodifiy tanlangan odamning bo‘yi 180 dan 185 sm oralig‘ida bo‘lish ehtimoli 0,1157. Bu 3.72-misoldagi bahoga juda yaqin: 0,1172.



3.27-rasm. AQShdagi katta yoshdagilarining bo‘ylari uchun zichlik chizig‘i, 180 va 185 sm oralig‘idagi bo‘yalgan soha yuzasini 3.25-rasmdagi bilan taqqoslang.

Y **3.73-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

AQShning katta yoshdagi aholisidan tasodifiy uchta tanlangan. Har bir katta yoshdagining bo‘yi 180 dan 185 sm oralig‘ida bo‘lish ehtimoli 0.1157.[60]

(a) Uchalasining ham bo‘yi 180 dan 185 sm oralig‘ida bo‘lish ehtimoli qanday?

(b) Hech birining bo‘yi 180 dan 185 sm oralig‘ida bo‘lmaslik ehtimoli qanday?

M **3.74-MISOL**

Tasodifiy tanlangan odamning bo‘yi aniq 180 sm bo‘lish ehtimoli qanday? Faraz qiling, o‘lchovlar mukammal amalga oshiriladi.

Ushbu ehtimol nolga teng. Odamning bo‘yi 180 sm ga yaqin bo‘lishi mumkin, lekin aniq 180 sm bo‘lish ehtimoli yo‘q. Bu ehtimolni yuza sifatida aniqlash bilan ham mos keladi; 180 sm va 180 sm oralig‘ida hech qanday yuza mavjud emas.

[60] Qisqa javoblar: (a) $0{,}1157 \times 0{,}1157 \times 0{,}1157 = 0{,}0015$. (b) $(1 - 0{,}1157)^3 = 0{,}692$

Y **3.75-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Faraz qilaylik, odamning bo‘yi eng yaqin santimetrgacha yaxlitlanadi. Tasodifiy odamning **o‘lchangan** bo‘yi `180` sm bo‘lish ehtimoli bormi?[61]

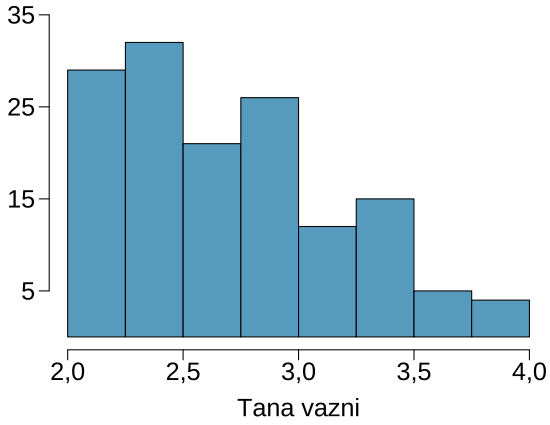
Mashqlar

3.37 Mushuklar vazni. Quyidagi gistogramma 47 urg‘ochi va 97 erkak mushukning vaznini (kg) ko‘rsatadi.[62]

(a) Ushbu mushuklarning qancha qismi 2,5 kg dan kam vaznga ega?

(b) Ushbu mushuklarning qancha qismi 2,5 va 2,75 kg oralig‘ida vaznga ega?

(c) Ushbu mushuklarning qancha qismi 2,75 va 3,5 kg oralig‘ida vaznga ega?



3.38 Daromad va jins. Quyidagi nisbiy chastota jadvali 2005-2009 yillar uchun Amerikaning 96420486 vakilidan iborat namunada yillik shaxsiy jami daromadning taqsimotini ko‘rsatadi (2009-yil inflyatsiya bilan moslashtirilgan dollar). Ushbu ma’lumotlar Amerika hamjamiyati tadqiqotidan olingan. Namuna 59% erkaklar va 41% ayollardan iborat.[63]

(a) Shaxsiy jami daromad taqsimotini tasvirlab bering.

(b) Tasodifiy tanlangan AQSh fuqarosi yiliga $50000 dan kam daromad olish ehtimoli qancha?

(c) Tasodifiy tanlangan AQSh fuqarosi yiliga $50000 dan kam daromad olishi va ayol bo‘lish ehtimoli qancha? Qabul qilgan taxminlaringizni ko‘rsating.

(d) Xuddi shu ma’lumotlar manbasi ayollarning 71,8% yiliga $50000 dan kam daromad olishini ko‘rsatadi. (c) bandida qilingan taxminingiz to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlash uchun ushbu qiymatdan foydalaning.

Daromad	*Jami*
$1 dan $9,999 yoki zarar	2,2%
$10000 dan $14999	4,7%
$15000 dan $24999	15,8%
$25000 dan $34999	18,3%
$35000 dan $49999	21,2%
$50000 dan $64999	13,9%
$65000 dan $74999	5,8%
$75000 dan $99999	8,4%
$100000 yoki ko‘proq	9,7%

Bob bo‘yicha mashqlar

3.39 Baholar taqsimoti. Quyidagi jadvalning har bir qatori sinf uchun taklif qilingan baholar taqsimotidir. Har birini haqiqiy yoki noto‘g‘ri ehtimollik taqsimoti sifatida aniqlang va fikringizni izohlang.

	Baholar				
	A	B	C	D	F
(a)	0,3	0,3	0,3	0,2	0,1
(b)	0	0	1	0	0
(c)	0,3	0,3	0,3	0	0
(d)	0,3	0,5	0,2	0,1	−0,1
(e)	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1
(f)	0	−0,1	1,1	0	0

[61] Bu musbat ehtimolga ega. `179,5` sm va `180,5` sm oralig‘idagi har qanday odamning *o‘lchangan* bo‘yi `180` sm bo‘ladi. Bu, ehtimol, 3.74-misolga qaraganda amalda ko‘proq uchraydigan holat.

[62] W. N. Venables and B. D. Ripley. *Modern Applied Statistics with S*. Fourth Edition. www.stats.ox.ac.uk/pub/MASS4. New York: Springer, 2002.

[63] U.S. Census Bureau, 2005-2009 American Community Survey.

3.40 Sog‘liqni sug‘urtalash, chastotalar. Xulq-atvor xavf omillari monitoring tizimi (inglizcha: Behavioral Risk Factor Surveillance System yoki BRFSS) kattalar orasida xavf omillarini aniqlash va sog‘liqni saqlashning yangi tendensiyalarini xabar qilish uchun har yili o‘tkaziladigan telefon so‘rovdir. Quyidagi jadval respondentlar uchun ikkita o‘zgaruvchini - sog‘liq holati va sog‘liq sug‘urtasi (ya’ni har bir respondent sug‘urtaga ega bo‘lganmi yoki yo‘qmi) ni umumlashtiradi.[64]

		Sog‘liq Holati					
		Zo‘r	Juda yaxshi	Yaxshi	o‘rtacha	Yomon	Jami
Sug‘urta	Yo‘q	459	727	854	385	99	2524
Holati	Ha	4198	6245	4821	1634	578	17476
	Jami	4657	6972	5675	2019	677	20000

(a) Tasodifiy tanlangan bitta shaxsda zo‘r sog‘liq va sog‘liq sug‘urtasi bo‘lmasligi ehtimoli qancha?

(b) Tasodifiy tanlangan bitta shaxsda zo‘r sog‘liq yoki sog‘liq sug‘urtasi bo‘lmasligi ehtimoli qancha?

3.41 Svazilendda OIV. Svazilend (Esvatini) dunyodagi eng yuqori OIV (Inson immunitet tanqisligi virusi) tarqalishiga ega mamlakatdir: ushbu mamlakat aholining 25,9% OIV bilan zararlangan.[65] ELISA testi OIV uchun eng birinchi va eng aniq testlardan biridir. OIV tashuvchilari uchun ELISA testi 99,7% aniqlikka ega. OIV tashuvchi bo‘lmaganlar uchun esa test 92,6% aniqlikka ega. Agar Svazilenddan bir shaxsda test natijasi ijobiy bo‘lsa, unda u OIV tashuvchi bo‘lish ehtimoli qancha?

3.42 Egizaklar. Inson egizaklarining taxminan 30% i bir xil, qolgani esa har xil. Bir xil egizaklar majburiy ravishda bir xil jinsda bo‘ladi – yarmi erkak va yarmi ayol. Har xil egizaklarning to‘rtdan biri erkak, to‘rtdan biri ayol va yarmi aralash: biri erkak, biri ayol. Siz yaqinda egizaklarning ota-onasi bo‘ldingiz va ularga ikkovi ham qiz ekanligi haqida xabar berildi. Ushbu ma’lumotdan kelib chiqib, ularning bir xil bo‘lish ehtimoli qancha?

3.43 Nonushta narxi. Salliy har kuni ertalab o‘z mahallasidagi ko‘plab qahvaxonalardan biridan qahva va keks olib nonushta qiladi. U har kuni tasodifiy qahvaxonani tanlaydi va oldingi kunlardan bog‘liqsiz (mustaqil) ravishda tanlashni amalga oshiradi. Qahva stakanining o‘rtacha narxi \$1,40 va standart og‘ishi 30¢ (\$0,30), keksning o‘rtacha narxi \$2,50 va standart chetlanishi 15¢ (yoki \$0,15). Ikkala narx bir-biridan bog‘liqsiz (mustaqil).

(a) U nonushta uchun har kuni qancha pul sarflaydi? Ushbu sarfning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishi qancha?

(b) U bir hafta (7 kun) davomida nonushta uchun qancha pul sarflaydi? Ushbu sarfning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishi qancha?

3.44 Muzqaymoqni qoshiq bilan olish. Muzqaymoq odatda 1,5 kvartli qutilarda (48 suyuq unsiya ≈ 1,42 litr, 1 suyuq unsiya ≈ 29,57 millilitr) sotiladi va muzqaymoq qoshiqchalari taxminan 2 unsiya sig‘imga ega. Biroq, qutidagi muzqaymoq miqdorida ham, qoshiq bilan olinadigan muzqaymoq miqdorida ham ma’lum darajada o‘zgaruvchanlik mavjud. Qutidagi muzqaymoq miqdorini X bilan, olinadigan miqdorni esa Y bilan belgilaymiz. Faraz qilaylik, ushbu tasodifiy o‘zgaruvchilar quyidagi o‘rtacha qiymatlar, standart chetlanishlar va dispersiyalarga ega:

	o‘rtacha qiymat	SD	dispersiya
X	48	1	1
Y	2	0,25	0,0625

(a) Bir quti muzqaymoq va ikkinchi qutidan 3 qoshiq muzqaymoq bazmda tortiq qilindi. Ushbu bazmda qancha muzqaymoq tortiq qilinganini kutasiz? Tortiq qilingan muzqaymoq miqdorining standart chetlanishi qanday?

(b) Bir qoshiq muzqaymoq olingandan so‘ng qutida qancha muzqaymoq qolishini kutasiz? Ya’ni, $X-Y$ ning o‘rtacha (kutilayotgan) qiymatini toping. Qutida qolgan muzqaymoq miqdorining standart chetlanishi qanday?

(c) Ushbu mashq kontekstidan foydalanib, nima sababdan bir tasodifiy o‘zgaruvchini boshqasidan ayirganda dispersiyalarni qo‘shishimizni tushuntiring.

3.45 O‘rtacha qiymat dispersiyasi, 1-qism. Faraz qilaylik, bizda o‘rtacha qiymati μ va standart chetlanishi σ bo‘lgan taqsimotdan olingan bog‘liqsiz (mustaqil) kuzatuvlar X_1 va X_2 mavjud. Quyidagi ikki qiymat o‘rtachasining dispersiyasi nimaga teng: $\frac{X_1+X_2}{2}$?

[64] Office of Surveillance, Epidemiology, and Laboratory Services Behavioral Risk Factor Surveillance System, BRFSS 2010 Survey Data.

[65] Source: CIA Factbook, Country Comparison: HIV/AIDS - Adult Prevalence Rate.

3.46 O‘rtacha qiymat dispersiyasi, 2-qism. Faraz qilaylik, bizda o‘rtacha qiymati μ va standart chetlanishi σ bo‘lgan taqsimotdan olingan 3 ta bog‘liqsiz (mustaqil) kuzatuv X_1, X_2, X_3 mavjud. Quyidagi 3 ta qiymat o‘rtachasining dispersiyasi nimaga teng: $\frac{X_1+X_2+X_3}{3}$?

3.47 O‘rtacha qiymat dispersiyasi, 3-qism. Faraz qilaylik, bizda o‘rtacha qiymati μ va standart chetlanishi σ bo‘lgan taqsimotdan olingan n ta bog‘liqsiz (mustaqil) kuzatuv X_1, X_2, ..., X_n mavjud. Quyidagi n ta qiymat o‘rtachasining dispersiyasi nimaga teng: $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$?

4-BOB

Tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari

4.1 Normal taqsimot

4.2 Geometrik taqsimot

4.3 Binomial taqsimot

4.4 Salbiy binomial taqsimot

4.5 Puasson taqsimoti

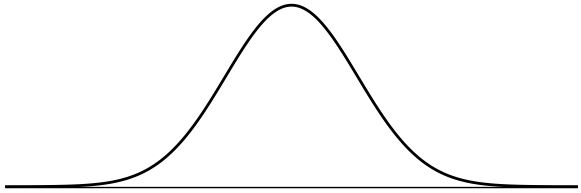
Ushbu bobda ma'lumotlarni tahlil qilish yoki statistik xulosalar chiqarish jarayonida ko'p uchraydigan statistik taqsimotlarni muhokama qilamiz. Birinchi bo'limda ushbu kitobning keyingi boblarida ko'p marta qo'llaniladigan normal taqsimotni ko'rib chiqamiz. Qolgan bo'limlarga ixtiyoriy tarzda murojaat qilinishi kitobning mazmuniga mos keladi.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

4.1 Normal taqsimot

Amaliyotda ko‘rib chiqiladigan barcha taqsimotlar orasida biri juda keng tarqalgan. Simmetrik, bitta cho‘qqili, qo‘ng‘iroq shaklidagi egri chiziq statistikada deyarli har qadamda uchraydi. Darhaqiqat, u shu qadar keng tarqalganki, odatda odamlar uni **normal egri chiziq** yoki **normal taqsimot** deb bilishadi.[1] Bu 4.1-rasmda da ko‘rsatilgan. Masalan, SAT (AQSh oliygohlariga qabulda qo‘llanadigan standartlashtirilgan imtihon) ballari va AQShdagi katta yoshdagi erkaklarining bo‘ylari normal taqsimotga yaqinlashadi.



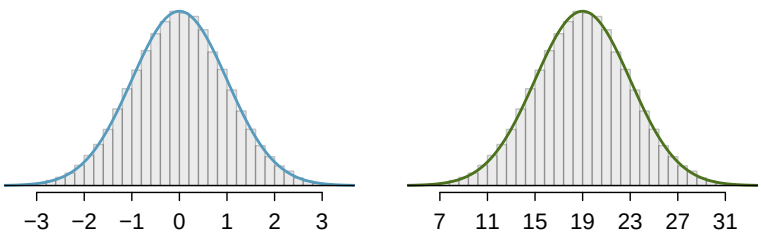
4.1-rasm. Normal egri chizig‘i.

NORMAL TAQSIMOT HAQIDAGI MA’LUMOTLAR

Ko‘plab o‘zgaruvchilar deyarli normal, lekin hech biri to‘liq normal emas. Shu sababli, normal taqsimot biror muammo uchun mukammal yechim bo‘lmasa ham, u turli muammolar uchun juda foydali. Biz uni ma’lumotlarni o‘rganishda va statistikadagi muhim muammolarni hal qilishda qo‘llaymiz.

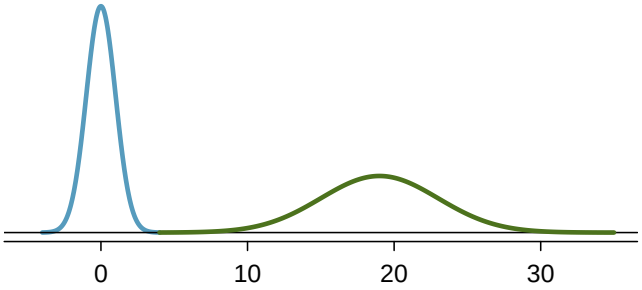
4.1.1 Normal taqsimot modeli

Normal taqsimot har doim simmetrik, bitta cho‘qqili va qo‘ng‘iroq shaklidagi egri chiziqni tasvirlaydi. Biroq, bu egri chiziqlar modelning tafsilotlariga qarab har xil ko‘rinishi mumkin. Xususan, normal taqsimot modelini ikkita parametr yordamida moslashtirish mumkin: o‘rtacha qiymat va standart chetlanish. Ehtimol siz taxmin qilgandirsiz, o‘rtacha qiymatni o‘zgartirish qo‘ng‘iroq shaklidagi egri chiziqni chapga yoki o‘ngga suradi, standart chetlanishni o‘zgartirish esa egri chiziqni cho‘zadi yoki siqadi. 4.2-rasmning chap tomonida o‘rtacha qiymati 0 va standart chetlanishi 1 bo‘lgan normal taqsimotni, o‘ngda esa o‘rtacha qiymati 19 va standart chetlanishi 4 bo‘lgan normal taqsimotlar tasvirlangan. 4.3-rasmda ushbu taqsimotlar bitta o‘qda tasvirlangan.



4.2-rasm. Ikkala egri chiziq ham normal taqsimotni ifodalaydi. Ammo, ularning markazi va tarqalishi turlicha.

[1] U Fridrix Gauss, uning matematik ifodasini birinchi bo‘lib rasmiylashtirgani uchun Gauss taqsimoti deb ham ataladi.



4.3-rasm. 4.2-rasmdagi normal taqsimotlar, lekin bu safar birgalikda va bir xil o‘lchovda tasvirlangan.

Agar normal taqsimotning o‘rtacha qiymati μ va standart chetlanishi σ bo‘lsa, bu taqsimotni $N(\mu;\sigma)$ deb yozish mumkin. 4.3-rasmdagi ikkita taqsimotni quyidagicha yozish mumkin:

$$N(\mu=0;\sigma=1) \quad \text{va} \quad N(\mu=19;\sigma=4).$$

Chunki o‘rtacha qiymat va standart chetlanish normal taqsimotni aniq ifodalaydi, ular **taqsimotning parametrlari** deb ataladi. O‘rtacha qiymati $\mu=0$ va standart chetlanishi $\sigma=1$ bo‘lgan normal taqsimot **standart normal taqsimot** deb ataladi.

Y **4.1-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Quyidagi qiymatlarga ega normal taqsimot uchun qisqa yozuvni yozing:[2]
(a) o‘rtacha qiymat 5 va standart chetlanish 3;
(b) o‘rtacha qiymat -100 va standart chetlanish 10;
(c) o‘rtacha qiymat 2 va standart chetlanish 9.

4.1.2 Z-ballar yordamida standartlashtirish

Ko‘pincha biz ma’lumotlarni standartlashtirilgan o‘lchovga o‘tkazishni xohlaymiz, bu esa taqqoslashlarni ancha qulay qilishga imkon beradi.

M **4.2-MISOL**

4.4-jadval SAT va ACT (AQSh oliygohlariga kirishda qo‘llanadigan standartlashtirilgan imtihon) bo‘yicha umumiy ballarning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishini ko‘rsatadi. SAT va ACT ballarining taqsimotlari deyarli normaldir. Faraz qilaylik, Anna SAT bo‘yicha 1300 ball olgan va Tom esa ACT bo‘yicha 24 ball olgan. Kim yaxshiroq natijaga erishgan?

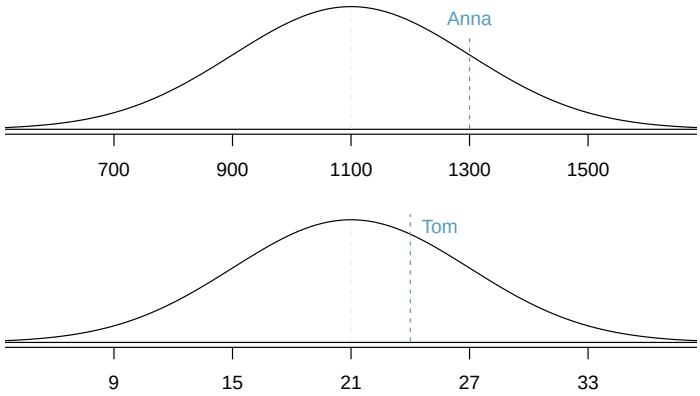
Biz standart chetlanishni qo‘llanma sifatida ishlatamiz. Anna SAT bo‘yicha o‘rtacha qiymatdan 1 standart og‘ish yuqorida $1100+200=1300$. Tom esa ACT bo‘yicha o‘rtacha qiymatdan 0,5 standart chetlanish yuqorida: $21+0{,}5\times 6=24$. 4.5-rasmdan ko‘rinib turibdiki, Annaning natijasi Tomnikiga nisbatan yaxshiroq.

	SAT	ACT
O‘rtacha qiymat	1100	21
Standart chetlanish	200	6

4.4-rasm. SAT va ACT ballari uchun o‘rtacha qiymat va standart chetlanish.

4.2-misolda Z-ball deb nomlanuvchi standartlashtirish usulidan foydalanildi. Asosan bu usul deyarli normal kuzatuvlar uchun ishlatiladi, lekin uni istalgan taqsimotda qo‘llash mumkin. **Z-ball** kuzatuvning o‘rtacha qiymatdan necha standart chetlanish yuqorida yoki pastda ekanligini aniqlaydi. Agar kuzatuv o‘rtacha qiymatdan bir standart chetlanish yuqorida bo‘lsa, uning Z-balli 1 bo‘ladi. Agar u o‘rtacha qiymatdan 1,5 standart chetlanish pastda bo‘lsa, uning Z-balli $-1{,}5$ bo‘ladi. Agar x tasodifiy miqdor $N(\mu;\sigma)$−taqsimotdan olingan kuzatuv bo‘lsa, Z-ball matematik ravishda

[2](a) $N(\mu=5;\sigma=3)$. (b) $N(\mu=-100;\sigma=10)$. (c) $N(\mu=2;\sigma=9)$.



4.5-rasm. Anna va Tomning ballari SAT va ACT taqsimotlariga nisbatan ko‘rsatilgan.

quyidagicha aniqlanadi:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$\mu_{SAT} = 1100$, $\sigma_{SAT} = 200$ va $x_{\text{Anna}} = 1300$ qiymatlaridan foydalanib, Annaning Z-ballini topamiz:

$$Z_{\text{Anna}} = \frac{x_{\text{Anna}} - \mu_{\text{SAT}}}{\sigma_{\text{SAT}}} = \frac{1300 - 1100}{200} = 1.$$

Z-BALL

Kuzatuvning Z-ballini hisoblash uning o‘rtacha qiymatdan necha standart chetlanish yuqorida yoki pastda ekanligini aniqlashdir. Agar $x-$ kuzatuv, $\mu-$ o‘rtacha qiymat va $\sigma-$ standart chetlanish bo‘lsa, Z-ball quyidagicha hisoblanadi:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

4.3-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Tomning ACT bo‘yicha balli 24 va ACT uchun o‘rtacha qiymat va standart chetlanishdan foydalanib, uning Z-ballini toping.[3]

O‘rtacha qiymatdan yuqori bo‘lgan kuzatuvlar har doim musbat Z-ballga ega, o‘rtacha qiymatdan pastda bo‘lganlar esa har doim manfiy Z-ballga ega bo‘ladi. Agar kuzatuv o‘rtacha qiymatga teng bo‘lsa, masalan, SAT balli 1100 bo‘lsa, unda Z-balli 0 bo‘ladi.

4.4-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

X tasodifiy miqdor $N(\mu = 3; \sigma = 2)$ dan olingan deb faraz qilaylik. $x = 5{,}19$ kuzatuv bo‘lsin.
(a) x uchun Z-ballni toping;
(b) Z-ball yordamida x o‘rtacha qiymatdan necha standart chetlanish yuqorida yoki pastda ekanligini aniqlang.[4]

4.5-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Keng quyruqli possumlar (brushtail possums) bosh uzunliklari o‘rtacha 92,6 mm va standart chetlanish 3,6 mm bo‘lgan normal taqsimotga bo‘ysunadi. Bosh uzunliklari 95,4 mm va 85,8 mm bo‘lgan possumlar uchun Z-ballni hisoblang.[5]

Biz Z-ball yordamida qaysi kuzatuvlar boshqalarga nisbatan g‘ayrioddiyroq ekanligini aniqlash-

[3] $Z_{Tom} = \frac{x_{\text{Tom}} - \mu_{\text{ACT}}}{\sigma_{\text{ACT}}} = \frac{24-21}{6} = 0{,}5$.

[4] (a) Uning Z-balli quyidagicha aniqlanadi: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{5{,}19-3}{2} = 2{,}19/2 = 1{,}095$. (b) x o‘rtacha qiymatdan 1,095 standart chetlanish *yuqorida* joylashgan. Z-balli musbat bo‘lgani uchun kuzatuv o‘rtacha qiymatdan yuqorida joylashgan ekanligini bilamiz.

[5] $x_1 = 95{,}4$ mm uchun: $Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{95{,}4-92{,}6}{3{,}6} = 0{,}78$. $x_2 = 85{,}8$ mm uchun: $Z_2 = \frac{85{,}8-92{,}6}{3{,}6} = -1{,}89$.

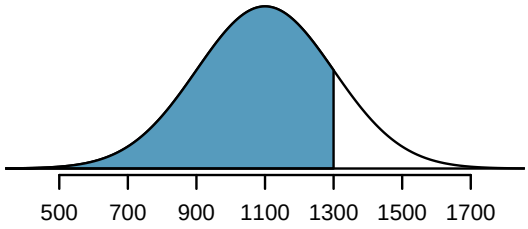
imiz mumkin. Agar x_1 kuzatuvning Z-ballining moduli ($|Z_1|$) boshqa kuzatuv x_2 ning Z-ballining modulidan ($|Z_2|$) katta bo‘lsa, x_1 kuzatuv x_2 ga qaraganda g‘ayrioddiyroq hisoblanadi. Ushbu texnika ayniqsa simmetrik taqsimotlarda foydalidir.

Y **4.6-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

4.5-yo‘naltirilgan mashqdagi qaysi kuzatuv g‘ayrioddiyroq?[6]

4.1.3 Taqsimotning quyruq qismlarini topish

Statistikada taqsimotlarning quyruq qismlarini aniqlay olish juda foydalidir. Masalan, odamlarning qanday ulushi Annaning 1300 ballik SAT natijasidan past ball olgan? Bu savol Annaning nechanchi **persentilda** (Persentil — bu statistik ko‘rsatkich bo‘lib, u ma’lum bir qiymatdan past bo‘lgan ma’lumotlarning foizini ko‘rsatadi.) ekaniga teng, ya’ni Anna natijasidan pastroq ball olgan hollarning foizi. Bunday quyruq qismini 4.6-rasmdagi egri chiziq va soya yordamida tasvirlash mumkin.



4.6-rasm. 1100 o‘rtacha qiymat va 200 standart chetlanishga ega normal taqsimot tasvirlangan. Egri chiziq va 1300 qiymatining chap tomonidagi soya Annaning ballidan past bo‘lgan odamlar ulushini ifodalaydi.

Buni amalga oshirish uchun ko‘plab texnikalar mavjud va biz uchta variantni muhokama qilamiz.

1. Amaliyotda eng keng tarqalgan yondashuv statistik dasturiy ta’minotdan foydalanishdir. Masalan, **R** dasturida 4.6-rasmdagi soya maydonini topish uchun quyidagi buyruqdan foydalanish mumkin, bu Z-ballni qabul qiladi va pastki quyruq qismini qaytaradi:

   ```
   > pnorm(1)
   [1] 0.8413447
   ```

   Ushbu hisob-kitobga ko‘ra, 1300 dan past bo‘lgan soya maydoni $Z = 1$ balldan past bo‘lgan SAT test topshiruvchilarining ulushi 0,841 (84,1%) ni tashkil etadi. Umumiy holda, o‘rtacha qiymat va standart chetlanishni ham ko‘rsatib, chegara qiymatini aniq belgilashimiz mumkin:

   ```
   > pnorm(1300, mean = 1100, sd = 200)
   [1] 0.8413447
   ```

   Shuningdek, Python yoki SAS kabi boshqa dasturiy ta’minotlardan foydalanish mumkin. Hatto Excel va Google Sheets kabi jadval dasturlari ham bu hisob-kitoblarni qo‘llab-quvvatlaydi.

2. Sinfxonalarda keng tarqalgan grafik kalkulyatorlardan “TI” yoki “Casio”. Ushbu kalkulyatorlar ketma-ket bir nechta tugmachalarni bosishni talab qiladi, bu jarayon qisqacha tavsiflanmaydi. Ushbu kalkulyatorlardan normal taqsimotning quyruq qismlarini topish uchun qanday foydalanish haqidagi ingliz tilidagi ma’lumotlarni OpenIntro video kutubxonasida topishingiz mumkin:

   www.openintro.org/videos

3. Quyruq qismlarini topishning oxirgi varianti **ehtimollik jadvali** deb ataladigan usuldan foydalanishdir. Bu usul sinfxonalarda ba’zida qo‘llaniladi, lekin amaliyotda kamdan-kam qo‘llaniladi. C.1-Ilovada bunday jadval va undan foydalanish bo‘yicha ko‘rsatmalar mavjud.

[6] Ikkinchi kuzatuvning Z-balli moduli birinchi kuzatuvnikidan katta bo‘lgani uchun, ikkinchi kuzatuvning bosh uzunligi ko‘proq g‘ayrioddiy hisoblanadi.

Biz ushbu bo‘limdagi normal taqsimot masalalarini yechishda har doim birinchi navbatda Z-ballni topamiz. Buning sababi shundaki, biz 5-bobdan boshlab kriteriy statistikasi deb ataladigan tushunchaga yaqin parallel tushunchalar bilan uchrashamiz. Bu ko‘p hollarda Z-ballning ekvivalentidir.

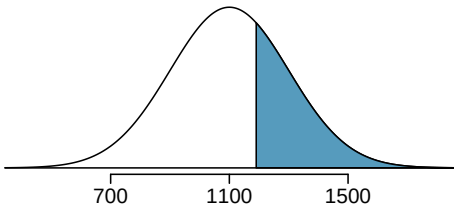
4.1.4 Normal ehtimollik misollari

SAT ballarining umumiy taqsimoti $N(\mu = 1100; \sigma = 200)$ normal modeli bilan yaxshi taxmin qilinadi.

4.7-MISOL

Shannon tasodifiy ravishda tanlangan SAT topshiruvchisi va Shannonning SAT qobiliyati haqida hech qanday ma’lumot yo‘q. Shannon SAT bo‘yicha kamida 1190 ball olish ehtimoli qancha?

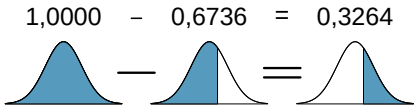
Avval normal taqsimotning chizmasini chizing va belgilang. (Rasmlar aniq bo‘lishi shart emas, foydali bo‘lishi kifoya.) Biz uning 1190 balldan yuqori olish ehtimoli bilan qiziqyapmiz, shuning uchun yuqori quyruq qismini soyali qilamiz:



Rasm o‘rtacha qiymatni va o‘rtacha qiymatdan 2 standart chetlanish yuqoridagi va pastdagi qiymatlarni ko‘rsatadi. Egri chiziq ostidagi soyali maydonni topishning eng oddiy usuli - chegara qiymatning Z-ballidan foydalanishdir. $\mu = 1100$, $\sigma = 200$ va chegara qiymati $x = 1190$ bo‘lsa, Z-balli quyidagicha hisoblanadi:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1190 - 1100}{200} = \frac{90}{200} = 0{,}45 \ .$$

Statistik dasturiy ta’minotdan (yoki boshqa usuldan) foydalangan holda, biz $Z = 0{,}45$ ning chap tomonidagi maydonni 0,6736 sifatida topamiz. $Z = 0{,}45$ dan yuqoridagi maydonni topish uchun biz birdan pastki quyruq qismining maydonini ayiramiz:



Shannonning SAT bo‘yicha kamida 1190 ball olish ehtimoli 0,3264 ga teng.

HAR DOIM AVVAL RASM CHIZING VA KEYIN Z-BALLNI TOPING

Har qanday normal ehtimollik vaziyatida, har doim normal egri chiziqni chizib belgilang va qiziqarli maydonni soyali qiling. Rasm ehtimollikning taxminiy qiymatini beradi. Vaziyatni ifodalash uchun rasm chizib bo‘lgach, qiziqarli qiymat uchun Z-ballni aniqlang.

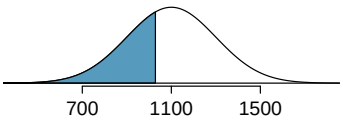
4.8-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Agar Shannonning kamida 1190 ball olish ehtimoli 0,3264 bo‘lsa, unda uning 1190 dan kam ball olish ehtimoli qancha? Ushbu mashqni ifodalovchi normal egri chizig‘ini chizib, yuqori qism o‘rniga quyi qismini soyalang.[7]

4.9-MISOL

Edvard SAT bo‘yicha 1030 ball to‘pladi. Uning persentili qanday?

Avval rasm chizish kerak. Edvardning persentili uning ballidan past bo‘lgan odamlar ulushidir (quyi quyruq qismi). Bu 1030 dan past bo‘lgan ballardir.



O‘rtacha qiymat $\mu = 1100$, standart chetlanish $\sigma = 200$ va quyruq qismi chegarasi $x = 1030$ ni aniqlash Z-ballni hisoblashni osonlashtiradi:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1030 - 1100}{200} = -0,35 \ .$$

Statistik dasturiy ta’minotdan foydalanib, quyruq qismi maydoni 0,3632 ekanini topamiz. Edvard 36− persentilda joylashgan.

4.10-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

4.9-misolning natijalaridan foydalanib, Edvarddan yaxshiroq natijaga ega bo‘lgan SAT topshiruvchilarning ulushini hisoblang. Shuningdek, yangi rasm chizing.[8]

O‘NG TOMONDAGI MAYDONNI TOPISH

Ko‘pgina dasturiy ta’minotlar Z-ball berilganda chap tomondagi maydonni qaytaradi. Agar o‘ng tomondagi maydonni topmoqchi bo‘lsangiz, avval chap tomondagi maydonni toping, so‘ng bu qiymatni birlikdan ayiring.

4.11-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Styuart SAT bo‘yicha 1500 ball to‘pladi. Har bir qism uchun rasm chizing.
(a) Uning persentili qanday?
(b) Styuartdan yaxshiroq natijaga ega bo‘lgan SAT topshiruvchilarning ulushi qancha?[9]

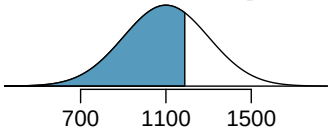
AQShda 100 kishilik tanlanmaga asoslangan ma’lumotlarga ko‘ra, erkaklarning bo‘ylari deyarli normal taqsimotga ega bo‘lib, o‘rtacha qiymati 70,0” (dyuym, 1 dyuym = 2,54 cm) va standart chetlanishi 3,3”.

4.12-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

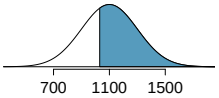
Mayk 5’7” (5 fut 7 dyuym, 1 fut = 12 dyuym), Xose esa 6’4” bo‘yga ega bo‘lib, ular AQShda yashaydi.
(a) Maykning bo‘y persentili qanday?
(b) Xosening bo‘y persentili qanday?
Har bir qism uchun rasm chizing.[10]

Oxirgi bir nechta misollar ma’lum bir kuzatuv uchun persentilni (quyi quyruq) yoki yuqori

[7] Bu ehtimolni 4.7-misolda topdik: 0,6736.



[8] Agar Edvard SAT topshiruvchilarining 36% dan yaxshiroq natijaga erishgan bo‘lsa, taxminan 64% undan yaxshiroq natijaga erishgan.



[9] Rasmlarni o‘zingiz chizing. (a) $Z = \frac{1500-1100}{200} = 2 \rightarrow 0,9772$. (b) $1 - 0,9772 = 0,0228$.

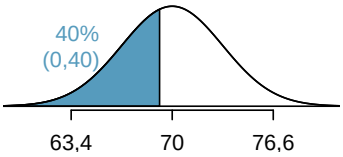
[10] Avval bo‘ylarni dyuymga o‘tkazing: 67 va 76 dyuym. Quyida rasmlar ko‘rsatilgan.
(a) $Z_{\text{Mayk}} = \frac{67-70}{3,3} = -0,91 \ \rightarrow \ 0,1814$. (b) $Z_{\text{Xose}} = \frac{76-70}{3,3} = 1,82 \ \rightarrow \ 0,9656$.

quyruqni topishga qaratilgan edi. Agar siz ma'lum bir persentilga to'g'ri keladigan kuzatuvni bilishni xohlasangiz-chi?

M **4.13-MISOL**

Erikning bo'yi 40− persentilda. Uning bo'yi qancha?

Har doimgidek, avval rasmni chizing.



Ushbu holatda quyi quyruq ehtimoli (0,40) ma'lum bo'lib, diagrammada soyalanish bilan berilgan. Biz ushbu qiymatga mos keladigan kuzatuvni topmoqchimiz. Bu yo'nalishdagi birinchi qadam sifatida 40−persentilga mos keladigan Z-ballni aniqlaymiz. Dasturiy ta'minotdan foydalanib, biz mos keladigan Z-ballni taxminan −0,25 deb topamiz.

$Z_{Erik} = -0{,}25$ va aholi parametrlari $\mu = 70$ va $\sigma = 3{,}3$ dyuym bo'lganini bilgan holda, Erikning noma'lum bo'yi, x_{Erik} ni topish uchun Z-ball formulasini ishlatamiz:

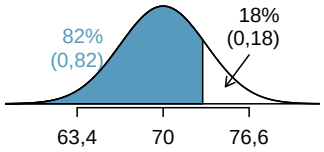
$$-0{,}25 = Z_{\text{Erik}} = \frac{x_{\text{Erik}} - \mu}{\sigma} = \frac{x_{\text{Erik}} - 70}{3{,}3}.$$

x_{Erik} ni yechib olsak, bo'yi 69,18 dyuym bo'lib chiqadi. Ya'ni, Erikning bo'yi taxminan 5'9".

M **4.14-MISOL**

Katta yoshdagi erkaklarning bo'yi 82− persentilda qanday bo'ladi?

Yana bir bor, avval rasmni chizamiz.



Keyingi bosqichda, 82− persentildagi Z-ballni topamiz, bu musbat qiymat bo'lib, dasturiy ta'minot orqali $Z = 0{,}92$ sifatida topiladi. Nihoyat, bo'yi x Z-ball formulasi yordamida o'rtacha qiymat μ, standart chetlanish σ va Z-ball $Z = 0{,}92$ orqali topiladi:

$$0{,}92 = Z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 70}{3{,}3}.$$

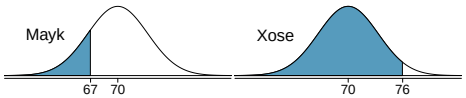
Bu 73,04 dyuym yoki taxminan 6'1" bo'lib, bu 82− persentildagi bo'yni bildiradi.

Y **4.15-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

SAT ballari $N(1100; 200)$ ga amal qiladi.[11]
(a) SAT uchun 95− persentil qanday?
(b) SAT uchun 97,5− persentil qanday?

Y **4.16-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Katta yoshdagi erkaklarning bo'ylari $N(70{,}0"; 3{,}3")$ ga bo'ysunadi.[12]
(a) Tasodifiy tanlangan erkakning bo'yi kamida 6'2" (74 dyuym) bo'lish ehtimoli qancha?
(b) Erkakning bo'yi 5'9" (69 dyuym) dan past bo'lish ehtimoli qancha?



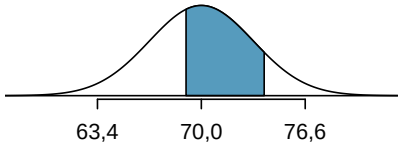
[11] Qisqa javoblar: (a) $Z_{95} = 1{,}6449 \to 1429$ SAT balli. (b) $Z_{97{,}5} = 1{,}96 \to 1492$ SAT balli.

[12] Qisqa javoblar: (a) $Z = 1{,}21 \to 0{,}8869$, keyin bu qiymatni 1 dan ayiramiz va natija 0,1131 bo'ladi. (b) $Z = -0{,}30 \to 0{,}3821$.

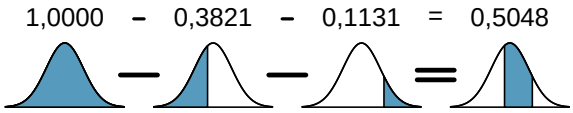
M **4.17-MISOL**

Tasodifiy tanlangan erkakning bo‘yi 5’9” va 6’2” oralig‘ida bo‘lish ehtimoli qancha?

Ushbu bo‘ylar 69 dyuym va 74 dyuymga mos keladi. Avval rasmni chizamiz. Qiziqarli maydon endi yuqori yoki quyi quyruq emas.



Egri chiziq ostidagi umumiy maydon 1 ga teng. Soyalanmagan ikkita quyruq maydonini topsak (4.16-yo‘naltirilgan mashqga muvofiq, bu maydonlar 0,3821 va 0,1131), o‘rtadagi maydonni hisoblashimiz mumkin:



Demak, 5’9” va 6’2” oralig‘ida bo‘lish ehtimoli 0,5048 ga teng.

Y **4.18-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

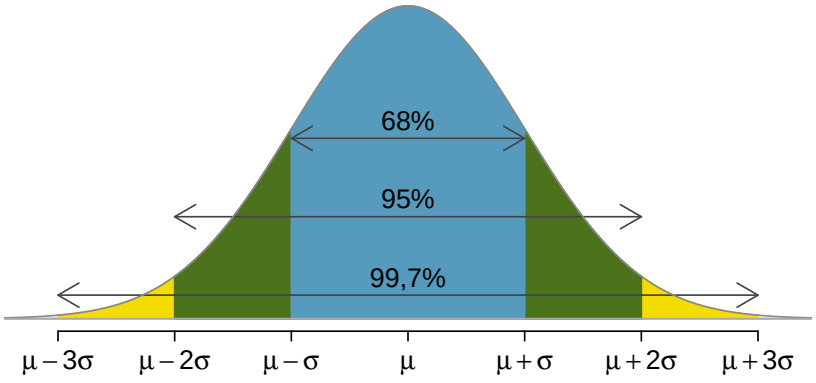
SAT ballari $N(1100; 200)$ ga bo‘ysunadi. SAT bo‘yicha 1100 va 1400 oralig‘ida ball olganlarning foizi qancha?[13]

Y **4.19-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Katta yoshdagi erkaklarning bo‘ylari $N(70{,}0”; 3{,}3”)$ ga amal qiladi. Katta yoshdagi erkaklarning bo‘ylarining 5’5” va 5’7” oralig‘ida bo‘lish foizini toping.[14]

4.1.5 68–95–99,7 qoidasi

Bu yerda biz normal taqsimotda o‘rtacha qiymatdan 1, 2 va 3 standart chetlanish doirasida bo‘lish ehtimoli uchun foydali qoida bilan tanishtiramiz. Bu qoida ko‘plab amaliy holatlarda, xususan kalkulyator yoki Z-jadvalsiz tezkor taxminlar qilishda juda foydali bo‘ladi.



4.7-rasm. Normal taqsimotda o‘rtacha qiymatdan 1, 2 va 3 standart chetlanish doirasida bo‘lish ehtimolliklari.

[13] Bu qisqartirilgan yechimdir. (Rasmni albatta chizing!) Avval 1100 dan past bo‘lganlar foizini va 1400 dan yuqori bo‘lganlar foizini toping: $Z_{1100} = 0{,}00 \to 0{,}5000$ (pastki maydon), $Z_{1400} = 1{,}5 \to 0{,}0668$ (yuqori maydon). Yakuniy javob: $1{,}0000 - 0{,}5000 - 0{,}0668 = 0{,}4332$.

[14] 5’5” 65 dyuymga ($Z = -1{,}52$) va 5’7” 67 dyuymga ($Z = -0{,}91$) teng. Raqamli yechim: $1{,}000 - 0{,}0643 - 0{,}8186 = 0{,}1171$, ya’ni 11,71%.

Ⓨ **4.20-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Dasturiy ta’minot, kalkulyator yoki ehtimollik jadvalidan foydalanib, normal taqsimotda o‘rtacha qiymatdan 1, 2 va 3 standart chetlanish doirasida mos ravishda 68%, 95% va 99,7% kuzatishlar joylashganligini tasdiqlang. Masalan, avval $Z = -1$ va $Z = 1$ orasidagi maydonni toping, bu taxminan 0,68 maydon bo‘lishi kerak. Xuddi shunday, $Z = -2$ va $Z = 2$ orasida taxminan 0,95 maydon bo‘lishi kerak.[15]

Normal tasodifiy miqdor 4, 5 yoki undan ham ko‘p standart chetlanish masofasida joylashishi mumkin. Biroq, agar ma’lumotlar deyarli normal bo‘lsa, bunday holatlar juda kam uchraydi. o‘rtacha qiymatdan 4 standart chetlanishdan uzoqda bo‘lish ehtimoli taxminan 15000 dan 1. 5 va 6 standart chetlanish uchun bu ehtimollar mos ravishda 2 milliondan 1 va 500 milliondan 1 atrofida.

Ⓨ **4.21-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

SAT ballari o‘rtacha qiymat $\mu = 1100$ va standart chetlanish $\sigma = 200$ bo‘lgan normal modelga yaqin.
(a) Taxminan necha foiz imtihon topshiruvchilar 700 dan 1500 gacha ball oladi?
(b) Necha foiz 1100 va 1500 orasida ball oladi?[16]

Mashqlar

4.1 Egri chiziq ostidagi maydon, 1-qism. Standart normal taqsimot $N(\mu = 0; \sigma = 1)$ ning qancha foizi quyidagi sohalarda joylashganligini aniqlang. Grafik chizishni unutmang.

(a) $Z < -1{,}35$ (b) $Z > 1{,}48$ (c) $-0{,}4 < Z < 1{,}5$ (d) $|Z| > 2$

4.2 Egri chiziq ostidagi maydon, 2-qism. Standart normal taqsimot $N(\mu = 0; \sigma = 1)$ ning qancha foizi quyidagi sohalarda joylashganligini aniqlang. Grafik chizishni unutmang.

(a) $Z > -1{,}13$ (b) $Z < 0{,}18$ (c) $Z > 8$ (d) $|Z| < 0{,}5$

4.3 GRE ballari, 1-qism. Graduate Record Examination (GRE) imtihonida Sofiya so’zli fikrlash (Verbal Reason) bo‘limida 160 ball, miqdoriy fikrlash (Quantitative Reason) bo‘limida esa 157 ball oldi. Barcha test topshiruvchilar uchun so’zli fikrlash bo‘limining o‘rtacha bali 151, standart chetlanishi 7; miqdoriy fikrlash bo‘limining o‘rtacha bali esa 153, standart chetlanishi 7,67. Ikkala taqsimotni ham deyarli normal deb faraz qilamiz.

(a) Ushbu ikkita normal taqsimot uchun qisqa belgilashni yozing.
(b) Sofiyaning so’zli fikrlash bo‘limidagi Z-balli qanday? Miqdoriy fikrlash bo‘limidagi Z-balli-chi? Standart normal taqsimot egri chizig‘ini chizib, ushbu Z-balllarni belgilang.
(c) Ushbu Z-ballar nimani anglatadi?
(d) Boshqalarga nisbatan u qaysi bo‘limda yaxshiroq natija ko‘rsatgan?
(e) Uning ikkala imtihondagi persentillarini toping.
(f) So’zli fikrlash bo‘limida Sofiyadan yaxshiroq natija ko‘rsatganlar foizi qancha? Miqdoriy fikrlash bo‘limida-chi?
(g) Ushbu ikki bo‘limdan qaysi birida talaba yaxshiroq natija ko‘rsatganligini aniqlashda xom ballarni taqqoslash noto‘g‘ri xulosaga olib kelishi mumkinligini tushuntiring.
(h) Agar ushbu imtihonlardagi ballar taqsimoti deyarli normal bo‘lmasa, (b)-(f) qismlariga bo‘lgan javoblaringiz o‘zgaradimi? Sababini tushuntiring.

4.4 Triatlon vaqtlari, 1-qism. Triatlonlarda musobaqachilarni yosh va jins bo‘yicha guruhlarga ajratish odatiy holatdir. Do‘stlar Leo va Meri g’arbiy qirg’oq triatlon (Hermosa Beach Triathlon) musobaqasida ishtirok etdilar. Leo *30-34 yoshli erkaklar* guruhida, Meri esa *25-29 yoshli ayollar* guruhida qatnashdi. Leo musobaqani 1:22:28 (4948 soniya) da tugatdi, Meri esa 1:31:53 (5513 soniya) da tugatdi. Shubhasiz, Leo tezroq tugatdi, ammo ular o‘z guruhlarida qanday natijaga erishganlarini bilishni istashadi. Ularga yordam bera olasizmi? Ularning guruhlariga oid ma’lumotlar:

[15] Avval rasmlarni chizing. Dasturiy ta’minot yordamida, 1 standart chetlanish ichida 0,6827, 2 standart chetlanish ichida 0,9545, va 3 standart chetlanish ichida 0,9973 ni olamiz.

[16] (a) 700 va 1500 qiymatlari o‘rtacha qiymatdan ikki standart chetlanish past va yuqori masofani ifodalaydi, ya’ni taxminan 95% imtihon topshiruvchilar 700 va 1500 orasida ball oladi. (b) 700 dan 1500 gacha bo‘lgan soha taxminan 95% ni tashkil etadi. Ushbu imtihon topshiruvchilar taqsimot markazi, 1100 bilan teng bo‘linadi, shuning uchun $\frac{95\%}{2} = 47{,}5\%$ imtihon topshiruvchilar 1100 va 1500 orasida ball oladi.

- *30-34 yoshli erkaklar* guruhining tugatish vaqtlari o‘rtacha 4313 soniya, standart chetlanishi 583 soniya;
- *25-29 yoshli ayollar* guruhining tugatish vaqtlari o‘rtacha 5261 soniya, standart chetlanishi 807 soniya;
- Har ikkala guruh uchun tugatish vaqtlarining taqsimoti deyarli normal.

Eslatma: yaxshiroq natija tezroq tugatishni bildiradi.

(a) Ushbu ikkita normal taqsimot uchun qisqa belgilashni yozing;
(b) Leoning va Merining tugatish vaqtlarining Z-balllari qanday? Ushbu Z-ballar nimani anglatadi?
(c) Leo yoki Meri o‘z guruhlarida yaxshiroq natija ko‘rsatganmi? Sababini tushuntiring;
(d) Leoning guruhidagi triatlonchilarning qancha foizidan tezroq tugatganligini hisoblang;
(e) Merining guruhidagi triatlonchilarning qancha foizidan tezroq tugatganligini hisoblang;
(f) Agar tugatish vaqtlarining taqsimoti deyarli normal bo‘lmasa, (b)-(e) qismlariga bo‘lgan javoblaringiz o‘zgaradimi? Sababini tushuntiring.

4.5 GRE ballari, 2-qism. 4.3-mashqda GRE ballarining ikkita taqsimoti keltirilgan. So’zli fikrlash bo‘limi uchun $N(\mu = 151; \sigma = 7)$ va miqdoriy fikrlash bo‘limi uchun $N(\mu = 153; \sigma = 7{,}67)$. Ushbu ma’lumotlardan foydalanib quyidagilarni hisoblang:

(a) Miqdoriy fikrlash bo‘limida 80− persentilda talabaning balli qanday?
(b) So’zli fikrlash bo‘limida test topshiruvchilarning 70% dan yomonroq natija ko‘rsatgan talabaning balli qanday?

4.6 Triatlon vaqtlari, 2-qism. 4.4-mashqda triatlon vaqtlarining ikkita taqsimoti keltirilgan: *30-34 yoshli erkaklar* uchun $N(\mu = 4313; \sigma = 583)$ va *25-29 yoshli ayollar* uchun $N(\mu = 5261; \sigma = 807)$. Vaqtlar soniyalarda berilgan. Ushbu ma’lumotlardan foydalanib quyidagilarni hisoblang:

(a) Erkaklar guruhidagi sportchilarning eng tezkor 5% uchun belgilangan tugash vaqti qanday?
(b) Ayollar guruhidagi sportchilarning eng sekin 10% uchun belgilangan tugash vaqti qanday?

4.7 Los-Anjeles ob-havosi, 1-qism. Los-Anjelesda iyun oyidagi o‘rtacha kunduzgi maksimal harorat 77°F bo‘lib, standart chetlanishi 5°F. Iyundagi haroratlar deyarli normal taqsimotga amal qiladi, deb faraz qilaylik.

(a) Iyunda tasodifiy tanlangan kunda 83°F yoki undan yuqori harorat kuzatilish ehtimoli qanday?
(b) Iyundagi eng sovuq 10% kunlarning (eng past haroratli kunlari) harorati qanday?

4.8 CAPM. Kapital aktivlarni baholash modeli (The Capital Asset Pricing Model, CAPM) bu portfel qaytishlarini normal taqsimotga ega deb faraz qiluvchi moliyaviy modeldir. Faraz qilaylik, bir portfelning o‘rtacha yillik daromadi 14,7% (ya’ni, o‘rtacha 14,7% foyda) bo‘lib, standart chetlanishi 33%. 0% qaytish portfel qiymati o‘zgarmaganini, salbiy qaytish esa portfel zarar ko‘rganini, musbat qaytish esa foyda olganini bildiradi.

(a) Ushbu portfel yillar davomida qanchalik foizda zarar ko‘rishini (ya’ni, 0% dan past qaytishni) hisoblang.
(b) Ushbu portfelning eng yuqori yillik daromadning 15% chegarasi qanday?

4.9 Los-Anjeles ob-havosi, 2-qism. 4.7-mashqda Los-Anjelesda iyun oyidagi o‘rtacha kunduzgi maksimal harorat 77°F, standart chetlanishi esa 5°F ekanligi aytilgan va bu haroratlar normal taqsimotga bo’ysunadi deb faraz qilingan. Biz haroratni °F (Farengeyt) dan °C (Selziy) ga quyidagi formuladan foydalangan holda o‘tkazamiz:

$$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}.$$

(a) Los-Anjelesda iyundagi haroratning °C dagi taqsimoti uchun ehtimollik modelini yozing.
(b) Los-Anjelesda iyunda 28°C (taxminan 83°F ga to‘g‘ri keladi) yoki undan yuqori harorat kuzatilish ehtimolini hisoblang. (a) qismdagi °C modelidan foydalaning.
(c) Ushbu savolning (b) qismidagi javobingiz va 4.7-mashqning (a) qismidagi javobingiz bir xilmi yoki farqlimi? Hayron qoldingizmi? Tushuntiring.
(d) Los-Anjelesda iyundagi haroratlarning IQR (interkvartil farqi) ni (Selziy bo‘yicha) baholang.

4.10 Standart chetlanishni toping. 20 dan 34 yoshgacha bo‘lgan ayollarda xolesterin darajalari taxminan normal taqsimotga bo’ysunadi va o‘rtacha qiymati 185 milligramm/desiliter (mg/dl) ni tashkil etadi. Xolesterin darajasi 220 mg/dl dan yuqori bo‘lgan ayollar yuqori xolesterinli deb hisoblanadi va taxminan 18,5% ayollar ushbu toifaga kiradi. 20 dan 34 yoshgacha bo‘lgan ayollarning xolesterin darajalari taqsimotining standart chetlanishini toping.

4.2 Geometrik taqsimot

Tangani `gerb` tushguniga qadar necha marta tashlashimiz kerak? Yoki `1` chiqquniga qadar kubni necha marta tashlashimiz kerak? Ushbu savollarga geometrik taqsimot yordamida javob topish mumkin. Avval biz har bir tajribani yani, bir marta tanga tashlash yoki bir marta kubni otishni Bernulli taqsimoti yordamida shakllantiramiz. Keyin esa bularni ehtimollik vositalari (3-bob) bilan birlashtirib, geometrik taqsimotni hosil qilamiz.

4.2.1 Bernulli taqsimoti

Amerika Qo‘shma Shtatlaridagi ko‘plab tibbiy sug‘urta ta’rif rejalari to‘lanadigan miqdor chegarasini o‘z ichiga oladi, ya’ni sug‘urta qilinuvchi shaxs bu chegaragacha bo‘lgan xarajatlar uchun javobgar bo‘ladi, keyin esa yil oxirigacha bu xarajatlar sug‘urta kompaniyasi va shaxs o‘rtasida taqsimlanadi.

Tasavvur qiling, bir tibbiy sug‘urta kompaniyasi sug‘urta qilingan shaxslarning 70% o‘z xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirmasligini aniqladi. Har bir bunday shaxs **tajriba** sifatida qaralishi mumkin. Agar biror shaxsning sog‘liqni saqlash xarajatlari belgilangan chegaradan oshmasa, biz uni **muvaffaqiyat** deb belgilaymiz. Agar oshsa, biz uni **muvaffaqiyatsizlik** deb belgilaymiz. Shaxslarning 70% i xarajatlarini oshirmasligini hisobga olsak, biz **muvaffaqiyat ehtimoli**ni $p = 0{,}7$ deb belgilaymiz. Muvaffaqiyatsizlik ehtimoli ba’zan $q = 1 - p$ deb belgilanadi, sug‘urta misoli uchun bu 0,3 bo‘ladi.

Agar har bir tajribaning faqat ikkita mumkin bo‘lgan natijasi bo‘lsa, odatda `muvaffaqiyat` yoki `muvaffaqiyatsizlik` deb belgilanadi, u holda bu **Bernulli tasodifiy miqdori** deb ataladi. Biz biror shaxs xarajatlarini oshirmaganida `muvaffaqiyat` va qolgan holatlarni `muvaffaqiyatsizlik` deb belgiladik. Ammo, biz bu belgilashlarni osongina o‘zgartirishimiz mumkin edi. Qurilgan matematik asos qaysi natija muvaffaqiyat va qaysi muvaffaqiyatsizlik deb belgilanishiga bog‘liq emas, faqat izchil bo‘lishimiz kerak.

Bernulli tasodifiy miqdorlari ko‘pincha muvaffaqiyat uchun `1` va muvaffaqiyatsizlik uchun `0` sifatida belgilanadi. Bu faqat ma’lumotlarni kiritishda qulaylik yaratib qolmasdan, balki matematik jihatdan ham foydali. Masalan, biz o‘nta tajribani kuzatdik deylik:

`1 1 1 0 1 0 0 1 1 0`.

Keyin **tanlanma ulushi** $\hat{p}$ bu kuzatishlarning tanlanma o‘rtachasi bo‘ladi:

$$\hat{p} = \frac{\#\text{ muvaffaqiyatlar}}{\#\text{ tajribalar}} = \frac{1+1+1+0+1+0+0+1+1+0}{10} = 0{,}6.$$

Bernulli tasodifiy miqdorlarini matematik jihatdan yanada chuqurroq o‘rganish mumkin. Chunki `0` va `1` raqamli natijalar bo‘lgani uchun Bernulli tasodifiy miqdorlarining o‘rtacha qiymati va standart chetlanishini aniqlay olamiz (4.15- va 4.16-mashqlarni qarang).

BERNULLI TASODIFIY MIQDORI

Agar X tasodifiy miqdor p ehtimol bilan 1 va $1 - p$ ehtimol bilan 0 qiymatni olsa, unda X Bernulli tasodifiy miqdori bo‘lib, uning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\mu = p; \qquad \sigma = \sqrt{p(1-p)}.$$

Umuman olganda, Bernulli tasodifiy miqdorini faqat ikkita `muvaffaqiyat` va `muvaffaqiyatsizlik` kabi natijaga ega bo‘lgan tasodifiy jarayon sifatida tasavvur qilish mumkin. Keyin biz o‘z matematik asosimizni muvaffaqiyatlar va muvaffaqiyatsizliklar uchun mos ravishda `1` va `0` raqamli belgilardan foydalangan holda quramiz.

4.2.2 Geometrik taqsimot

Geometrik taqsimot muvaffaqiyatni kuzatish uchun qancha tajriba o‘tkazish kerakligini tasvirlash uchun ishlatiladi. Keling, avval bir misolni ko‘rib chiqaylik.

4.22-MISOL

Faraz qiling, biz sug‘urta kompaniyasida ishlayapmiz va tahlil qilish uchun xarajatlari belgilangan chegaradan oshmagan bir shaxsni tanlashimiz kerak. Agar bir shaxs xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirmaslik ehtimoli 0,7 bo‘lsa va biz odamlarni tasodifiy tanlayotgan bo‘lsak, birinchi shaxs xarajatlarini oshirmasligi, ya’ni muvaffaqiyat bo‘lishi ehtimoli qanday? Ikkinchi shaxs uchun-chi? Uchinchi shaxs uchun-chi? Agar birinchi muvaffaqiyat $n-1$ muvaffaqiyatsizlikdan keyin, ya’ni birinchi muvaffaqiyat n-odamda kuzatilsa-chi (Agar birinchi muvaffaqiyat beshinchi odamda bo‘lsa, demak $n=5$.)?

Birinchi shaxsda to‘xtash ehtimoli, ya’ni birinchi shaxs xarajatlarini oshirmasligi ehtimoli shunchaki: 0,7. Ikkinchi shaxs birinchi muvaffaqiyat bo‘lish ehtimoli esa quyidagicha hisoblanadi:

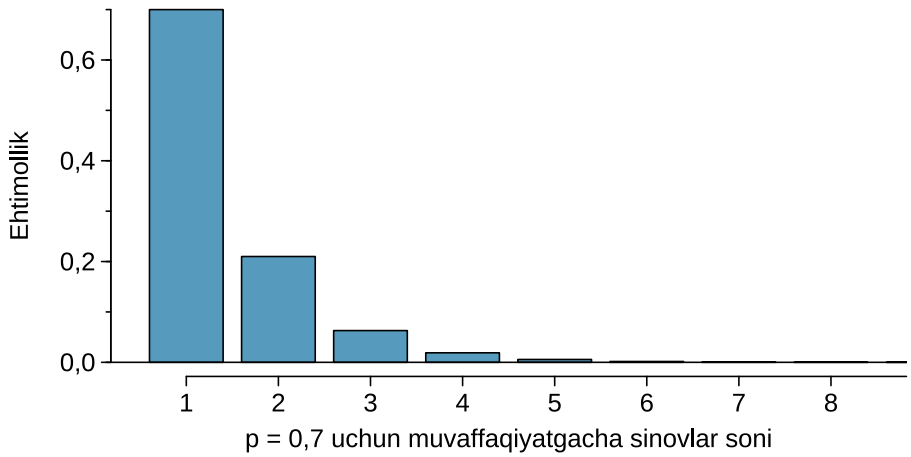
$$P(\text{ikkinchi shaxs birinchi muvaffaqiyat}) =$$
$$= P(\text{birinchi shaxs muvaffaqiyatsizlik, ikkinchi shaxs muvaffaqiyat}) = (0{,}3)(0{,}7) = 0{,}21\ .$$

Xuddi shunday, uchinchi shaxs birinchi muvaffaqiyat bo‘lish ehtimoli esa $(0{,}3)(0{,}3)(0{,}7) = 0{,}063$.

Agar birinchi muvaffaqiyat n-odamda kuzatilsa, unda $n-1$ ta muvaffaqiyatsizlik va nihoyat 1 muvaffaqiyat kuzatiladi. Bu ehtimol $(0{,}3)^{n-1}(0{,}7)$ kabi ifodalanadi. Bu shuningdek, quyidagiga teng: $(1-0{,}7)^{n-1}(0{,}7)$.

4.22-misolda **bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan (BBT)** (ingliz tilida: independent and identically distributed i.i.d) Bernulli tasodifiy miqdorlari uchun muvaffaqiyatgacha bo‘lgan kutish vaqtini (tajribalar sonini) tavsiflovchi **geometrik taqsimot**ning mohiyati tushuntirilgan. Bu holda, bog‘liqsizlik shuni anglatadiki, misoldagi shaxslar bir-biriga ta’sir qilmaydi, va *bir xillik* esa ularning har biri bir xil muvaffaqiyat ehtimoliga ega ekanini bildiradi.

4.22-misoldagi geometrik taqsimot 4.8-rasmda ko‘rsatilgan. Umuman olganda, geometrik taqsimot uchun ehtimollar **eksponensial** tezlikda kamayadi.



4.8-rasm. Geometrik taqsimot, muvaffaqiyat ehtimoli $p=0{,}7$ bo‘lganda.

Ushbu matnda muvaffaqiyatni topish uchun zarur bo‘lgan o‘rtacha (kutilayotgan) tajribalar soni yoki ushbu taqsimotning standart chetlanishi va dispersiyasi formulalarini keltirib chiqarmaymiz, shunchaki har biri uchun umumiy formulalarni taqdim etamiz.

GEOMETRIK TAQSIMOT

Agar bir tajribada muvaffaqiyat ehtimoli p bo‘lsa va muvaffaqiyatsizlik ehtimoli $1-p$ bo‘lsa, unda n-tajribada birinchi muvaffaqiyatni topish ehtimoli quyidagicha ifodalanadi:

$$(1-p)^{n-1}p.$$

Muvaffaqiyatgacha bo‘lgan kutish vaqtining o‘rtacha qiymati (kutilgan qiymat), dispersiyasi va standart chetlanishi quyidagicha ifodalanadi:

$$\mu = \frac{1}{p}; \qquad \sigma^2 = \frac{1-p}{p^2}; \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}}.$$

O‘rtacha qiymat va kutilayotgan qiymat uchun bitta μ belgisidan foydalanganimiz bejiz emas. O‘rtacha qiymat va kutilayotgan qiymat bir xil bo‘ladi.

Geometrik taqsimot bo‘yicha muvaffaqiyatga erishish uchun, o‘rtacha $1/p$ tajriba talab etiladi. Ushbu matematik natija intuitiv tarzda kutganimiz bilan mos keladi. Agar muvaffaqiyat ehtimoli yuqori bo‘lsa (masalan, 0,8), muvaffaqiyat uchun uzoq kutishga to‘g‘ri kelmaydi o‘rtacha $1/0{,}8 = 1{,}25$ tajriba. Agar muvaffaqiyat ehtimoli past bo‘lsa (masalan, 0,1), muvaffaqiyatni kuzatish uchun ko‘p tajriba $1/0{,}1 = 10$ o‘tkazishimiz zarur

Y **4.23-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Aytaylik, biror shaxs o‘z xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirmaslik ehtimoli 0,7 ga teng. Agar biz xarajatlarini oshirmagan biror shaxsni topgunimizcha misollarni tekshirsak, qancha misolni ko‘rib chiqishni kutamiz?[17]

M **4.24-MISOL**

Birinchi muvaffaqiyatni dastlabki 3 ta holat ichida topish ehtimoli qanday?

Bu birinchi ($n = 1$), ikkinchi ($n = 2$), yoki uchinchi ($n = 3$) holatda muvaffaqiyat bo‘lish ehtimoli, bu uchta o‘zaro bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan natijalardir. Tanlanma katta bosh to‘plamdan tasodifiy tanlanayotgani uchun, bu holatlar bog‘liqsiz hisoblanadi. Biz har bir holat ehtimolini hisoblab, natijalarni qo‘shamiz:

$$P(n = 1 \text{ yoki } 2 \text{ yoki } 3) = P(n = 1) + P(n = 2) + P(n = 3) =$$
$$= (0{,}3)^{1-1}(0{,}7) + (0{,}3)^{2-1}(0{,}7) + (0{,}3)^{3-1}(0{,}7) = 0{,}973\ .$$

Shunday qilib, dastlabki 3 ta holatda muvaffaqiyatni topish ehtimoli 0,973 ga teng.

Y **4.25-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

4.24-misolni hal qilishning boshqa aqlliroq usulini toping. Xuddi shu natijaga kelishini isbotlang.[18]

M **4.26-MISOL**

Faraz qiling, bir avtomobillar uchun sug‘urta kompaniyasi sug‘urtalangan haydovchilarning 88% i bir yil ichida xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirmasligini aniqladi. Agar kompaniya xodimi tasodifiy ravishda haydovchilar fayllarini ko‘rib chiqib, belgilangan chegaradan oshirmagan bir haydovchini topguncha davom etsa, sug‘urta xodimi qancha haydovchini tekshirishini kutishi mumkin? Haydovchi fayllarini tekshirish bo‘yicha standart chetlanish qanday?

Bu misolda muvaffaqiyat sug‘urta chegarasini oshirmagan haydovchini topishdir, bu ehtimol $p = 0{,}88$ ga teng. Tekshirilishi kutilayotgan haydovchilar soni o‘rtacha $1/p = 1/0{,}88 = 1{,}14$ va standart chetlanish $\sqrt{(1-p)/p^2} = 0{,}39$ ga teng.

Y **4.27-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

4.26-misolning natijalaridan foydalanib ($\mu = 1{,}14$ va $\sigma = 0{,}39$) 3 yoki undan kamroq tajribalar bilan tugaydigan holatlarning ulushini topishda normal modeldan foydalanish mumkinmi?[19]

Bog‘liqsizlik farazi geometrik taqsimotning muayyan vaziyatni to‘g‘ri va aniq tasvirlab berishi uchun nihoyatda muhim. Matematik jihatdan ham buni ko‘rish mumkin. n-sinovda muvaffaqiyat yuz berish ehtimolini topishda biz bog‘liqsiz jarayonlar uchun ko‘paytirish qoidasidan foydalanishga majbur bo‘ldik. O‘zaro bog‘liq sinovlar uchun geometrik modelni umumlashtirish esa oson ish emas.

Mashqlar

4.11 Bu Bernulli sinovimi?. Quyidagi holatlarning har bir sinovini bog‘liqsiz Bernoulli sinovi deb hisoblash mumkinmi?

(a) Poker o‘yinida tarqatilgan kartalar.

(b) Har bir kubning tashlanish natijasi.

4.12 Qaytarib qo‘yish va qaytarmaslik. Quyidagi holatlarda ko‘rsatilgan bosh to‘plamning yarmi erkaklar va yarmi ayollar deb faraz qiling.

(a) Tasodifiy tanlashda xonadagi 10 kishidan ikkita ayolni ketma-ket tanlash ehtimolini tanlangan shaxslar qaytarib qo‘yilgan va qaytarib qo‘yilmagan holatlar uchun hisoblang. Agar tanlangan shaxslar qaytarib qo‘yilmasa.

---

[17] Birinchi muvaffaqiyatni topish uchun taxminan $1/0{,}7 \approx 1{,}43$ shaxsni tekshirishni kutishimiz mumkin.

[18] Avval qarama-qarshi ehtimolni toping $P(\text{dastlabki 3 tajribada muvaffaqiyat yo‘q}) = 0{,}3^3 = 0{,}027$. Keyin, birdan ushbu ehtimolni ayiring $1 - P(\text{dastlabki 3 ta tajribada muvaffaqiyat yo‘q}) = 1 - 0{,}027 = 0{,}973$.

[19] Yo‘q. Geometrik taqsimot har doim o‘ng tomonga qiyshaygan va uni normal model yordamida yaxshi yaqinlashtirib bo‘lmaydi.

(b) Maydonga 10000 kishi to‘plangan deb faraz qiling. Tasodifiy tanlashda ikki ayolni ketma-ket tanlash ehtimolini tanlangan shaxslar qaytarib qo‘yilgan va qaytarib qo‘yilmagan holatlar uchun hisoblang.

(c) Katta bosh to‘plamdan tanlangan shaxslarni bog‘liqsiz deb hisoblash odatiy holat. (a) va (b) qismlardagi topganlaringizdan foydalangan holda, ushbu faraz o‘rinli yoki o‘rinli emasligini tushuntiring.

4.13 Ko‘z rangi, 1-qism. Er-xotin ikkalasi ham jigarrang ko‘zga ega, lekin ularning farzandlarining jigarrang ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,75, ko‘k ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,125 va yashil ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,125 ga teng.

(a) Ularning birinchi ko‘k ko‘zli farzandi uchinchi farzand bo‘lish ehtimoli qanday? Farzandlarning ko‘z rangi o‘zaro bog‘liqsiz deb faraz qiling.

(b) Bunday ota-ona ko‘k ko‘zli bola ko‘rishdan oldin o‘rtacha qancha farzand ko‘radi? Ko‘k ko‘zli bolani ko‘rishgacha kutilayotgan farzandlar sonining standart chetlanishi qancha bo‘ladi?

4.14 Nosozlik darajasi. Maxsus turdagi tranzistor ishlab chiqaradigan mashinada 2% nosozlik darajasi mavjud. Ishlab chiqarish jarayonida har bir tranzistor bir-biriga bog‘liqsiz deb hisoblang.

(a) 10− ishlab chiqarilgan tranzistor birinchi nosoz tranzistor bo‘lish ehtimoli qanday?

(b) Mashina 100 ta tranzistordan iborat partiyada birorta ham nosoz tranzistor ishlab chiqarmaslik ehtimoli qanday?

(c) Mashina birinchi nosoz tranzistorni ishlab chiqarishdan oldin o‘rtacha qancha tranzistor ishlab chiqaradi? Standart chetlanish qanday bo‘ladi?

(d) Tranzistorlar ishlab chiqaruvchi boshqa mashinada 5% nosozlik darajasi mavjud va har bir tranzistor boshqalariga bog‘liqsiz ishlab chiqariladi. Ushbu mashina bilan birinchi nosoz tranzistorni ishlab chiqarishdan oldin o‘rtacha qancha tranzistor ishlab chiqariladi? Standart chetlanish qanday bo‘ladi?

(e) (c) va (d) qismlaridagi javoblaringizga asoslanib voqea ehtimolining oshishi muvaffaqiyatgacha bo‘lgan o‘rtacha kutilgan vaqtga va standart chetlanishga qanday ta’sir o‘tqazishini toping.?

4.15 Bernulli, o‘rtacha qiymat. 3.4-bo‘limdagi ehtimollik qoidalaridan foydalanib, Bernulli tasodifiy miqdorining o‘rtacha qiymatini toping. X tasodifiy miqdor p ehtimol bilan 1 va $1-p$ ehtimol bilan 0 qiymatni qabul qiladi. Bernoulli tasodifiy miqdorining o‘rtacha kutilayotgan qiymatini hisoblang.

4.16 Bernulli, standart chetlanish. 3.4-bo‘limdagi ehtimollik qoidalaridan foydalanib Bernulli tasodifiy miqdorining standart chetlanishini toping. X tasodifiy miqdor p ehtimol bilan 1 va $1-p$ ehtimol bilan 0 qiymatni qabul qiladi. Boshqacha aytganda, Bernulli tasodifiy miqdorining dispersiyasining kvadrat ildizini hisoblang.

4.3 Binomial taqsimot

Binomial taqsimot belgilangan tajribalar sonida muvaffaqiyatlar sonini tasvirlash uchun ishlatiladi. Bu geometrik taqsimotdan farq qiladi. Geometrik taqsimot muvaffaqiyat kuzatilgunga qadar kutilishi kerak bo‘lgan tajribalar sonini tasvirlagan edi.

4.3.1 Binomial taqsimot

Keling, yana sug‘urta agentligida ekanligimizni tasavvur qilamiz, bu yerda sug‘urtalangan shaxslarning 70% i o‘z xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirmaydi.

M

4.28-MISOL

Tasavvur qiling, sug‘urta agentligi sug‘urtalangan to‘rtta shaxsdan tasodifiy tanlangan tanlanma olmoqda. To‘rttadan faqat bittasi xarajatlarini belgilangan chegaradan oshirishi, qolgan uchtasi esa oshirmasligi ehtimoli qanday? Qulaylik uchun to‘rtta odamni Ariana (A), Brittany (B), Carlton (C), va Damian (D) deb ataymiz.

Keling, bitta odam belgilangan chegarani oshirgan holatni ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{aligned} &P(A = \texttt{oshgan},\ B = \texttt{oshmagan},\ C = \texttt{oshmagan},\ D = \texttt{oshmagan}) = \\ &\quad = P(A = \texttt{oshgan})\ P(B = \texttt{oshmagan})\ P(C = \texttt{oshmagan})\ P(D = \texttt{oshmagan}) = \\ &\quad = (0{,}3)(0{,}7)(0{,}7)(0{,}7) = (0{,}7)^3(0{,}3)^1 = 0{,}103\ . \end{aligned}$$

Ammo yana uchta holat mavjud. Brittany yoki Carlton yoki Damian belgilangan chegarani oshirgan bo‘lishi mumkin edi. Har bir holatda ehtimol yana $(0{,}7)^3(0{,}3)^1$ ga teng. Ushbu to‘rtta holat faqat to‘rttadan bir kishi belgilangan chegarani oshirgan barcha mumkin bo‘lgan holatlarni o‘z ichiga oladi, shuning uchun umumiy ehtimol $4 \times (0{,}7)^3(0{,}3)^1 = 0{,}412$ ga teng bo‘ladi.

Y **4.29-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Brittany belgilangan chegarani oshirgan yagona odam bo‘lgan holatning ehtimoli $(0{,}7)^3(0{,}3)^1$ ekanligini tasdiqlang. [20]

4.28-misoldagi holat binomial taqsimotga oid misoldir. **Binomial taqsimot** muvaffaqiyat ehtimoli p bo‘lgan n ta bog‘liqsiz Bernulli tajribalarida k marta muvaffaqiyatning yuz berish ehtimolini anglatadi (4.28-misolda, $n = 4$, $k = 3$, $p = 0{,}7$). Biz binomial taqsimot bilan bog‘liq ehtimollarni yanada umumiy tarzda aniqlamoqchimiz. Ya’ni n, k va p larning qiymatlaridan foydalanib, ehtimollarni aniqlash uchun formulani keltirib chiqarishni xohlaymiz. Buni amalga oshirish uchun, 4.28-misolning har bir qismini qayta ko‘rib chiqamiz. To‘rtta shaxs belgilangan chegarani oshirishi mumkin edi. Ushbu to‘rtta holatning har biri bir xil ehtimolga ega edi. Shunday qilib, umumiy ehtimolni quyidagicha aniqlashimiz mumkin:

$$[\#\text{ holatlar}] \times P(\text{bir holat}).$$

Ushbu tenglamaning birinchi qismi $n = 4$ ta tajribalarda $k = 3$ ta muvaffaqiyatlarni joylashtirishning barcha mumkin bo‘lgan usullari sonini ifodalaydi. Ikkinchi qismi esa to‘rtta (bir xil ehtimolli) holatlardan istalgan birining ehtimolini ifodalaydi.

Umumiy holda n ta tajribada k ta muvaffaqiyat va $n - k$ ta muvaffaqiyatsizlik uchun $P(\text{bir holat})$ ni ko‘rib chiqamiz. Har qanday bunday holatda bog‘liqsiz hodisalar uchun ko‘paytirish qoidasini qo‘llaymiz:

$$p^k(1-p)^{n-k}.$$

Bu $P(\text{bir holat})$ uchun umumiy formuladir.

Ikkinchidan, n tajribada k muvaffaqiyatlarni tanlash, ya’ni k muvaffaqiyat va $n - k$ muvaffaqiyatsizliklarni joylashtirishning umumiy formulasi kiritiladi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\binom{n}{k}$ ifodasi n **tadan** k **tani tanlash** deb o‘qiladi.[21] Faktorial ifoda (masalan, $k!$) quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \times 1 = 2 \\ 3! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 4! &= 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24 \\ &\vdots \\ n! &= n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

Ushbu formuladan foydalanib, $n = 4$ ta tajribada $k = 3$ ta muvaffaqiyatlarni tanlashning usullari sonini hisoblaymiz:

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)(1)} = 4.$$

Ushbu natija 4.28-misolda har bir mumkin bo‘lgan holatni sinchkovlik bilan tahlil qilish orqali topgan natijamiz bilan aynan mos keladi.

n tadan k tani tanlash uchun $\binom{n}{k}$ va $p^k(1-p)^{n-k}$ ni bitta holat ehtimoli sifatida qo‘shish orqali binomial formulani umumiy holda hosil qilamiz.

[20] $P(A = \texttt{oshmagan},\ B = \texttt{oshgan},\ C = \texttt{oshmagan},\ D = \texttt{oshmagan}) = (0{,}7)(0{,}3)(0{,}7)(0{,}7) = (0{,}7)^3(0{,}3)^1$.

[21] n tadan k tani tanlash uchun boshqa belgilashlar ${}_nC_k$, C_n^k va $C(n,k)$.

BINOMIAL TAQSIMOT

Agar bitta tajribada muvaffaqiyat ehtimoli p bo‘lsa, unda n ta bog‘liqsiz tajribada aynan k ta muvaffaqiyat kuzatilishi ehtimoli quyidagicha ifodalanadi:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Kuzatilgan muvaffaqiyatlar sonining o‘rtacha qiymati, dispersiyasi va standart chetlanishi quyidagicha aniqlanadi:

$$\mu = np; \qquad \sigma^2 = np(1-p); \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

BU BINOMIALMI? TEKSHIRISH UCHUN TO‘RTTA SHART.

(1) Tajribalar bog‘liqsizdir.
(2) Tajribalarning soni n oldindan belgilangan bo‘lishi kerak.
(3) Har bir tajriba natijasini *muvaffaqiyat* yoki *muvaffaqiyatsizlik* deb tasniflash mumkin.
(4) Har bir tajriba uchun muvaffaqiyat ehtimoli bir xil p bo‘lishi kerak.

M

4.30-MISOL

Tasodifiy tanlangan 8 ta shaxsdan 3 tasi sug‘urta chegarasini oshirishi, ya’ni 5 tasi oshirmasligi ehtimoli qanday? Sug‘urtalangan shaxslarning 70% i belgilangan chegarani oshirmasligini yodda tuting.

Binomial modelni qo‘llamoqchimiz. Shuning uchun shartlarni tekshiramiz. Tajribalar soni belgilangan $n = 8$ (shart 2) va har bir tajriba natijasini muvaffaqiyat yoki muvaffaqiyatsizlik sifatida tasniflash mumkin (shart 3). Tanlanmalar tasodifiy bo‘lgani sababli tajribalar bog‘liqsiz (shart 1) va har bir tajriba uchun muvaffaqiyat ehtimoli bir xil (shart 4).

Qiziqish natijasida $n = 8$ ta tajribada $k = 5$ ta muvaffaqiyatlar mavjud (yodda tutingki, muvaffaqiyat sug‘urta chegarasini oshirmagan shaxsni anglatadi) va muvaffaqiyat ehtimoli $p = 0{,}7$. Shunday qilib, 5 tasi oshirmasligi va 3 tasi oshirishi ehtimoli quyidagicha ifodalanadi:

$$\binom{8}{5} (0{,}7)^5 (1-0{,}7)^{8-5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} (0{,}7)^5 (1-0{,}7)^{8-5} = \frac{8!}{5!3!} (0{,}7)^5 (0{,}3)^3 \ .$$

Faktorial qismni hisoblaymiz:

$$\frac{8!}{5!3!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56 \ .$$

$(0{,}7)^5 (0{,}3)^3 \approx 0{,}00454$ ni hisoblab olamiz. Yakuniy ehtimol $56 \times 0{,}00454 \approx 0{,}254$ ga teng.

BINOMIAL EHTIMOLLARNI HISOBLASH

Binomial modeldan foydalanishda birinchi qadam modelning mosligini tekshirish. Ikkinchi qadam n, p va k ni aniqlash. So‘nggi bosqichda dasturiy ta’minot yoki formulalardan foydalanib ehtimolni aniqlang va natijalarni talqin qiling.

Agar hisob-kitoblarni qo‘lda bajarishingiz kerak bo‘lsa, binomial koeffitsiyentning yuqori va past qismlarida imkon qadar ko‘proq qisqartirish amalga oshirish foydali bo‘lishi mumkin.

Y

4.31-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Yuqorida muhokama qilingan sug‘urta agentligidan 40 ta holat faylini tasodifiy tanlasak, bir yilda necha holatda chegarani oshirmasligini kutamiz? Chegarani oshirmaydigan holatlar sonining standart chetlanishi qanday bo‘ladi?[22]

Y

4.32-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

[22] Bizdan o‘rtacha qiymatni (matematik kutilma) va standart chetlanishni aniqlash so‘ralmoqda, ikkalasini ham to‘g‘ridan-to‘g‘ri formulalar yordamida hisoblash mumkin: $\mu = np = 40 \times 0{,}7 = 28$ va $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = 2{,}9$. Taxminan 95% kuzatishlar o‘rtacha qiymatdan 2 standart chetlanish ichida joylashganligi sababli (2.1.4-bo‘limga qarang), tanlanmada sug‘urta chegarasini oshirmaydigan shaxslar soni kamida 22 va ko‘pi bilan 34 bo‘lishini kutamiz.

Bir chekuvchining umr davomida og‘ir o‘pka kasalligiga chalinish ehtimoli taxminan 0.3 ga teng. Agar sizning 4 nafar chekuvchi do‘stingiz bo‘lsa, binomial modelning shartlari o‘rinli bo‘ladimi?[23]

Y **4.33-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tasavvur qiling, ushbu to‘rtta do‘stingiz bir-birini tanimaydi va ularni bosh to‘plamdan tasodifiy olingan tanlanma sifatida ko‘rib chiqish mumkin. Binomial model mos keladimi? Quyidagi ehtimollarni aniqlang:[24]

(a) Hech biri og‘ir o‘pka kasalligiga chalinmaydi.

(b) Faqat bittasi og‘ir o‘pka kasalligiga chalinadi.

(c) Bir yoki undan kam do‘stingiz og‘ir o‘pka kasalligiga chalinadi.

Y **4.34-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

To‘rtta chekuvchi do‘stingizdan kamida 2 tasi umr davomida og‘ir o‘pka kasalligiga chalinishi ehtimoli qanday?[25]

Y **4.35-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tasavvur qiling, sizning 7 nafar chekuvchi do‘stingiz bor va ularni chekuvchilar bosh to‘plamining tasodifiy tanlanmasi sifatida ko‘rish mumkin.[26]

(a) Ulardan nechasi og‘ir o‘pka kasalligiga chalinishini kutasiz, ya’ni o‘rtacha qiymat qancha?

(b) 7 do‘stingizdan ko‘pi bilan 2 tasi og‘ir o‘pka kasalligiga chalinishi ehtimoli qanday?

Endi binomial ehtimollarning birinchi qismi bo‘lgan n tadan k tani tanlashning ayrim maxsus holatlarni ko‘rib chiqamiz.

Y **4.36-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Nima uchun har qanday n uchun $\binom{n}{0} = 1$ va $\binom{n}{n} = 1$ ifodalari to‘g‘ri?[27]

Y **4.37-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

n ta tajribada bitta muvaffaqiyat va $n-1$ ta muvaffaqiyatsizlikni qanday tartibda joylashtirish mumkin? n ta tajribada $n-1$ ta muvaffaqiyat va bitta muvaffaqiyatsizlikni qanday tartibda joylashtirish mumkin?[28]

4.3.2 Binomial taqsimotning normal taqsimotga yaqinlashuvi

Binomial formula tanlanmalar soni n katta bo‘lganda, xususan kuzatishlar oralig‘ini hisoblaganda, murakkab va mashaqqatli bo‘lib qoladi. Ba’zi hollarda binomial ehtimollarni baholashning osonroq va tezroq usuli sifatida normal taqsimotdan foydalanish mumkin.

M **4.38-MISOL**

AQSh aholisining taxminan 15% qismi sigaret chekadi. Mahalliy hukumat ularning jamoasida sigaret chekuvchilar soni pastroq deb hisoblaydi va tasodifiy tanlangan 400 kishidan so‘rovnoma o‘tkazadi. So‘rov

[23] Ehtimoliy javob: agar do‘stlar bir-birlarini bilishsa, unda bog‘liqsizlik bajarilmaydi. Masalan, tanishlar bir xil chekish odatlariga ega bo‘lishi yoki birgalikda chekishni tashlashga kelishib olishlari mumkin.

[24] Binomial modelga mosligini tekshirish uchun quyidagilarni tasdiqlash kerak: (i) Do‘stlarni tasodifiy tanlanma sifatida ko‘rib chiqish mumkin, shuning uchun ular bog‘liqsizdir. (ii) Tajriba soni ($n = 4$) belgilangan. (iii) Har bir natija muvaffaqiyat yoki muvaffaqiyatsizlik sifatida tasniflanadi. (iv) Har bir sinovda “muvaffaqiyat” ehtimoli bir xil, chunki individlar tasodifiy tanlanmadan olingandek. Agar “muvaffaqiyat” deb kimdadir o‘pka kasalligi aniqlanishini olsak, u holda $p = 0{,}3$ (“Muvaffaqiyat”ni shunday belgilash — biroz noo‘rin tanlov). Binomial formula yordamida (a) va (b) qismlarni hisoblaymiz: $P(0) = \binom{4}{0}(0{,}3)^0(0{,}7)^4 = 1 \times 1 \times 0{,}7^4 = 0{,}2401$, $P(1) = \binom{4}{1}(0{,}3)^1(0{,}7)^3 = 0{,}4116$. Eslatma $0! = 1$ ga teng. (c) qismi (a) va (b) qismlarining yig‘indisi sifatida hisoblanadi: $P(0) + P(1) = 0{,}2401 + 0{,}4116 = 0{,}6517$. Demak, to‘rtta chekuvchi do‘stingizdan bir yoki undan kamrog‘i og‘ir o‘pka kasalligiga chalinish ehtimoli taxminan 65%.

[25] Qo‘shimcha ehtimol (bir yoki undan kam do‘stingiz og‘ir o‘pka kasalligiga chalinadi) 4.33-yo‘naltirilgan mashqda 0,6517 sifatida hisoblangan, shuning uchun $1 - 0{,}6517 = 0{,}3483$ qiymatini olamiz.

[26] (a) $\mu = 0{,}3 \times 7 = 2{,}1$. (b) $P(0$ yoki 1 yoki 2 tasi og‘ir o‘pka kasalligiga chalinadi$) = P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2) = 0{,}6471$.

[27] Ushbu ifodalarni so‘z bilan izohlashga harakat qiling. n ta tajribada 0 ta muvaffaqiyat va n muvaffaqiyatsizlikni qanday tartibda joylashtirish mumkin? (1 ta usul.) n ta muvaffaqiyat va 0 ta muvaffaqiyatsizlikni qanday tartibda joylashtirish mumkin? (1 ta usul.)

[28] Bitta muvaffaqiyat va $n - 1$ ta muvaffaqiyatsizlik. Muvaffaqiyatni joylashtirish uchun n ta joy bor, shuning uchun n ta usul mavjud. Xuddi shu mantiqdan ikkinchi savol uchun foydalaniladi. Matematik jihatdan quyidagi tenglamalarni tasdiqlash orqali ushbu natijalarni ko‘rsatamiz

$$\binom{n}{1} = n; \qquad \binom{n}{n-1} = n.$$

natijalariga ko‘ra 42 ishtirokchi sigaret chekadi. Agar jamoada aslida sigaret chekuvchilar ulushi 15% bo‘lsa, 400 odamdan iborat tanlanmada 42 yoki undan kam chekuvchilarni kuzatish ehtimoli qanday?

Binomial model uchun to‘rt shartning to‘g‘ri ekanligini tasdiqlash mashq sifatida qoldiriladi.

Savol $n = 400$, $p = 0{,}15$ bo‘lganda $k = 0$, 1, 2, ..., 42 sigaret chekuvchilarni kuzatish ehtimolini aniqlashga teng. Ushbu 43 ta ehtimollarni hisoblab, ularni qo‘shish orqali javobni topamiz:

$$P(k = 0 \text{ yoki } k = 1 \text{ yoki } \cdots \text{ yoki } k = 42) = \\ = P(k = 0) + P(k = 1) + \cdots + P(k = 42) = 0{,}0054 \ .$$

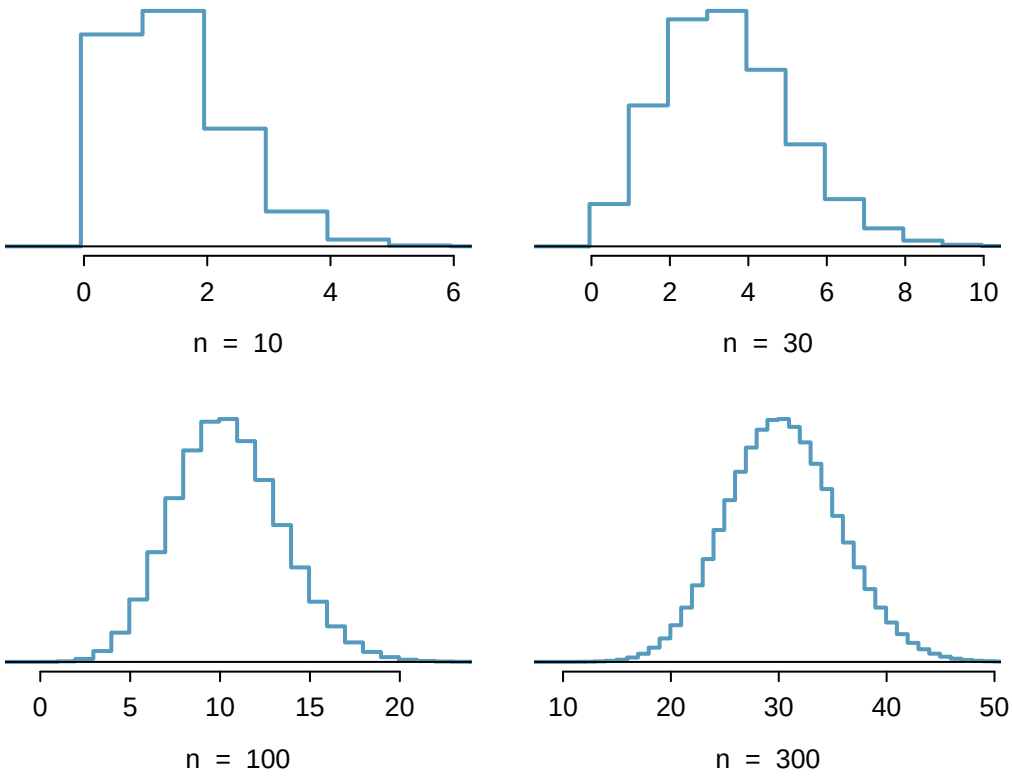
Agar jamoada sigaret chekuvchilar ulushi $p = 0{,}15$ bo‘lsa, 400 odamdan iborat tanlanmada 42 yoki undan kam chekuvchilarni kuzatish ehtimoli 0,0054 ga teng.

4.38-misolda keltirilgan hisoblar murakkab va uzoq. Umuman olganda, agar tezroq, osonroq va yana ham aniqroq alternativ usul bo‘lsa, bunday ishlardan qochish kerak. Yodda tutingki, qiymatlar oralig‘ining ehtimollarini hisoblash normal modelda ancha osonroq. Shunday ekan, normal modeldan binomial taqsimot o‘rniga foydalanishni o‘ylab ko‘ramiz. Ajablanarli darajada, javob ha, agar ma’lum shartlar bajarilsa.

Y

4.39-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Bu yerda muvaffaqiyat ehtimoli $p = 0{,}10$ bo‘lganda binomial modelni ko‘rib chiqamiz. 4.9-rasmda binomial taqsimotdan simulyatsiya qilingan to‘rtta tanlanma uchun ichi bo‘sh gistogramma tasvirlangan. Bu yerda to‘rtta turli $n = 10$, 30, 100, 300 hajmli tanlanmalar soni qo‘llanilgan. Tanlanmalar hajmi oshgani sari taqsimotning shakli qanday o‘zgaradi? So‘nggi gistogramma qaysi taqsimotga o‘xshaydi?[29]



4.9-rasm. Binomial modeldan olingan tanlanmalar uchun ichi bo‘sh gistogrammalar, $p = 0{,}10$ bo‘lganda. To‘rtta grafik uchun tanlanma hajmi mos ravishda $n = 10$, 30, 100 va 300.

[29] Taqsimot “bo‘lak-bo‘lak” va qiyshiq ko‘rinishdan, so‘nggi ichi bo‘sh gistogrammada normal taqsimotga ko‘proq o‘xshaydigan ko‘rinishga o‘zgargan.

BINOMIAL TAQSIMOTNING NORMALGA YAQINLASHUVI

Agar muvaffaqiyat ehtimoli p bo‘lgan binomial taqsimotda tanlanmalar soni n etarlicha katta bo‘lsa, ya’ni np va $n(1-p)$ kamida 10 bo‘lsa, taqsimot deyarli normal shaklga ega bo‘ladi. Yaqinlashuvchi normal taqsimotning parametrlari binomial taqsimotning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishiga mos keladi:

$$\mu = np; \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}\ .$$

Normal yaqinlashuv ko‘plab mumkin bo‘lgan muvaffaqiyatlar oralig‘ini hisoblashda ishlatilishi mumkin. Masalan, normal taqsimotni 4.38-misoldagi holatga qo‘llashimiz mumkin.

M **4.40-MISOL**

Agar chekuvchilar ulushi $p = 0{,}15$ bo‘lsa, $n = 400$ tanlanmada 42 yoki undan kam chekuvchilarni kuzatish ehtimolini baholash uchun normal yaqinlashuvdan qanday foydalanish mumkin?

Binomial model mos ekanligini ko‘rsatish 4.38-misolda mashq sifatida tavsiya qilingan. Bundan tashqari, np va $n(1-p)$ kamida 10 ekanligini tasdiqlaymiz:

$$np = 400 \times 0{,}15 = 60; \qquad n(1-p) = 400 \times 0{,}85 = 340.$$

Ushbu shartlar bajarilgan holda, binomial taqsimot o‘rniga binomial modeldan olingan o‘rtacha qiymat va standart chetlanishdan foydalanib, normal yaqinlashuvni qo‘llashimiz mumkin

$$\mu = np = 60; \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} = 7{,}14.$$

Biz ushbu model yordamida 42 yoki undan kam chekuvchilarni kuzatish ehtimolini topmoqchimiz.

Y **4.41-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Normal modeldan $N(\mu = 60; \sigma = 7{,}14)$ foydalanib, $n = 400$ tanlanmada 42 yoki undan kam chekuvchilarni kuzatish ehtimolini baholang. Sizning javobingiz taxminan 4.38-misoldagi 0,0054 yechimiga teng bo‘lishi kerak. [30]

4.3.3 Kichik intervalda normal yaqinlashuvning ishdan chiqishi

Binomial taqsimotning normalga yaqinlashuvi hatto shartlar bajarilganida ham kichik oralig‘larni baholashda unchalik yaxshi ishlamasligi mumkin.

Tasavvur qiling, $p = 0{,}15$ bo‘lganda $n = 400$ tanlanmada 49 yoki 50 yoki 51 chekuvchilarni kuzatish ehtimolini hisoblashimiz zarur. Shuncha katta tanlanmada normalga yaqinlashuvdan foydalanishga harakat qilish mumkin, ammo binomial yechim va normal yaqinlashuv sezilarli darajada farq qiladi:

Binomial: 0,0649 Normal: 0,0421

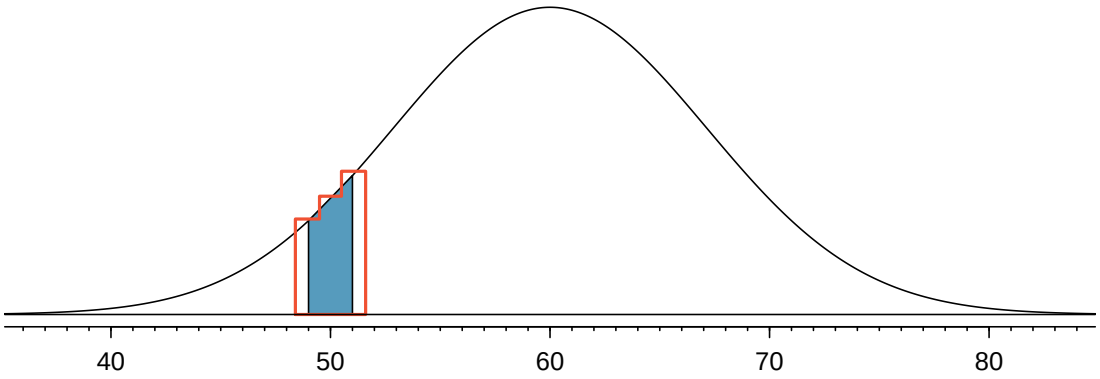
Ushbu farqning sababini 4.10-rasmdan ko‘rish mumkin. Bu yerda binomial ehtimolni ifodalovchi maydon (kontur bilan) va normal yaqinlashuv (soyalangan) ko‘rsatilgan. Normal taqsimot ostidagi maydonning kengligi har ikki tomonda 0,5 birlikka tor ekanligini sezamiz.

BINOMIAL TAQSIMOT UCHUN NORMAL YAQINLASHUVNI YAXSHILASH

Binomial taqsimotning normal yaqinlashuvi odatda qiymatlar oralig‘i uchun to‘xtash nuqtalari biroz o‘zgartirilsa, yaxshilanadi. Soyalanadigan maydonning pastki chekkasi uchun to‘xtash qiymati 0,5 ga kamaytirilishi, yuqori chekkasi uchun esa 0,5 ga oshirilishi kerak.

Normal yaqinlashuvni qo‘llaganda qo‘shimcha maydonni hisoblash bo‘yicha maslahat, kuzatishlar oralig‘ini tahlil qilganda eng foydali bo‘ladi. Yuqoridagi misolda, tuzatilgan normal taqsimot bahosi 0,0633 bo‘lib, aniq qiymat 0,0649 ga ancha yaqinlashadi. Shu bilan birga, bunday tuzatishni quyruq maydonini hisoblashda ham qo‘llash mumkin, ammo odatda tuzatishdan foyda yo‘qoladi, chunki umumiy interval odatda juda keng bo‘ladi.

[30] Avval Z-ko‘rsatkichni hisoblang: $Z = \frac{42-60}{7{,}14} = -2{,}52$. Mos keluvchi chap tomondagi maydon 0,0059.



4.10-rasm. 49 va 51 oralig‘idagi maydonining soyalangan qismi normal yaqinlashuvni aks ettiradi. Qizil kontur esa aniq binomial ehtimolni ifodalaydi.

Mashqlar

4.17 Voyaga yetmaganlarning ichkilik iste’moli, 1-qism. AQSh Sog‘liqni saqlash va inson xizmatlari departamenti (HHS) tarkibidagi moddalarni suiiste’mol qilish va ruhiy salomatlik bo‘yicha xizmatlarni rivojlantirish bilan shug‘ullanuvchi agentlik (SAMHSA) tomonidan yig‘ilgan ma’lumotlarga ko‘ra, 18-20 yoshdagi shaxslarning 69,7% i olingan har qanday yilda alkogolli ichimliklarni iste’mol qilgan.[31]

(a) Tasodifiy ravishda o‘nta 18-20 yoshli shaxsdan iborat tanlanma olindi deb faraz qilaylik. Aynan oltita shaxs alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lish ehtimolini hisoblashda binomial taqsimotdan foydalanish mos keladimi? Izohlang.

(b) Tasodifiy tanlangan 10 ta 18-20 yoshli shaxsdan aynan 6 tasi alkogolli ichimliklarni iste’mol qilgan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(c) 18-20 yoshli shaxslardan o‘ndan to‘rttasi alkogolli ichimliklar iste’mol qilmagan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(d) Tasodifiy tanlangan 5 ta 18-20 yoshli shaxsdan eng ko‘pi bilan 2 tasi alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(e) Tasodifiy tanlangan 5 ta 18-20 yoshli shaxsdan kamida 1 tasi alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

4.18 Chechak, 1-qism. Boston bolalar shifoxonasi ma’lumotlariga ko‘ra, amerikaliklarning 90% i ulg‘ayganida chechak kasalligiga chalingan bo‘lishadi.[32]

(a) Tasodifiy tanlangan 100 nafar amerikalik katta yoshlilar tanlanmasidan aynan 97 tasi bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lish ehtimolini hisoblashda binomial taqsimotdan foydalanish mos keladimi? Izohlang.

(b) Tasodifiy tanlangan 100 nafar amerikalik katta yoshlilar orasidan aynan 97 tasi bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(c) 100 nafar amerikalik katta yoshlilar tanlanmasida aynan 3 tasi bolaligida chechak kasalligiga chalinmagan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(d) Tasodifiy tanlangan 10 nafar amerikalik kattalardan kamida 1 tasi bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(e) Tasodifiy tanlangan 10 nafar amerikalik kattalardan eng ko‘pi bilan 3 tasi bolaligida chechak kasalligiga chalinmagan bo‘lish ehtimolini hisoblang.

4.19 Voyaga yetmaganlarning ichkilik iste’moli, 2-qism. 17-mashqda, olingan har qanday yilda 18-20 yoshli shaxslarning 70% i alkogolli ichimliklar iste’mol qilganini ko‘rib chiqdik. Endi 50 nafar 18-20 yoshli shaxslardan iborat tasodifiy tanlanma olamiz.

(a) Siz qancha odam alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lishini kutasiz? Standart chetlanish qancha bo‘ladi?

(b) Agar 45 yoki undan ko‘p odam alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lsa, bu sizni hayron qoldiradimi?

[31] SAMHSA, Office of Applied Studies, National Survey on Drug Use and Health, 2007 and 2008.
[32] Boston Children’s Hospital, Chickenpox summary page, referenced April 29, 2021.

(c) Ushbu tanlanmadagi 45 yoki undan ko‘p odam alkogolli ichimliklar iste’mol qilgan bo‘lish ehtimolini hisoblang. Bu ehtimol (b) qism javobingiz bilan qanday bog‘liq?

4.20 Chechak, 2-qism. 18-mashqda amerikalik katta yoshlilarning taxminan 90% i ulg‘aygunicha chechak kasalligiga chalinganini ko‘rdik. Endi 120 amerikalik katta yoshlilar tanlanmasi ko‘rib chiqiladi.

(a) Ushbu tanlanma bo‘yicha qancha odam bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lishini kutasiz? Standart chetlanish qancha bo‘ladi?

(b) Agar 105 kishi bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lsa, bu sizni hayron qoldiradimi?

(c) Ushbu tanlanmada 105 yoki undan kam odam bolaligida chechak kasalligiga chalingan bo‘lish ehtimolini hisoblang. Bu ehtimol (b) qism javobingiz bilan qanday bog‘liq?

4.21 Dreydel o‘yini. Dreydel to‘rtta tomoni bo‘lgan aylanadigan o‘yinchoq bo‘lib, uning har bir tomonida ivrit harflari `nun`, `gimel`, `hey` va `shin` yozilgan. Dreydelni aylantirishda har bir tomoni bir xil ehtimollik bilan chiqadi. Tasavvur qiling, siz dreydelni uch marta aylantirdingiz. Quyidagilar ehtimolini hisoblang:

(a) Kamida bitta `nun` chiqishi ehtimoli qancha?

(b) Aynan 2 ta `nun` chiqishi ehtimoli qancha?

(c) Aynan 1 ta `hey` chiqishi ehtimoli qancha?

(d) Eng ko‘pi bilan 2 ta `gimel` chiqishi ehtimoli qancha?



Rasm: Staccabees tomonidan, o‘zgartirilgan (http://flic.kr/p/7gLZTf) CC BY 2.0 license

4.22 Araxnofobiya. Gallup so‘roviga ko‘ra, o‘smirlarning (13 yoshdan 17 yoshgacha) 7% i araxnofobiyadan aziyat chekadi va o‘rgimchaklardan haddan tashqari qo‘rqadi. Yozgi lagerda har bir chodirda 10 nafar o‘smir uxlaydi. Bu 10 nafar o‘smir bir-biridan mustaqil deb faraz qiling.[33]

(a) Kamida bittasi araxnofobiyadan aziyat chekishi ehtimolini hisoblang.

(b) Aynan 2 tasi araxnofobiyadan aziyat chekishi ehtimolini hisoblang.

(c) Eng ko‘pi bilan 1 tasi araxnofobiyadan aziyat chekishi ehtimolini hisoblang.

(d) Agar lager yetakchisi har bir chodirda 1 tadan ko‘p bo‘lmagan o‘smirning o‘rgimchaklardan qo‘rqmasligini ta’minlamoqchi bo‘lsa, u o‘smirlarni chodirlarga tasodifiy joylashtirishi mantiqiymi?

4.23 Ko‘z rangi, 2-qism. 4.13-mashqdagi er-xotin jigarrang ko‘zga ega bo‘lib, ularning farzandlari jigarrang ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,75, ko‘k ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,125 va yashil ko‘zli bo‘lish ehtimoli 0,125 ga teng.

(a) Ularning birinchi farzandi yashil ko‘zli, ikkinchisi esa yashil ko‘zli bo‘lmasligi ehtimoli qancha?

(b) Ikki farzandlaridan faqat bittasining yashil ko‘zli bo‘lish ehtimoli qancha?

(c) Agar ular oltita farzand ko‘rsalar, ulardan aynan ikkitasining yashil ko‘zli bo‘lish ehtimoli qancha?

(d) Agar ular oltita farzand ko‘rsalar, ulardan kamida bittasi yashil ko‘zli bo‘lish ehtimoli qancha?

(e) Yashil ko‘zli birinchi farzand 4−bola bo‘lish ehtimoli qancha?

(f) Agar ulardan faqat 2 tasi jigarrang ko‘zli bo‘lsa, bu odatiy hisoblanadimi?

4.24 O‘roqsimon hujayrali anemiya. O‘roqsimon hujayrali anemiya — bu genetik qon kasalligi bo‘lib, bunda qizil qon hujayralari elastikligini yo‘qotib, g‘ayritabiiy, “o‘roq” shaklini oladi, bu esa turli asoratlar xavfiga olib keladi. Agar ota-ona ushbu kasallik tashuvchisi bo‘lsa, farzandda kasallik rivojlanish ehtimoli 25%, tashuvchi bo‘lish ehtimoli 50% va na kasallik, na tashuvchi bo‘lish ehtimoli 25% ga teng. Agar ushbu kasallik tashuvchisi bo‘lgan ikki ota-ona 3 nafar farzand ko‘rishsa, qanday ehtimollar mavjud:

(a) ularning ikkitasi kasallikka chalinishi ehtimoli?

(b) ularning birortasi ham kasallikka chalinmasligi ehtimoli?

(c) kamida bittasi na kasallik, na tashuvchi bo‘lmasligi ehtimoli?

(d) kasallikka chalingan birinchi farzand 3−bola bo‘lish ehtimoli?

4.25 O‘rin almashtirishlarni o‘rganish. n ta obyektni joylashtirishning usullari sonini $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ ga teng. Ushbu mashq sizni formulani ba’zi maxsus holatlar uchun hosil qilish jarayoni bilan tanishtiradi.

Kichik bir kompaniyada beshta xodim bor. Ular Anna, Ben, Karl, Damian, va Eddi. Kompaniyada qator qilib joylashtirilgan beshta avtoturargoh joyi mavjud bo‘lib, ulardan hech biri ajratilmagan va har kuni xodimlar avtoturargoh joylariga tasodifiy tartibda kelib joylashadilar. Ya’ni, joylardagi mashinalarning barcha mumkin bo‘lgan tartiblari teng ehtimollik bilan yuzaga keladi.

(a) Berilgan kunda xodimlarning alifbo tartibida to‘xtash ehtimoli qanday?

[33] Gallup Poll, What Frightens America’s Youth?, March 29, 2005.

(b) Agar alifbo tartibi barcha boshqa tartiblarga nisbatan teng ehtimollikka ega bo‘lsa, beshta mashinani joylashtirishning nechta usuli bo‘lishi kerak?

(c) Endi 8 nafar xodimlar tanlanmasi ko‘rib chiqilsin. Ushbu 8 xodimning mashinalarini joylashtirishning nechta usuli mavjud?

4.26 O‘g‘il bolalar. Ko‘pincha o‘g‘il yoki qiz farzand ko‘rish ehtimoli bir xil deb hisoblanadi, ammo aslida o‘g‘il bolaga ega bo‘lish ehtimoli bir oz yuqoriroq bo‘lib, 0,51 ga teng. Bir juftlik 3 ta farzand ko‘rishni rejalashtirgan deb faraz qiling.

(a) Binomial modeldan foydalanib, ulardan ikkitasi o‘g‘il bola bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(b) Uchta farzandning ikkitasi o‘g‘il bola bo‘lgan barcha mumkin bo‘lgan tartiblarini yozib chiqing. Ushbu ssenariylardan foydalanib, (a) qismdagi ehtimolni hisoblash uchun birgalikda bo‘lmagan hodisalar qo‘shilishi qoidasidan foydalaning. (a) va (b) qismlaridagi javoblaringiz bir xil ekanligini tasdiqlang.

(c) Agar juftlik 8 ta farzand ko‘rishni rejalashtirgan va ulardan 3 tasi o‘g‘il bo‘lish ehtimolini hisoblash kerak bo‘lsa, qisqacha tushuntiring, nega (b) qismdagi yondashuv (a) qismdagi yondashuvga qaraganda ancha mashaqqatliroq bo‘lar edi.

4.4 Salbiy binomial taqsimot

Geometrik taqsimot n-tajribada birinchi muvaffaqiyatni kuzatish ehtimolini tasvirlaydi. **Salbiy binomial taqsimot** esa umumiyroq. U n-tajribada k-muvaffaqiyatni kuzatish ehtimolini tasvirlaydi.

(M) **4.42-MISOL**

Bir maktabning futbol murabbiyi o‘z yulduzli to‘purari, Brianga har kuni 35 yard (1 yard = 0.9144 metr) masofadan to‘rt marta muvaffaqiyatli tepishidan so‘ng uyga ketishi mumkinligini aytadi. Tasavvur qilaylik, har bir tepish muvaffaqiyatli bo‘lish ehtimoli p ga teng. Agar p kichik bo‘lib, 0,1 ga yaqin bo‘lsa, Brian to‘rtinchi muvaffaqiyatli tepishni amalga oshirishdan oldin ko‘p urinishlar qilishi kerakmi?

Biz to‘rtinchi muvaffaqiyatni ($k = 4$) kutayapmiz. Agar muvaffaqiyat ehtimoli p kichik bo‘lsa, urinishlar soni n katta bo‘lishi mumkin. Bu shuni anglatadiki, Brian $k = 4$ muvaffaqiyatga erishguncha ko‘plab urinishlar qilishi kerak bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, n kichik bo‘lish ehtimoli past.

Salbiy binomial holatni aniqlash uchun to‘rtta shartni tekshiramiz. Birinchi uchta shart binomial taqsimotga xos.

BU SALBIY BINOMIALMI? TO‘RTTA SHARTNI TEKSHIRISH

(1) Tajribalar bog‘liqsizdir.
(2) Har bir tajriba natijasi muvaffaqiyat yoki muvaffaqiyatsizlik sifatida tasniflanadi.
(3) Har bir tajribada muvaffaqiyat ehtimoli p bir xil.
(4) Oxirgi tajriba muvaffaqiyat bo‘lishi kerak.

(Y) **4.43-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tasavvur qiling, Brian o‘z urinishlarida juda mas’uliyatli va har bir 35 yard masofadan zarbani muvaffaqiyatli amalga oshirish ehtimoli $p = 0{,}8$. U to‘rtinchi muvaffaqiyatli zarbasini amalga oshirishdan oldin taxminan nechta urinish qilishi kerak deb o‘ylaysiz?[34]

(M) **4.44-MISOL**

O‘tgan mashg‘ulotda Brian to‘rtinchi zarbasini amalga oshirish uchun atigi 6 ta urinish qildi. Har bir zarba ketma-ketligini yozib chiqing.

Brian to‘rtinchi muvaffaqiyatni 6-urinishda amalga oshirgani sababli, oxirgi zarba muvaffaqiyatli bo‘lganini bilamiz. Birinchi beshta urinish uchta muvaffaqiyatli zarba (`M`) va ikkita xato zarbani (`X`) tashkil qiladi (ularni muvaffaqiyatsizliklar deb belgilaymiz). Ushbu birinchi beshta zarba uchun 10 ta mumkin bo‘lgan ketma-ketlik mavjud, ular 4.11-rasmda ko‘rsatilgan. Agar Brian to‘rtinchi muvaffaqiyatni ($k = 4$) oltinchi urinishda ($n = 6$) amalga oshirgan bo‘lsa, unda uning muvaffaqiyatlari va muvaffaqiyatsizliklari tartibi ushbu 10 ta mumkin bo‘lgan ketma-ketlikdan biri bo‘lishi kerak.

[34] Mumkin bo‘lgan javoblardan biri: u har bir urinishni amalga oshirishi ehtimoli yuqori bo‘lgani uchun kamida 4 ta urinish kerak bo‘ladi, ammo ehtimol 6 yoki 7 tadan oshmasligi mumkin.

	Urinish					
	1	2	3	4	5	6
1	X	X	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
2	X	$\overset{1}{M}$	X	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
3	X	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	X	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
4	X	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	X	$\overset{4}{M}$
5	$\overset{1}{M}$	X	X	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
6	$\overset{1}{M}$	X	$\overset{2}{M}$	X	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
7	$\overset{1}{M}$	X	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	X	$\overset{4}{M}$
8	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	X	X	$\overset{3}{M}$	$\overset{4}{M}$
9	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	X	$\overset{3}{M}$	X	$\overset{4}{M}$
10	$\overset{1}{M}$	$\overset{2}{M}$	$\overset{3}{M}$	X	X	$\overset{4}{M}$

4.11-rasm. To‘rtinchi muvaffaqiyatli zarba oltinchi urinishda amalga oshirilganida 10 ta mumkin bo‘lgan ketma-ketlik.

4.45-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

4.11-rasmdagi har bir ketma-ketlik aniq ikkita muvaffaqiyatsizlik va to‘rtta muvaffaqiyatni o‘z ichiga oladi, bunda oxirgi urinish har doim muvaffaqiyatli bo‘ladi. Agar muvaffaqiyat ehtimoli $p = 0{,}8$ bo‘lsa, birinchi ketma-ketlik ehtimolini toping.[35]

Agar Brianning 35 yard masofadan zarbani muvaffaqiyatli amalga oshirish ehtimoli $p = 0{,}8$ bo‘lsa, to‘rtinchi muvaffaqiyatli zarbani amalga oshirish uchun Brianning aniq oltita urinish qilishi ehtimoli qanday? Buni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}&P(\text{Brian to‘rt marta muvaffaqiyatli zarba berishi uchun oltita urinish qilishi kerak bo‘ladi}) =\\ &= P(\text{Brian dastlabki beshta urinishdan uchtasini muvaffaqiyatli amalga oshiradi va oltinchisini amalga oshiradi}) =\\ &= P(1\text{−ketma-ketlik YOKI } 2\text{−ketma-ketlik YOKI ... YOKI } 10\text{−ketma-ketlik}).\end{aligned}$$

Bu erda ketma-ketliklar 4.11-rasmdan olingan. Ushbu so‘nggi ehtimolni o‘nta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan ehtimollar yig‘indisiga bo‘lishimiz mumkin:

$$\begin{aligned}&P(1\text{−ketma-ketlik YOKI } 2\text{−ketma-ketlik YOKI ... YOKI } 10\text{−ketma-ketlik}) =\\ &= P(1\text{− ketma-ketlik}) + P(2\text{−ketma-ketlik}) + \cdots + P(10\text{−ketma-ketlik}) \ .\end{aligned}$$

Birinchi ketma-ketlik ehtimoli 4.45-yo‘naltirilgan mahqda 0,0164 sifatida aniqlangan va boshqa ketma-ketliklar ham bir xil ehtimolga ega. Har bir o‘nta ketma-ketlikning ehtimoli bir xil bo‘lganligi sababli, umumiy ehtimol bitta ketma-ketlik ehtimoli o‘nga ko‘paytiriladi.

Ushbu salbiy binomial ehtimolni hisoblash usuli 4.3-bo‘limda da binomial masalalarni qanday hal qilganimizga o‘xshaydi. Ehtimol ikki qismga bo‘linadi:

$$\begin{aligned}&P(\text{Brian to‘rt marta muvaffaqiyatli zarba berishi uchun oltita urinish qilishi kerak bo‘ladi}) =\\ &= [\text{Mumkin bo‘lgan ketma-ketliklar soni}] \times P(\text{Bitta ketma-ketlik}) \ .\end{aligned}$$

Har bir qism alohida ko‘rib chiqiladi, so‘ngra yakuniy natijani olish uchun ko‘paytiriladi.

Avvalo, bitta ketma-ketlik ehtimolini aniqlaymiz. Aniq bir holatda barcha muvaffaqiyatsizliklarni $(n-k)$ kuzatib, ularni muvaffaqiyatlarga (k) birlashtiramiz

$$P(\text{Bitta ketma-ketlik}) = P(n-k \text{ ta muvaffaqiyatsizliklar va keyin } k \text{ ta muvaffaqiyat}) = (1-p)^{n-k}p^k \ .$$

Umumiy holat uchun ketma-ketliklar sonini aniqlashimiz kerak. Yuqorida, to‘rtinchi muvaffaqiyat oltinchi urinishda amalga oshirilgan o‘nta ketma-ketlik keltirilgan edi. Ushbu ketma-ketliklar oxirgi kuzatishni muvaffaqiyat sifatida belgilash va boshqa kuzatishlarni tartibga solishning barcha usullarini topish orqali aniqlangan edi. Boshqacha qilib aytganda, $k-1$ muvaffaqiyatni $n-1$ urinishda qanday tartibda joylashtirish mumkinligini hisoblash kerak. Bu n tadan k tani tanlash koeffitsiyenti formulasi orqali topiladi.

[35] Birinchi ketma-ketlik: $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}8 = 0{,}0164$.

Lekin $n-1$ va $k-1$ uchun hisoblanadi:

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,((n-1)-(k-1))!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\ .$$

Bu $n-1$ ta urinishda $k-1$ ta muvaffaqiyat va $n-k$ ta muvaffaqiyatsizlikni tartibga solishning turli xil usullari sonidir. Agar faktorial belgisi (undov belgisi) bilan tanish bo‘lmasangiz, 143-betga qarang.

SALBIY BINOMIAL TAQSIMOT

Salbiy binomial taqsimot $k-$muvaffaqiyatni $n-$urinishda kuzatish ehtimolini tasvirlaydi, bunda barcha urinishlar bog‘liqsizdir:

$$P(k-\text{muvaffaqiyat } n-\text{urinishda}) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}\ .$$

Bu yerda p har bir alohida urinishlarning muvaffaqiyatli bo‘lish ehtimolini ifodalaydi.

4.46-MISOL

Salbiy binomial taqsimot formulasidan foydalanib, Brianning to‘rtinchi muvaffaqiyatli zarbasi oltinchi urinishda amalga oshishi ehtimoli 0,164 ekanligini ko‘rsating.

Muvaffaqiyat ehtimoli $p = 0{,}8$, muvaffaqiyatlar soni $k = 4$, va ushbu holatda zarur urinishlar soni $n = 6$.

$$\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \frac{5!}{3!2!}(0{,}8)^4(0{,}2)^2 \;=\; 10 \times 0{,}0164 \;=\; 0{,}164\ .$$

4.47-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Salbiy binomial taqsimot Brianning har bir zarba urinishini bog‘liqsiz deb hisoblashni talab qiladi. Sizningcha, Brianning har bir urinishini bog‘liqsiz deb hisoblash mantiqiymi?[36]

4.48-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Brianning urinishlari bog‘liqsiz deb faraz qilaylik. Brianning to‘rtinchi muvaffaqiyatli zarbasi beshta urinish ichida amalga oshishi ehtimoli qanday?[37]

BINOMIAL VA SALBIY BINOMIAL TAQSIMOT

Binomial holatda odatda tajribalar soni belgilangan bo‘ladi va biz muvaffaqiyatlar sonini ko‘rib chiqamiz. Salbiy binomial holatda esa, belgilangan muvaffaqiyatlar sonini kuzatish uchun nechta tajriba talab qilinishini o‘rganamiz va oxirgi kuzatish muvaffaqiyat bo‘lishini talab qilamiz.

4.49-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Kunlarning 70% ida shifoxonaga kamida bitta yurak xuruji bilan bemor yotqiziladi. Kunlarning 30% ida esa yurak xuruji bilan hech qanday bemor qabul qilinmaydi. Quyidagi har bir holatni binomial yoki salbiy binomial deb aniqlang va ehtimolni hisoblang:[38]

(a) Ushbu hafta shifoxonada aynan uch kun yurak xuruji bilan bemor qabul qilinishi ehtimoli qanday?

(b) Yurak xuruji bilan bemor qabul qilingan ikkinchi kun haftaning to‘rtinchi kuni bo‘lish ehtimoli qanday?

(c) Kelgusi oyda yurak xuruji bilan bemor qabul qilingan birinchi kun haftaning beshinchi kuni bo‘lish ehtimoli qanday?

[36] Javoblar har xil bo‘lishi mumkin. Biz ularning bog‘liq yoki bog‘liqsizligini aniq ayta olmaymiz. Biroq, sportchi ko‘rsatkichlari bo‘yicha ko‘plab statistik sharhlar bunday urinishlarning deyarli bog‘liqsiz ekanligini taklif qiladi.

[37] Agar to‘rtinchi zarba ($k = 4$) beshta urinish ichida amalga oshsa, u holda bu holat unga to‘rt yoki beshta urinishni talab qilgan ($n = 4$ yoki $n = 5$). Biz ilgari $p = 0{,}8$ ni hisobga olgan edik. Salbiy binomial taqsimotdan foydalanib, $n = 4$ va $n = 5$ uchun ehtimollarni hisoblang, keyin ularni qo‘shing:

$$P(n = 4 \text{ yoki } n = 5) = P(n = 4) + P(n = 5) =$$
$$= \binom{4-1}{4-1} 0{,}8^4 + \binom{5-1}{4-1}(0{,}8)^4(1-0{,}8) = 1 \times 0{,}41 + 4 \times 0{,}082 = 0{,}41 + 0{,}33 = 0{,}74\ .$$

Mashqlar

4.27 Kubning tashlanishi. Quyidagi ehtimollarni hisoblang va har bir holatda qaysi ehtimollik taqsimoti modeli mos kelishini aniqlang. Siz kubning simmetrikligini (adolatli) bilasiz va uni 5 marta tashlaysiz. Quyidagilar ehtimolini hisoblang:

(a) Birinchi 6 beshinchi tashlashda chiqishi ehtimoli qancha?

(b) Aynan uchta 6 chiqishi ehtimoli qancha?

(c) Uchinchi 6 beshinchi tashlashda chiqishi ehtimoli qancha?

4.28 Dart o'ynash. Quyidagi ehtimollarni hisoblang va har bir holatda qaysi ehtimollik taqsimoti modeli mos kelishini aniqlang. Juda yaxshi o'yinchi dart (nishonga kichik ignalar otib o'ynaladigan o'yin) doskasining markazidagi qizil doiraga (bullseye) 65% ehtimol bilan tegishi mumkin. Quyidagilar ehtimolini hisoblang:

(a) 15−otishda o'nta to'g'ri urishning 10−si sodir bo'lish ehtimoli qancha?

(b) 15 marta otishda 10 marta bullseye urish ehtimoli qancha?

(c) Birinchi marta bullseye urish uchinchi otishda sodir bo'lish ehtimoli qancha?

4.29 Maktabda tanlash. Sotsiologiya fanidan loyiha ishi uchun sizga maktabingizdagi 20 talabadan so'rovnoma o'tkazish topshirildi. Kechki ovqatdan keyin yotoqxonangiz oshxonasidan chiqib ketayotgan 20 nafar talabadan tasodifiy tanlanma olishga qaror qildingiz. Yotoqxonangiz aholisi 45% erkaklar va 55% ayollardan iborat.

(a) So'rovnomadagi 4−shaxs 2−ayol bo'lish ehtimolini hisoblash uchun qaysi ehtimollik modeli mos keladi? Tushuntiring.

(b) (a) qismdagi ehtimolni hisoblang.

(c) So'rovnomadagi 4−shaxs 2−ayol bo'lishiga olib keladigan uchta ssenariy quyidagilardir:

$$\{E, E, A, A\}, \{E, A, E, A\}, \{A, E, E, A\}.$$

Ushbu ssenariylardagi umumiy jihat shundaki, oxirgi urinish har doim ayol bo'ladi. Birinchi uchta urinishda 2 ta erkak va 1 ta ayol bor. 2 ta erkak va 1 ta ayolni joylashtirishning 3 ta usulini binomial koeffitsient yordamida tasdiqlang.

(d) (c) qismdagi topilganlardan foydalanib, nima uchun salbiy binomial koeffitsienti uchun formula $\binom{n-1}{k-1}$ binomial koeffitsienti uchun formula $\binom{n}{k}$ ekanligini tushuntiring.

4.30 Voleybolda zarba berish. Tajribasi kam bo'lgan voleybolchi to'pni to'rdan oshirib, raqib maydoniga tushirishi 15% ehtimolga ega. Faraz qilaylik, uning har bir urinishlari bir-biriga bog'liqsiz.

(a) 10−urinishda uning 3−muvaffaqiyatli zarba berish ehtimoli qanday?

(b) Agar u 9 ta urinishda 2 marta muvaffaqiyatli zarba bergan bo'lsa, 10−zarbasining muvaffaqiyatli bo'lish ehtimoli qanday?

(c) (a) va (b) qismlar bir xil senariylarni muhokama qilgan bo'lsa-da, hisoblangan ehtimollar har xil bo'lishi kerak. Ushbu tafovut sababini tushuntira olasizmi?

4.5 Puasson taqsimoti

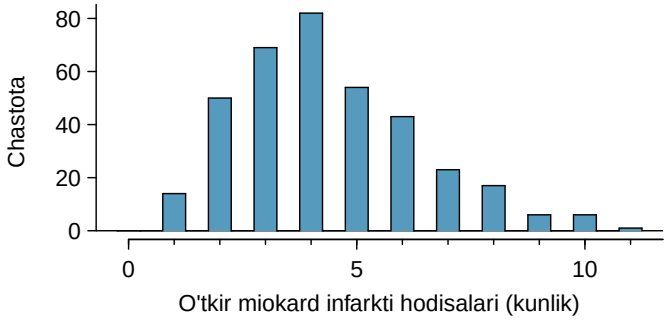
Ⓜ **4.50-MISOL**

Nyu-York shahrida taxminan 8 million odam bor. Har kuni nechta odam o'tkir miokard infarkti (O'MI), ya'ni yurak xuruji bilan kasalxonaga yotqizilishi mumkin deb o'ylaysiz? Tarixiy ma'lumotlarga ko'ra, o'rtacha ko'rsatkich taxminan 4,4 kishidan iborat. Ammo, biz shuningdek, taxminiy taqsimot ko'rinishini ham bilishni xohlaymiz. Agar har kuni hisob-kitob qilib, bir yil davomida kunlik sonlarni qayd etsak,

[38] Har bir qismda $p = 0{,}7$. (a) Kunlar soni belgilangan, shuning uchun bu binomial taqsimot. Parametrlar $k = 3$ va $n = 7$: 0,097. (b) Oxirgi "muvaffaqiyat" (yurak xuruji bilan bemorni qabul qilish) oxirgi kunga bog'liq, shuning uchun salbiy binomial taqsimotni qo'llashimiz kerak. Parametrlar $k = 2$, $n = 4$: 0,132. (c) Bu muammo salbiy binomial taqsimot bo'lib, $k = 1$ va $n = 5$: 0,006. E'tibor bering, $k = 1$ bo'lgan salbiy binomial holat geometrik taqsimotdan foydalanishga teng.

O‘MI holatlarining histogrammasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

NYC uchun 365 kun davomida O‘MI holatlarining soni histogrammasi 4.12-rasmda ko‘rsatilgan.[39] Tanlanmaning o‘rtacha qiymati (4,38) tarixiy o‘rtacha ko‘rsatkich (4,4) ga o‘xshash. Tanlanmaning standart chetlanishi taxminan 2 ga teng va histogram shuni ko‘rsatadiki, ma’lumotlarning taxminan 70% i 2,4 va 6,4 oralig‘ida joylashgan. Taqsimot shakli bir tepalik va o‘ngga qiyshaygan.



4.12-rasm. NYC da 365 alohida kun davomida O‘MI holatlarining soni histogrammasi.

Puasson taqsimot odatda katta bosh to‘plamda bir vaqt birligida sodir bo‘ladigan voqealar sonini baholashda foydali hisoblanadi. Masalan, quyidagi voqealarni ko‘rib chiqamiz:

- yurak xuruji sodir bo‘lishi,
- turmush qurish,
- chaqmoq urishi.

Agar bosh to‘plamdagi shaxslar bog‘liqsiz bo‘lsa, Puasson taqsimoti bunday voqealarning kun davomida sodir bo‘lish sonini tasvirlashga yordam beradi. Puasson taqsimotini vaqtning boshqa birligida, masalan, soat yoki hafta davomida qo‘llash mumkin.

4.12-rasmdagi histogramma 4,4 ga teng bo‘lgan tezlik bilan Puasson taqsimotini taxmin qiladi. Puasson taqsimoti uchun **tezlik** vaqt birligi uchun asosan belgilangan bosh to‘plamda voqealarning o‘rtacha sonini anglatadi. Masalan, 4.50-misoldagi vaqt birligi – kun, bosh to‘plam esa Nyu-York shahri aholisi va tarixiy tezlik 4,4 ga teng. Puasson taqsimotidagi parametr – bu tezlik, ya’ni biz kuzatadigan voqealar soni va u odatda λ (yunoncha harf *lambda*) yoki μ bilan belgilanadi. Tezlikdan foydalanib, bir vaqt birligi ichida aynan k ta voqeani kuzatish ehtimolini tasvirlashimiz mumkin.

PUASSON TAQSIMOTI

Aytaylik, biz voqealarni kuzatmoqdamiz va kuzatilgan voqealar soni λ tezlik bilan Puasson taqsimotiga amal qiladi. Unda

$$P(k \text{ ta voqeani kuzatish}) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

bu yerda k 0, 1, 2 va hokazo qiymatlarni olishi mumkin va $k!$ k-faktorialni anglatadi, 143-betda tasvirlanganidek. Harf $e \approx 2{,}718$ natural logarifm asosidir. Ushbu taqsimotning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishi mos ravishda λ va $\sqrt{\lambda}$ ga teng.

Puasson taqsimoti uchun qat’iy shartlarni keyingi kursga qoldiramiz. Ammo, Puasson modelining mos kelishini dastlabki baholash uchun bir nechta oddiy ko‘rsatmalarni taklif qilamiz.

Agar biz voqealar sonini izlayotgan bo‘lsak, bunday voqealarni keltirib chiqaradigan bosh to‘plam katta bo‘lsa va voqealar bir-biridan bog‘liqsiz sodir bo‘lsa, tasodifiy o‘zgaruvchi Puasson taqsimotiga amal qilishi mumkin.

Hatto voqealar aslida bog‘liqsiz bo‘lmasa ham – masalan, shanba va yakshanba kunlari to‘ylar alohida mashhur bo‘lsa – ba’zida Puasson modeli hali ham mantiqiy bo‘lishi mumkin, agar turli vaqtlar uchun har xil tezlik foydalanishga ruxsat berilsa. To‘y misolida, hafta kunlariga qaraganda dam olish kunlari tezlik yuqoriroq bo‘lar edi. Puasson taqsimoti uchun tezliklarni hafta kuniga o‘xshash ikkinchi o‘zgaruvchiga qarab modellashtirish g‘oyasi **umumlashgan chiziqli modellar** sohasiga kiruvchi ba’zi ilg‘or usullar asosini tashkil etadi. 8- va 9-boblarda chiziqli modellar asosini muhokama qilamiz.

[39] Ushbu ma’lumotlar simulyatsiya qilingan. Amalda, ketma-ket kunlar orasida bog‘liqlikni tekshirish kerak bo‘ladi.

Mashqlar

4.31 Qahvaxonadagi mijozlar. Bir qahvaxona ertalabki ish vaqtida har soatda o‘rtacha 75 nafar mijozga xizmat qiladi.

(a) Ushbu vaqtda bir soat ichida qancha mijoz kelishini hisoblash uchun o‘rganilgan qaysi taqsimot eng mos keladi?

(b) Ushbu vaqt davomida qahvaxonada bir soatda xizmat qilinadigan mijozlar sonining o‘rtacha qiymati va standart chetlanishini toping.

(c) Agar ushbu qahvaxonaga ushbu vaqtda bir soat ichida faqat 60 nafar mijoz kelgan bo‘lsa, bu noodatiy kam natija deb hisoblanadimi?

(d) Ushbu vaqt davomida qahvaxona bir soatda 70 mijozga xizmat qilish ehtimolini hisoblang.

4.32 Stenograf xatolari. Yuqori malakali sud stenografi bir soatda o‘rtacha bitta yozuv xatosi (typo) qiladi.

(a) Ushbu stenografning bir soat ichida qilgan yozuv xatolari sonini hisoblash uchun qaysi ehtimollik taqsimoti eng mos keladi?

(b) Ushbu stenografning xatolari sonining o‘rtacha qiymati va standart chetlanishini toping.

(c) Agar ushbu stenograf bir soat ichida 4 ta yozuv xatosi qilgan bo‘lsa, bu noodatiy holat deb hisoblanadimi?

(d) Ushbu stenograf bir soat ichida 2 yoki undan kamroq yozuv xatosi qilish ehtimolini hisoblang.

4.33 Avtoturargohdagi mashinalar soni? Dushanbadan payshanbagacha bayram kunlari bo‘lmaganda, har kuni tushdan keyin soat 2 dan 3 gacha bir chakana sotuvchi avtoturargohiga o‘rtacha 6,5 ta mashina tashrif buyuradi. Har kuni keladigan mashinalar soni Puasson taqsimotiga amal qiladi.

(a) Keyingi dushanba kuni aynan 5 ta mashina kelish ehtimoli qanday?

(b) Keyingi dushanba kuni tushdan keyin 2 dan 3 gacha 0, 1 yoki 2 ta mashina kelish ehtimoli qanday?

(c) Shu vaqtda avtomobillardan keladigan tashrifchilar soni o‘rtacha 11,7 ni tashkil etadi. Ushbu vaqtda avtomobil tashrifchilari soni ham Puasson taqsimotiga amal qiladi, deb hisoblash mumkinmi? Tushuntiring.

4.34 Yo‘qolgan bagajlar. Ba’zida aviakompaniya yo‘lovchi bagajini yo‘qotishi mumkin. Faraz qilaylik, kichik bir aviakompaniya har ish kunida yo‘qotilgan bagajlar sonini Puasson modeli bilan o‘rtacha 2,2 ta bagaj bo‘yicha aniqlaydi.

(a) Keyingi dushanba kuni aviakompaniya birorta ham bagaj yo‘qotmaslik ehtimolini hisoblang.

(b) Keyingi dushanba kuni aviakompaniya 0, 1 yoki 2 ta bagaj yo‘qotish ehtimolini hisoblang.

(c) Faraz qilaylik, keyingi 3 yil davomida aviakompaniya o‘z faoliyatini kengaytirib, amalga oshiradigan parvozlar sonini ikki barobar oshiradi. Aviakompaniya rahbari sizdan 2,2 o‘rtacha qiymat bilan Puasson modelidan foydalanishni davom ettirish maqsadga muvofiqligini so‘radi. Qanday tavsiya berasiz? Tushuntiring.

Bob bo‘yicha mashqlar

4.35 Ruletka yutuqlari. Ruletka o‘yinida g‘ildirak aylantiriladi va siz u to‘xtaydigan joyga garov tikasiz. Mashhur garovlardan biri – u qizil uyaga to‘xtashiga garov tikishdir; bunday garovning yutish ehtimoli 18/38. Agar u qizil uyaga to‘xtasa, tikkan pulingizni ikki barobar yutib olasiz. Aks holda, tikkan pulingizni yo‘qotasiz. Faraz qilaylik, siz har biri \$1 miqdorida 3 marta o‘ynaysiz. Y o‘zgaruvchisi umumiy yutgan yoki yo‘qotgan summani ifodalaydi. Y uchun ehtimollik modelini yozing.

4.36 I-5 avtoyo‘lida tezlik, 1-qism. Kaliforniyadagi Interstate 5 (I-5) avtoyo‘lida yo‘lovchi transport vositalari tezliklari taqsimoti o‘rtacha 72,6 milya/soat va standart chetlanishi 4,78 milya/soat bo‘lgan deyarli normal taqsimotga amal qiladi.[40]

(a) Yo‘lovchi transport vositalarining qancha foizi 80 milya/soatdan sekinroq harakat qiladi?

(b) Yo‘lovchi transport vositalarining qancha foizi 60 va 80 milya/soat orasida harakat qiladi?

[40] S. Johnson and D. Murray. “Empirical Analysis of Truck and Automobile Speeds on Rural Interstates: Impact of Posted Speed Limits”. In: *Transportation Research Board 89th Annual Meeting*. 2010.

(c) Eng tez 5% yo‘lovchi transport vositalari qanday tezlikda harakat qiladi?

(d) I-5 yo‘lida tezlik chegarasi 70 milya/soat. Ushbu yo‘lda tezlik chegarasidan yuqori tezlikda harakat qiladigan transport vositalarining taxminiy foizini hisoblang.

4.37 Universitetga qabul qilish. Faraz qilaylik, bir universitet keyingi yilning birinchi kurs talabalari uchun 2,500 nafar talabani qabul qilganini e’lon qildi. Ammo universitetning faqat 1,786 nafar birinchi kurs talabalari uchun yotoqxona joylari bor. Agar qabul qilingan talabaning 70% universitet taklifini qabul qilishi ehtimoli mavjud bo‘lsa, universitetda yotoqxona joylari yetishmasligi ehtimoli qancha?

4.38 I-5 avtoyo‘lida tezlik, 2-qism. 4.36-mashqda aytilganidek, Kaliforniyadagi Interstate 5 (I-5) avtoyo‘lida transport vositalari tezliklari taqsimoti o‘rtacha 72,6 milya/soat va standart chetlanishi 4,78 milya/soat bo‘lgan deyarli normal taqsimotga amal qiladi. Ushbu yo‘lning tezlik chegarasi 70 milya/soat.

(a) Avtoyo‘l patrul xodimi yo‘lning bir chetida yashiringan. 5 ta avtomobil o‘tib ketishi va ularning hech biri tezlikni oshirmasligi ehtimoli qanday? Avtomobillarning tezliklari bir-biriga bog‘liqsiz deb faraz qiling.

(b) Patrul xodimi o‘rtacha qancha avtomobilni kuzatishi kutiladi, toki birinchi tezlikni oshirgan avtomobilni ko‘rmaguncha? Birinchi tezlikni oshirgan avtomobilgacha kuzatiladigan avtomobillar sonining standart chetlanishi qancha?

4.39 Avtomobil sug‘urta mukofotlari. Bir gazeta maqolasida Kaliforniya aholisi uchun avtomobil sug‘urtasi mukofotlari taqsimoti o‘rtacha $1650 ga teng va taxminan normal taqsimotga amal qiladi, deb aytilgan. Bundan tashqari, Kaliforniya aholisi orasida 25% odam $1800 dan ko‘proq to‘laydi, deb qayd etilgan.

(a) Standart normal taqsimotning yuqori 25% (yoki 75^{chi} foizlik) ga mos keladigan Z-skori qanday?

(b) Sug‘urta narxining o‘rtacha qiymati qanday? 75^{chi} foizlik uchun chegarani aniqlang.

(c) Kaliforniyadagi sug‘urta mukofotlarining standart chetlanishini aniqlang.

4.40 SAT ballari. SAT ballari (1600 dan) o‘rtacha 1100 va standart chetlanishi 200 bo‘lgan normal taqsimotga ega. Faraz qilaylik, maktab kengashi SATda kamida 1350 ball to‘plagan barcha o‘quvchilarga mukofot sertifikati beradi va ushbu tan olingan o‘quvchilardan birini tasodifiy tanlaymiz. Ushbu o‘quvchining 1500 yoki undan yuqori ball olish ehtimoli qanday? (Bu savol uchun 3.2-bo‘limidagi shartli ehtimollik materialidan foydalanish foydali bo‘ladi.)

4.41 Turmush qurgan ayollar. Amerika Jamiyat Tadqiqotlari (ACS) ma’lumotlariga ko‘ra, 15 yoshdan katta bo‘lgan ayollarning 47,1% turmush qurgan.[41]

(a) 15 yoshdan katta uch ayolni tasodifiy tanlasak, uchinchi tanlangan ayolning yagona turmush qurgan bo‘lish ehtimoli qanday?

(b) Uchta tasodifiy tanlangan ayolning barchasi turmush qurgan bo‘lish ehtimoli qanday?

(c) Turmush qurgan ayolni tanlash uchun o‘rtacha qancha ayolni tanlash kerak bo‘ladi? Standart chetlanishi qancha?

(d) Agar turmush qurgan ayollarning ulushi aslida 30% bo‘lsa, turmush qurgan ayolni tanlash uchun o‘rtacha qancha ayolni tanlash kerak bo‘ladi? Standart chetlanishi qancha?

(e) (c) va (d) qismlardagi javoblaringizga asoslanib, voqea ehtimolini kamaytirish muvaffaqiyatgacha bo‘lgan kutish vaqtining o‘rtacha qiymati va standart chetlanishiga qanday ta’sir qiladi?

4.42 So‘rovnoma javoblari darajasi. Pew tadqiqotlariga ko‘ra, ularning so‘rovnomalariga odatiy javob darajasi atigi 9% ni tashkil etadi. Agar bir so‘rovnoma uchun 15000 xonadon bilan bog‘lanilsa, kamida 1500 tasi javob berishi ehtimoli qanday?[42]

4.43 Og‘ir yuk. Aviakompaniya yo‘lovchilari tomonidan tekshiriladigan yuklarning vazni o‘rtacha 45 funt va standart chetlanishi 3.2 funt bo‘lgan deyarli normal taqsimotga ega. Ko‘pgina aviakompaniyalar 50 funtdan ortiq vaznli yuklar uchun qo‘shimcha haq olishadi. Aviakompaniya yo‘lovchilarining necha foizi ushbu qo‘shimcha to‘lovni to‘lashadi?

4.44 10 yoshli bolalar bo‘ylari, 1-qism. 10 yoshli bolalarning bo‘ylari, jinsidan qat’i nazar, o‘rtacha 55 dyuym va standart chetlanishi 6 dyuym bo‘lgan normal taqsimotga amal qiladi.

(a) Tasodifiy tanlangan 10 yoshli bolaning bo‘yi 48 dyuymdan past bo‘lish ehtimoli qanday?

(b) Tasodifiy tanlangan 10 yoshli bolaning bo‘yi 60 va 65 dyuym orasida bo‘lish ehtimoli qanday?

[41] U.S. Census Bureau, 2010 American Community Survey, Marital Status.

[42] Pew Research Center, Assessing the Representativeness of Public Opinion Surveys, May 15, 2012.

(c) Agar sinfning eng uzun 10% “juda baland” deb hisoblansa, “juda baland” bo‘lish uchun bo‘y chegarasi qanday?

4.45 Ebayda kitob xarid qilish. Tasavvur qiling, siz qimmat kimyo darsligingizni Ebay orqali sotib olmoqchisiz. O‘tgan savdolarga qaraganda, ushbu darslik narxlari o‘rtacha $89 va standart chetlanishi $15 bo‘lgan deyarli normal taqsimotga ega.

(a) Tasodifiy tanlangan savdoning $100 dan yuqori narxda yakunlanish ehtimoli qanday?

(b) Ebay sizga maksimal taklif narxini belgilash imkonini beradi. Agar kimdir sizdan yuqori narx taklif qilsa, belgilangan maksimal narxingizga qadar avtomatik tarzda yangi taklif beriladi. Agar siz faqat bitta savdoda qatnashsangiz, taklif narxini juda yuqori yoki juda past belgilashning afzalliklari va kamchiliklari qanday? Agar bir nechta savdolarda qatnashsangiz-chi?

(c) Agar siz 10 ta savdoni kuzatib borsangiz, ushbu savdolardan birida yutish uchun maksimal taklifning qaysi taxminiy foizligini tanlash kerak bo‘ladi? Savdoda g‘olib bo‘lishni kafolatlaydigan chegara nuqtasini aniqlash mumkinmi?

(d) Agar siz 10 ta savdoni kuzatishga tayyor bo‘lsangiz, ushbu kitoblardan birini xarid qilish uchun maksimal taklif sifatida qanday narxni belgilash kerak bo‘ladi?

4.46 10 yoshli bolalarning bo‘ylari, 2-qism. 10 yoshli bolalarning bo‘ylari, jinsidan qat’iy nazar, o‘rtacha 55 dyuym va standart chetlanishi 6 dyuym bo‘lgan normal taqsimotga amal qiladi.

(a) “Six Flags Magic Mountain” parkidagi *Batman the Ride* attraksioniga chiqish uchun bo‘y talabi 54 dyuymni tashkil etadi. 10 yoshli bolalarning necha foizi ushbu attraksionga chiqa olmaydi?

(b) To‘rtta 10 yoshli bola bor deb faraz qilamiz. Ulardan kamida ikkitasining ushbu attraksionga chiqish ehtimoli qanday?

(c) Agar siz parka kirayotgan odamlarni sanayotgan bo‘lsangiz, uchinchi kirgan bola ushbu attraksionga chiqishga qodir birinchi bola bo‘lish ehtimoli qanday?

(d) Agar beshinchi 10 yoshli bola ushbu attraksionga chiqishga qodir bo‘lsa, u parkka kirgan 12-bola bo‘lish ehtimoli qanday?

4.47 10 yoshli bolalarning bo‘ylari, 3-qism. 10 yoshli bolalarning bo‘ylari, jinsidan qat’iy nazar, o‘rtacha 55 dyuym va standart chetlanishi 6 dyuym bo‘lgan normal taqsimotga amal qiladi.

(a) 10 yoshli bolalarning qanday qismi 76 dyuymdan baland bo‘ladi?

(b) Agar bir kunda “Six Flags Magic Mountain” parkiga 2000 ta 10 yoshli bola kirsa, ulardan nechtasi kamida 76 dyuym bo‘lishini kutish mumkin? (10 yoshli bolalarning bo‘ylari bog‘liqsiz deb hisoblanadi.)

(c) Binomial taqsimotdan foydalanib, 2000 ta bola orasida 76 dyuymdan baland bo‘lgan bolalarning 0 ta bo‘lish ehtimolini hisoblang.

(d) “Six Flags Magic Mountain” parkiga kirgan va bo‘yi 76 dyuym yoki undan baland bo‘lgan 10 yoshli bolalar soni, (b) bandidagi qiymat bilan o‘rtacha Puasson taqsimotiga amal qiladi. Puasson taqsimotidan foydalanib, 76 dyuym yoki undan baland bola kirish ehtimolini aniqlang.

4.48 Testdagi bir tanlovli savollar. Bir tanlovli testda 5 ta savol mavjud bo‘lib, har bir savolda 4 ta javob varianti (a, b, c, d) bor. Robin testga tayyorlanmagan va javoblarni tasodifiy taxmin qiladi. Quyidagilarni hisoblang:

(a) Robin birinchi to‘g‘ri javobni 3− savolda olish ehtimoli qanday?

(b) U aniq 3 yoki aniq 4 savolga to‘g‘ri javob berish ehtimoli qanday?

(c) U savollarning aksariyatiga to‘g‘ri javob beradimi?

5-BOB

Xulosa chiqarish asoslari

5.1 Nuqtaviy baholash va tanlanma o‘zgaruvchanligi

5.2 Nisbat uchun ishonch intervali

5.3 Nisbat uchun gipotezalar tekshiruvi

Statistik xulosa chiqarish asosan parametr baholarining noaniqligini tushunish va uni miqdoriy baholash bilan bog‘liq. Sharoitga qarab tenglamalar va tafsilotlar o‘zgarsa ham, statistikadagi barcha xulosa chiqarish asoslari bir xil bo‘lib qoladi.

Biz tanish bir mavzudan boshlaymiz. Tanlanma ulushi yordamida bosh to‘plam ulushini baholash g‘oyasi. Keyin, biz *ishonch intervali* deb ataladigan diapazonni yaratamiz haqiqiy bosh to’plami joylashishi mumkin bo’lgan, bu biz haqiqiy bosh to‘plam qiymatini topishimiz mumkin bo‘lgan ehtimolli qiymatlar oralig‘idir. Nihoyat, biz *gipotezani tekshirish tizimi*ni kiritamiz, bu bosh to‘plam haqida da’volarni rasmiy baholashga imkon beradi, masalan, bir so‘rov biror nomzodning saylovchilar ko‘pchiligi tomonidan qo‘llab-quvvatlanishini kuchli dalil bilan ko‘rsatadimi yoki yo‘qmi.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

5.1 Nuqtaviy baholash va tanlanma o‘zgaruvchanligi

“Pew Research” (Pew Research Center — AQShda joylashgan, notijorat va siyosiy jihatdan betaraf tadqiqot markazi) kabi kompaniyalar ko‘pincha jamoatchilik fikri yoki ko‘plab mavzular, jumladan, siyosat, ilmiy tushuncha, brendni tanish va boshqa ko‘p narsalar bo‘yicha bilim darajasini tushunish uchun so‘rovlar o‘tkazadi. So‘rov o‘tkazishning asosiy maqsadi odatda javoblardan kengroq aholi fikri yoki bilim darajasini baholash uchun foydalanishdan iborat.

5.1.1 Nuqtaviy baholar va xatolar

Faraz qilaylik, bir so‘rov AQSh prezidentining ma’qullash reytingi 45% ekanligini taklif qildi. Biz 45% ni umumiy aholi fikrini baholash uchun **nuqtaviy baho** deb hisoblaymiz. Umumiy aholi fikridan olingan ushbu ulush odatda qiziqish **parametr**i deb ataladi. Parametr ulushni ifodalayotgan bo‘lsa, ko‘pincha p bilan belgilanadi va tanlanmadagi ulush esa $\hat{p}$ (p-*hat*, p-shlyapali deb o‘qiladi[1]). Agar biz aholi ichidagi har bir kishidan javob olmasak, p noma’lum bo‘lib qoladi va biz p ni baholash uchun $\hat{p}$ dan foydalanamiz. So‘rovdan olingan natijalar va parametr o‘rtasidagi farq **baholashdagi xatolik** deb ataladi. Odatda, xatolik ikkita tanlanma xatolik va tarafkashlik kabilardan iborat.

Tanlanma xatolik, ba’zan *tanlanmadagi noaniqlik* deb ham ataladi, bir tanlanmadan ikkinchisiga baho qancha o‘zgarishini tasvirlaydi. Masalan, bir tanlanmadan olingan baho 1% ga past bo‘lishi, boshqasida esa 3% ga yuqori bo‘lishi mumkin. Statistikaning katta qismi, shu jumladan ushbu kitobning katta qismi, tanlanma xatolikni tushunish va miqdor jihatidan baholashga qaratilgan, va biz ushbu xatoni miqdoriy baholashda tanlanma hajmini hisobga olishni foydali deb hisoblaymiz. **Tanlanma hajmi** ko‘pincha n harfi bilan ifodalanadi.

Og‘ish (inglizcha: bias) haqiqiy bosh to‘plam qiymatini tizimli ravishda ortiqcha yoki kam baholashga moyillikni ifodalaydi. Masalan, agar biz talabalardan yangi kollej stadioni qurilishini qo‘llab-quvvatlash darajasi haqida so‘rov o‘tkazayotgan bo‘lsak, savolni quyidagicha berishimiz ehtimol natijani og‘ishgan bo’ladi. *Yangi stadionni moliyalashtirishni qo‘llab-quvvatlash orqali maktabingni qo‘llab-quvvatlaysanmi?* Biz og‘ishni imkon qadar kamaytirishga intilamiz. Buning uchun ma’lumot yig‘ish jarayonini puxta o‘ylangan tartib-taomillar asosida tashkil etamiz. Bu masalalar 1-bobda muhokama qilingan va ko‘plab boshqa kitoblarning ham asosiy mavzularidan biridir.

5.1.2 Nuqtaviy bahoning o‘zgaruvchanligini tushunish

Faraz qilaylik, AQShdagi katta yoshlilar orasida quyosh energiyasini kengaytirishni qo‘llab-quvvatlovchi ulush $p = 0{,}88$ bo‘lib, bu bizni qiziqtirgan parametrdir. [2] Agar biz ushbu mavzu bo‘yicha 1000 nafar katta yoshdagi AQShliklardan so‘rov olsak, baho mukammal bo‘lmasligi mumkin. Lekin tanlanmadagi ulushni 88% ga qanchalik yaqin kutishimiz mumkin? Biz quyidagilarni tushunishni xohlaymiz: *haqiqiy bosh to‘plam ulushi* 0,88 *bo‘lganda tanlanmadagi ulush* $\hat{p}$ *qanday xatti-harakat qiladi.*[3] Keling, buni bilib olaylik! Biz 1000 AQSh katta yoshlilarining oddiy tasodifiy tanlanmasi orqali oladigan javoblarni modellashtirishimiz mumkin. Bu esa faqat biz quyosh energiyasini kengaytirishga bo‘lgan asl qo‘llab-quvvatlash 0,88 ekanligini bilganimiz uchungina mumkin. Bunday modellashtirishni qanday qurish mumkinligini quyida ko‘rsatamiz:

1. 2018-yilda AQSHda taxminan 250 million katta yoshlilari bo‘lgan. 250 million varaqqa 88% qismini “qo‘llab-quvvatlash” va qolgan 12% qismini “yo‘q” deb yozing.

[1] Bu ”phat” (yaxshi, ajoyib degan ma’nodagi jargon) bilan adashtirilmasin, masalan, ushbu kitob kabi.

[2] Biz ushbu qiymatni mukammal o‘lchash uchun aholini to‘liq ro‘yxatga olish o‘tkazmadik. Biroq, juda katta bir tanlanmada asl qo‘llab-quvvatlash darajasi taxminan 88% ekanligi ko‘rsatilgan.

[3] 88% ulush sifatida yozilsa, bu 0,88 bo‘ladi. Foiz va ulush o‘rtasida o‘tish odatiy holdir. Biroq, ushbu kitobda keltirilgan formulalar har doim ulushga tegishli, foizga emas.

2. Qog‘oz varaqlarini aralashtiring va 1000 ta qog‘oz varaqni oling, bu bizning 1000 nafar AQSh katta yoshlilaridan iborat tanlanma bo‘ladi.

3. “Qo‘llab-quvvatlash” deganlarni sanab chiqib, tanlanmadagi ulushni hisoblang.

Kimdir ushbu modellashtirishni amalga oshirishga ko‘ngilli bormi? Ehtimol, yo‘q. 250 million varaqqa ega bo‘lgan holda bu modellashtirishni amalga oshirish juda ko‘p vaqt talab qiladi va qimmat bo‘ladi. Lekin biz buni kompyuter kodi yordamida modellashtirishimiz mumkin. Qiziqish bo‘lsa, 5.1-rasmda keltirilgan qisqa dastur kodi orqali ko‘rishingiz mumkin. Ushbu modellashtirishda tanlanma $\hat{p}_1 = 0{,}894$ nuqtaviy bahosini berdi. Modellashtirish uchun bosh to‘plam ulushi $p = 0{,}88$ ekanligini bilamiz. Shuning uchun bahoda $0{,}894 - 0{,}88 = +0{,}014$ xato mavjud.

```
# 1. 250 million elementli to‘plam yarating, bu yerda 88% qismini
‘‘qo‘llab-quvvatlash’’ (support)
#    va 12% qismini ‘‘yo‘q’’ (not) qilib yozing.
pop_size <- 250000000
possible_entries <- c(rep("support", 0.88 * pop_size), rep("not", 0.12 * pop_size))

# 2. 1000 elementni almashtirmasdan tanlab oling.
sampled_entries <- sample(possible_entries, size = 1000)

# 3. p-shlyapalini hisoblang: "qo‘llab-quvvatlash" deganlarni sanab chiqing,
#    keyin tanlanmadagi ulushni aniqlang.
sum(sampled_entries == "support") / 1000
```

5.1-rasm. Qiziqish bo‘lsa, bu $\hat{p}$ (`p shlyapali, inglizcha: p-hat`) uchun yagona modellashtirish kodidir, u **R** deb ataluvchi statistik dastur yordamida yaratilgan. Har bir `#` bilan boshlangan qatorda dastur kodining nima qilayotganini oddiy til bilan tushuntiruvchi **kod izohi** berilgan. Batafsil bilmoqchi bo‘lganlar uchun openintro.org/book/os saytida **R** bo‘yicha dastur laboratoriyalari keltirilgan.

Bitta modellashtirishdan modellashtirish natijalari taqsimotini to‘liq tushunish qiyin, shuning uchun ko‘proq modellashtirishlar o‘tkazishimiz kerak. Ikkinchi modellashtirishda $\hat{p}_2 = 0{,}885$ natijasi olingan, bu esa $+0{,}005$ xatoga ega. Yana birida $\hat{p}_3 = 0{,}878$ va bu $-0{,}002$ xatoga ega. Va boshqasida esa $\hat{p}_4 = 0{,}859$, bu $-0{,}021$ xatoga ega. Kompyuter yordamida ushbu modellashtirishni 10000 marta o‘tkazdik va barcha 10000 modellashtirish natijalari taqsimotining gistogrammasini 5.2-rasmda ko‘rsatdik. Ushbu tanlanma ulushlarning taqsimoti **tanlanma taqsimot** deb ataladi. Ushbu tanlanma taqsimotni quyidagicha tavsiflashimiz mumkin:

Markaz. Taqsimotning markazi $\bar{x}_{\hat{p}} = 0{,}880$ bo‘lib, bu parametrga teng. E’tibor bering, modellashtirishda bosh to‘plam ichidan oddiy tasodifiy tanlanmani olgan. Bu esa tanlanmada tarafkashlikni oldini olishga yordam beruvchi oddiy tanlanma olish strategiyasidir.

Tarqalish. Taqsimotning standart chetlanish darajasi $s_{\hat{p}} = 0{,}010$. Tanlanma taqsimot yoki nuqtaviy bahoning o‘zgaruvchanligi haqida gap ketganda, biz odatda **standart xatolik (SX)** atamasini ishlatamiz va tanlanma ulushi bilan bog‘liq standart xatolikni ifodalash uchun $SX_{\hat{p}}$ belgisi ishlatiladi.

Shakl. Taqsimot simmetrik va qo‘ng‘iroq shaklida, va u *normal taqsimotga o‘xshash.*

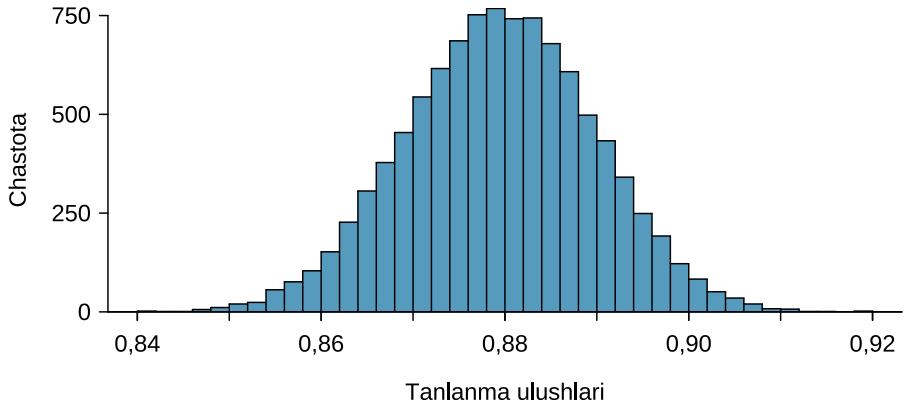
Bu xulosalar ijobiydir! Bosh to‘plam ulushi $p = 0{,}88$ bo‘lib, tanlanma hajmi $n = 1000$ bo‘lganda, tanlanma ulushi $\hat{p}$ bosh to‘plam ulushining juda yaxshi bahosini beradi. Bundan tashqari, gistogrammaning normal taqsimotga o‘xshashligi qiziqarli holatdir.

TANLANMA TAQSIMOTLAR KUZATILMAYDI, LEKIN ULARNI ESDA TUTISH FOYDALI

Haqiqiy hayotda, biz hech qachon tanlanma taqsimotni bevosita kuzatmaymiz, biroq har doim nuqtaviy bahoni bunday xayoliy taqsimotdan olingan deb hisoblash foydalidir. Tanlanma taqsimotni tushunish, kuzatilgan nuqtaviy baholarni tavsiflash va ularni anglashda yordam beradi.

5.1-MISOL

Agar biz juda kichik tanlanma hajmi, masalan, $n = 50$ dan foydalansak, $\hat{p}$ uchun standart xatolik



5.2-rasm. 10000 tanlanma ulushlarining gistogrammasi, bu yerda har bir tanlanma bosh to‘plamning ulushi 0,88 bo‘lgan va tanlanma hajmi $n = 1000$ bo‘lgan holda olingan.

$n = 1000$ bo‘lgandagidan kattaroq yoki kichikroq bo‘ladimi?

Intuitiv ravishda, ko‘proq ma’lumot kamroq ma’lumotdan yaxshiroqdek tuyuladi va odatda bu to‘g‘ri! $p = 0{,}88$ va $n = 50$ bo‘lganda odatiy xato $n = 1000$ bo‘lganidan kattaroq bo‘lishi kutiladi.

5.1-misol yana va yana muhim xususiyatni ta’kidlaydi. Ya’ni katta tanlanma kichik tanlanmaga qaraganda aniqroq nuqtaviy baho berishga moyil bo‘ladi.

5.1.3 Markaziy limit teorema

5.2-rasmdagi taqsimot normal taqsimotga juda o‘xshaydi. Bu tasodifiy hodisa emas. Bu **markaziy limit teorema** deb ataladigan umumiy tamoyil natijasidir.

MARKAZIY LIMIT TEOREMA VA MUVAFFAQIYAT-MUVAFFAQIYATSIZLIK SHARTI

Agar kuzatuvlar bog‘liqsiz bo‘lsa va tanlanma hajmi yetarlicha katta bo‘lsa, tanlanma ulushi $\hat{p}$ quyidagi o‘rtacha qiymat va standart xatolik bilan normal taqsimotga moyil bo‘ladi:

$$\mu_{\hat{p}} = p; \qquad SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Markaziy limit teorema amal qilishi uchun, tanlanma hajmi odatda $np \geq 10$ va $n(1-p) \geq 10$ bo‘lgan holatda yetarlicha katta hisoblanadi. Bu holat **muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti** deb ataladi.

Markaziy limit teorema juda muhim va u statistikning ko‘plab qismlariga asos yaratadi. Markaziy limit teoremadan foydalanishda ikkita texnik shartga e’tibor bering. Kuzatuvlar bog‘liqsiz bo‘lishi kerak va tanlanma hajmi $np \geq 10$ va $n(1-p) \geq 10$ bo‘lishi kerak.

5.2-MISOL

Oldin biz $p = 0{,}88$ va $n = 1000$ bo‘lgan holda simulyatsiya ma’lumotlaridan $\hat{p}$ ning o‘rtacha qiymati va standart xatolikni baholadik. Markaziy limit teorema amal qilishini tasdiqlang va tanlanma taqsimot taxminan normal ekanligini tekshiring.

Bog‘liqsizlik. Har bir tanlanma ulushi $\hat{p}$ uchun $n = 1000$ kuzatuvlar mavjud va ularning har biri bog‘liqsiz tanlangan. *Kuzatuvlar bog‘liqsiz deb hisoblanishining eng keng tarqalgan usuli bu ular oddiy tasodifiy tanlanma ekanligidir.*

Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti. Tanlanma hajmining yetarlicha katta ekanligini

muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirib va hisoblangan ikkita qiymat 10 dan katta ekanligini tasdiqlash orqali tekshirish mumkin:

$$np = 1000 \times 0{,}88 = 880 \geq 10; \qquad n(1-p) = 1000 \times (1-0{,}88) = 120 \geq 10.$$

Bog‘liqsizlik va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti qoniqarli, shuning uchun markaziy limit teorema amal qiladi va $\hat{p}$ ni normal taqsimot sifatida modellashtirish maqbuldir.

TANLANMA KUZATUVLARINING BOG‘LIQSIZLIGINI QANDAY TEKSHIRISH MUMKIN

Tajribadagi subyektlar bog‘liqsiz deb hisoblanadi, agar ular davolash guruhlariga tasodifiy ravishda taqsimlansa.

Agar kuzatuvlar oddiy tasodifiy tanlanmadan olingan bo‘lsa, ular bog‘liqsiz hisoblanadi.

Agar tanlanma tasodifiy jarayondan, masalan, yig‘ish liniyasida vaqti-vaqti bilan yuz beradigan xatodan olingan bo‘lsa, bog‘liqsizlikni tekshirish qiyinroq bo‘ladi. Bunday holda, eng yaxshi mulohazangizdan foydalaning.

Ba’zan bosh to‘plamdan olingan tanlanmalar uchun qo‘shiladigan qo‘shimcha shart shundaki, ular bosh to‘plam sonining 10% idan oshmasligi kerak. Agar tanlanma bosh to‘plam hajmining 10% dan oshib ketsa, biz muhokama qilayotgan usullar tanlanma xatolikni biroz oshirib baholashga moyil bo‘ladi, bu esa yanada murakkab usullar yordamida olingan natijaga nisbatan farq hosil qiladi.[4] Bu juda kamdan-kam muammo tug‘diradi va bunday hollarda bizning usullarimiz odatda konservativ bo‘ladi, shuning uchun bu qo‘shimcha tekshirishni ixtiyoriy deb hisoblaymiz.

M **5.3-MISOL**

Markaziy limit teoremaga muvofiq, $p = 0{,}88$ va $n = 1000$ bo‘lganida $\hat{p}$ ning nazariy o‘rtacha qiymati va standart xatolikni hisoblang.

$\hat{p}$ ning o‘rtacha qiymati oddiygina bosh to‘plam ulushi $\mu_{\hat{p}} = 0{,}88$ ga teng.

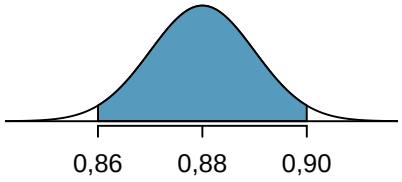
$\hat{p}$ uchun standart xatolikni hisoblash quyidagi formuladan foydalanadi:

$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}88(1-0{,}88)}{1000}} = 0{,}010.$$

M **5.4-MISOL**

Bosh to‘plam qiymatidan $p = 0{,}88$ 0,02 (2%) dan oshmagan $\hat{p}$ tanlanma ulushlari qanchalik tez-tez uchrashini baholang. 5.2- va 5.3-misollarga asoslanib, biz bilamizki, taqsimot taxminan $N(\mu_{\hat{p}} = 0{,}88, SX_{\hat{p}} = 0{,}010)$ ga mos keladi.

4.1-bo‘limdagi mashqlardan so‘ng, ushbu normal taqsimot misoli tanish bo‘lib tuyulishi kerak! Biz $\hat{p}$ lar ulushi 0,86 va 0,90 oralig‘ida bo‘lishini tushunishni istaymiz:



$\mu_{\hat{p}} = 0{,}88$ va $SX_{\hat{p}} = 0{,}010$ bilan biz chap va o‘ng chegaralar uchun Z-ballarni hisoblashimiz mumkin:

$$Z_{0{,}86} = \frac{0{,}86 - 0{,}88}{0{,}010} = -2; \qquad Z_{0{,}90} = \frac{0{,}90 - 0{,}88}{0{,}010} = 2.$$

[4] Masalan, biz **cheklangan bosh to‘plam tuzatish koeffitsienti** dan foydalanishimiz mumkin. Agar tanlanma hajmi n, bosh to‘plam soni esa N bo‘lsa, odatdagi standart xatolik formulasini $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ ga ko‘paytirish orqali standart xatolikni aniqroq baholash mumkin. Agar $n < 0{,}1 \times N$ bo‘lsa, ushbu tuzatish koeffitsiyenti nisbatan kichik bo‘ladi.

Biz statistik dasturiy ta'minot, grafik kalkulyator yoki jadvaldan foydalanib, quyruq hududlarni topishimiz mumkin va har qanday holatda ular har biri 0,0228 ga teng bo'ladi. Umumiy quyruq maydoni $2 \times 0{,}0228 = 0{,}0456$ ni tashkil etadi, bu esa 0,9544 soyali maydonni qoldiradi. Ya'ni, 5.2-rasmdagi tanlanma taqsimotning taxminan 95,44% qismi bosh to'plamning ulushi $p = 0{,}88$ ning $\pm 0{,}02$ oralig'ida joylashgan.

Y **5.5-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

5.1-misolda biz kichikroq tanlanma kamroq ishonchli baho berishga moyil bo'lishini muhokama qildik. Ushbu intuitiv fikr qanday qilib $SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ formulasida aks etganligini tushuntiring.[5]

5.1.4 Markaziy limit teoremani haqiqiy hayotga qo'llash

Ma'lumki, agar butun aholi uchun qimmat so'rovnoma o'tkazmasak, bosh to'plamning ulushini bilmaymiz, Bizning oldingi $p = 0{,}88$ qiymatimiz "Pew Research" tomonidan o'tkazilgan 1000 AQSh katta yoshlilari so'roviga asoslangan bo'lib, ulardan $\hat{p} = 0{,}887$ qismi quyosh energiyasini kengaytirishni qo'llab-quvvatlagan. Tadqiqotchilar quyidagilarni bilishni istagan bo'lishlari mumkin: so'rovdagi tanlanma ulushi taxminan normal taqsimotni ko'rsatadimi? Biz markaziy limit teoremadagi shartlarni tekshirishimiz mumkin:

Bog'liqsizlik. So'rov AQSh katta yoshlilarining oddiy tasodifiy tanlanmasi bo'lib, bu kuzatuvlar bog'liqsiz ekanligini anglatadi.

Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti. Ushbu shartni tekshirish uchun, p bosh to'plam ulushini bilishimiz zarur. Sababi, np va $n(1-p)$ ning ikkalasi ham 10 dan katta ekanligini tekshirishimiz kerak. Biroq, biz aslida p ni bilmaymiz, bu esa tadqiqotchilar nimani aniqlash uchun tanlanmani olishini tushuntiradi! Bunday holatlarda biz muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish uchun $\hat{p}$ ni eng yaxshi taxmin sifatida ishlatamiz:

$$n\hat{p} = 1000 \times 0{,}887 = 887; \qquad n(1-\hat{p}) = 1000 \times (1 - 0{,}887) = 113.$$

Ushbu tekshiruvda $\hat{p}$ bosh to'plam ulushi p uchun maqbul o'rinbosar bo'lib xizmat qiladi. Ushbu holatda har bir qiymat minimum 10 dan ancha yuqori.

Ushbu $\hat{p}$ ni p o'rnida ishlatish **almashtirib yaqinlashtirish** (substitution approximation) usuli tanlanma ulushining standart xatolikni hisoblashda ham foydali:

$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}887(1-0{,}887)}{1000}} = 0{,}010\ .$$

Bu usul ba'zan "o'rniga qo'yish prinsipi" deb ataladi. Ushbu holatda, $SX_{\hat{p}}$ standart xatolikni hisoblash uchun ilgari 0,88 bilan amalga oshirilgan hisob-kitob bilan taqqoslaganda uch o'nlik kasr bilan sezilmaydigan darajada o'zgardi. Har xil tanlanmalar orasida ozgina farqli ulushlarni kuzatganimizda ham hisoblangan standart xatolik nisbatan barqaror bo'ladi.

5.1.5 Markaziy limit teoremaga oid qo'shimcha tafsilotlar

Biz ushbu bobda bir nechta misollarda markaziy limit teoremani qo'lladik:

Agar kuzatuvlar bog'liqsiz va tanlanma hajmi yetarlicha katta bo'lsa, $\hat{p}$ ning taqsimoti quyidagi o'rtacha qiymat va standart xatolik bilan normal taqsimotga o'xshaydi:

$$\mu_{\hat{p}} = p; \qquad SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

[5] Tanlanma hajmi n formuladagi kasrning maxraji (pastki qismi) bo'lgani uchun, kattaroq tanlanma hajmi butun ifodaning hisoblanganda kichikroq bo'lishiga olib keladi. Ya'ni, kattaroq tanlanma hajmi kichikroq standart xatolikka mos keladi.

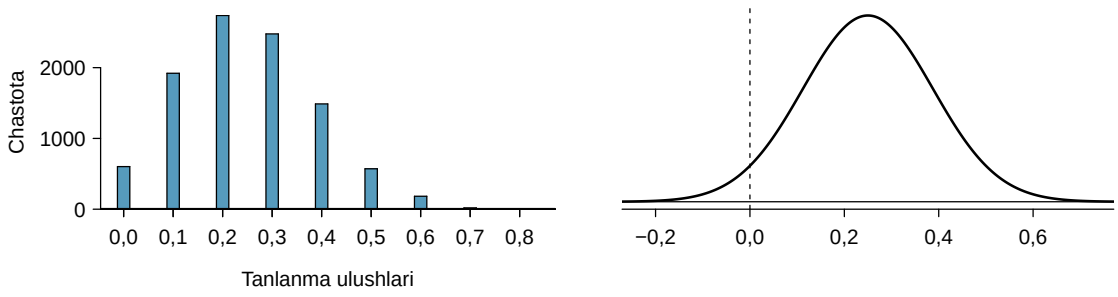
Tanlanma hajmi $np \geq 10$ *va* $n(1-p) \geq 10$ *shartlari bajarilganda yetarlicha katta deb hisoblanadi.*

Ushbu bo‘limda biz muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini o‘rganamiz va markaziy limit teoremani yaxshiroq tushunishga harakat qilamiz.

Qiziqarli savol shuki, *agar* $np < 10$ *yoki* $n(1-p) < 10$ *bo‘lsa, nima sodir bo‘ladi?* Biz buni oldinroq 5.1.2-bo‘limda misol tariqasida ko‘rib chiqdik, turli hajmdagi tanlanmalarni chizish bo‘yicha simulyatsiyalarni amalga oshirdik, masalan, haqiqiy ulush $p = 0{,}25$ bo‘lganda. Keling, hajmi 10 ga teng bo‘lgan tanlanmani ko‘rib chiqamiz:

yo‘q, yo‘q, ha, ha, yo‘q, yo‘q, yo‘q, yo‘q, yo‘q, yo‘q

Ushbu tanlanmada “ha” uchun $\hat{p} = \frac{2}{10} = 0{,}2$ tanlanma ulushini kuzatamiz. $n = 10$ va $p = 0{,}25$ bo‘lganida $\hat{p}$ ning tanlanma taqsimotini tushunish uchun ko‘plab shunday ulushlarni simulyatsiya qilishimiz mumkin. 5.3-rasmda ushbu taqsimotni, xuddi shu o‘rtacha qiymat va o‘zgaruvchanlikka ega bo‘lgan normal taqsimot bilan birga keltirdik. Ushbu taqsimotlar orasida bir nechta muhim farqlar mavjud.



5.3-rasm. Chapda: $\hat{p}$ ning simulyatsiyasi, tanlanma hajmi $n = 10$ va bosh to‘plamning ulushi $p = 0{,}25$. O‘ngda: o‘rtacha qiymat 0,25 va standart chetlanish 0,137 bo‘lgan normal taqsimot.

	Unimodalmi?	Silliqmi?	Simmetrikmi?
Normal: $N(0{,}25; 0{,}14)$	**Ha**	**Ha**	**Ha**
$n = 10$, $p = 0{,}25$	**Ha**	*Yo‘q*	*Yo‘q*

E’tibor bering, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti $n = 10$ va $p = 0{,}25$ bo‘lganda bajarilmadi:

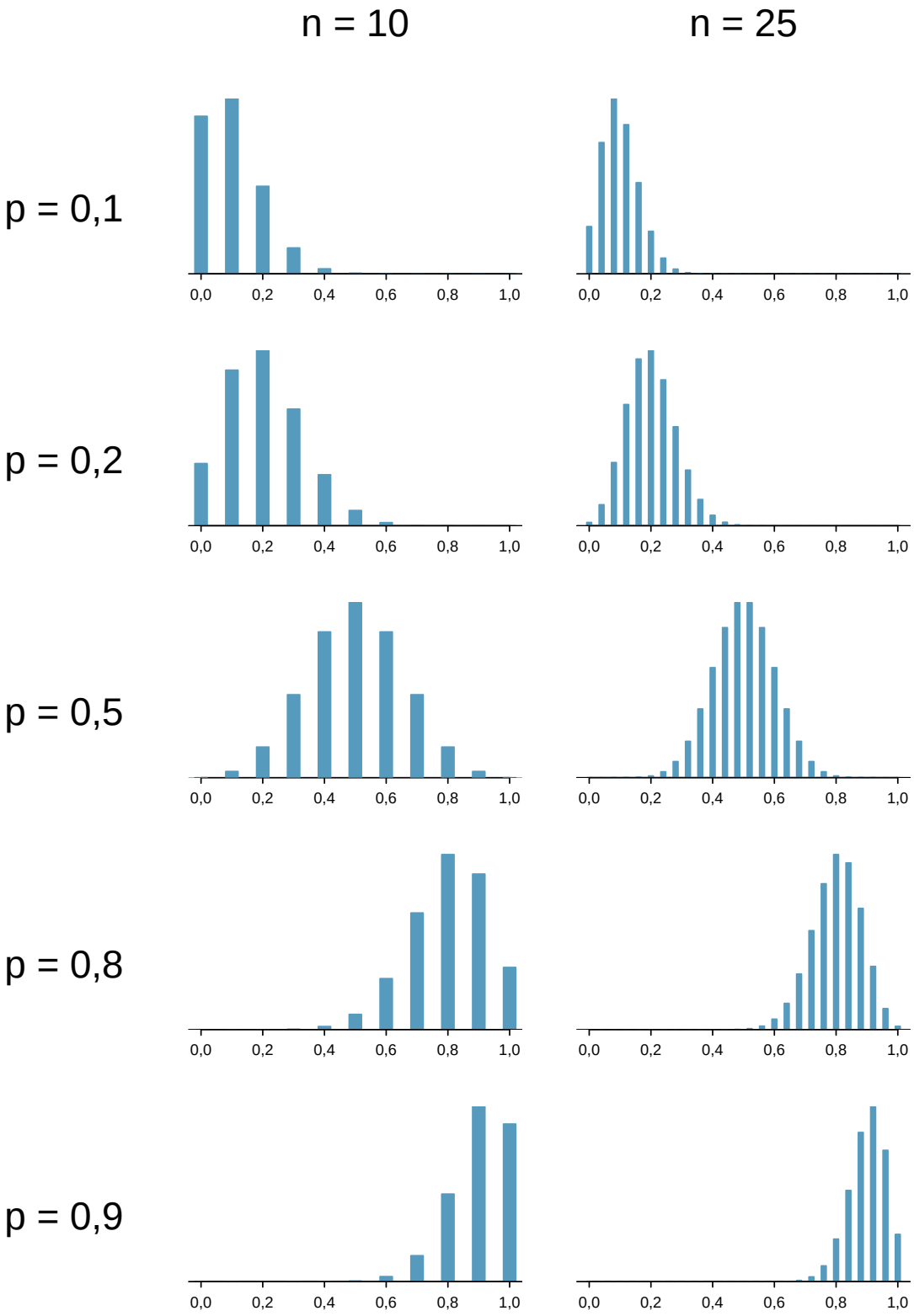
$$np = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5; \qquad n(1-p) = 10 \times 0{,}75 = 7{,}5.$$

Ushbu yagona tanlanma taqsimot muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti mukammal qo‘llanma ekanligini ko‘rsatmaydi, lekin ushbu qo‘llanma normal taqsimot mos bo‘lmasligi mumkinligini to‘g‘ri aniqladi.

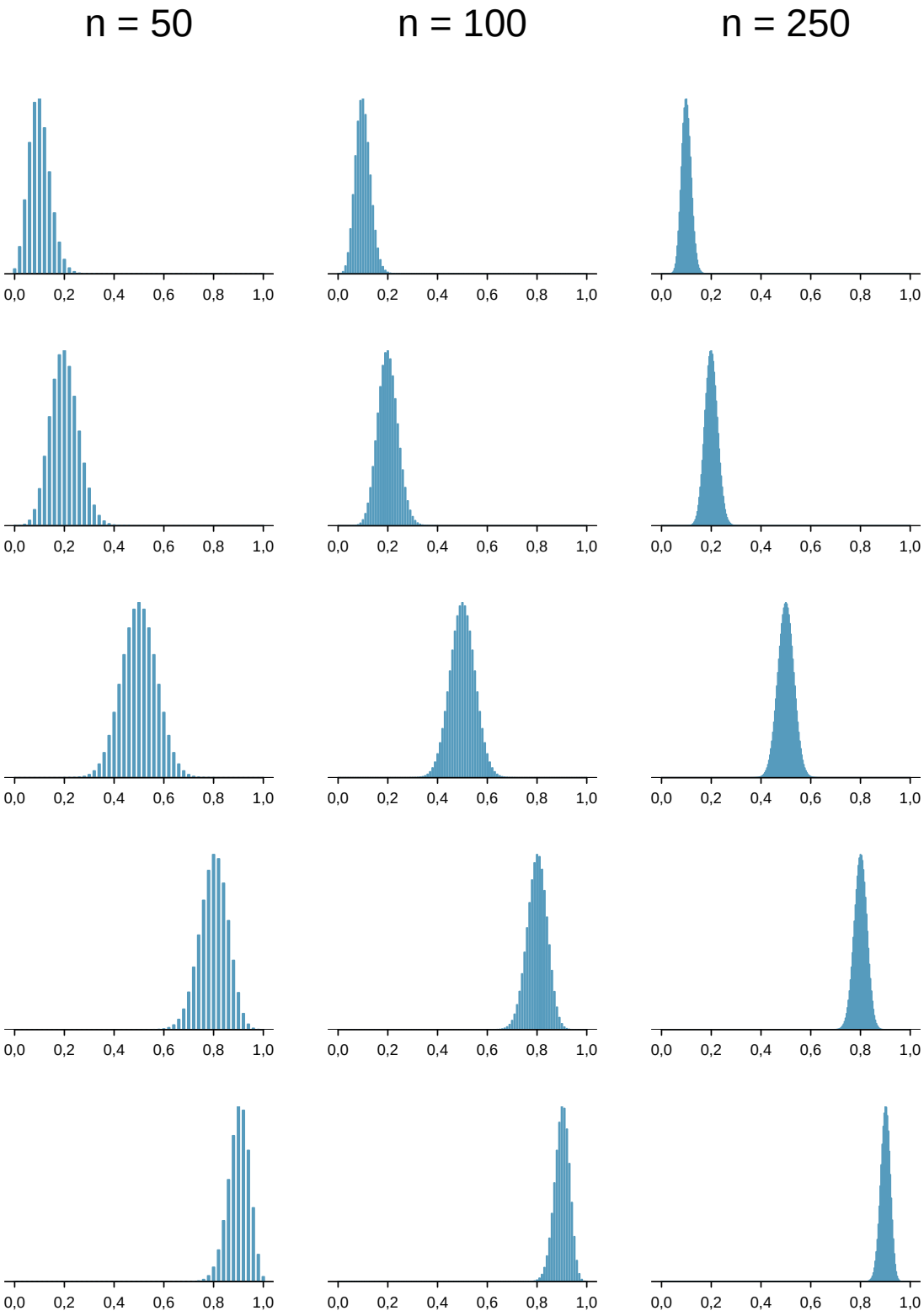
Biz qo‘shimcha simulyatsiyalarni yakunlab, 5.4- va 5.5-rasmlarda keltirilgan. Ba’zi tendensiyalarni ko‘ramiz:

1. Agar np yoki $n(1-p)$ kichik bo‘lsa, taqsimot ko‘proq **diskret** bo‘ladi, ya’ni *uzluksiz emas.*
2. Agar np yoki $n(1-p)$ ning qiymati 10 dan kichik bo‘lsa, taqsimotdagi notekislik (egilish) sezilarli darajada bo‘ladi.
3. Ikkala np *va* $n(1-p)$ qanchalik katta bo‘lsa, taqsimot shunchalik normal ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu grafiklarda katta tanlanma hajmi uchun sezish qiyinroq bo‘lishi mumkin, chunki o‘zgaruvchanlik ham sezilarli darajada kichrayadi.
4. np va $n(1-p)$ ikkisi ham juda katta bo‘lganda, taqsimotning diskretligi deyarli sezilmaydi, va taqsimot normal taqsimotga juda o‘xshaydi.

Hozircha biz faqat taqsimotlarning egilishiga va diskretligiga e’tibor qaratdik. Biz taqsimotlarning o‘rtacha qiymati va standart xatolikning qanday o‘zgarishini ko‘rib chiqmabmiz. Grafiklarga qaytib, uchta narsaga e’tibor bering:



5.4-rasm. Bir nechta p va n parametrlarining tanlanma taqsimotlari.
Qatorlar: $p = 0{,}10$, $p = 0{,}20$, $p = 0{,}50$, $p = 0{,}80$ va $p = 0{,}90$.
Ustunlar: $n = 10$ va $n = 25$.



5.5-rasm. Bir nechta p va n parametrlarining tanlanma taqsimotlari.
Qatorlar: $p = 0{,}10$, $p = 0{,}20$, $p = 0{,}50$, $p = 0{,}80$ va $p = 0{,}90$.
Ustunlar: $n = 50$, $n = 100$ va $n = 250$.

1. Taqsimotlarning markazlari har doim simulyatsiyani yaratish uchun ishlatilgan bosh to‘plamning ulushi p da joylashgan. $\hat{p}$ ning tanlanma taqsimoti har doim bosh to‘plam parametri p da markazlashgan. Bu shuni anglatadiki, $\hat{p}$ bog‘liqsiz ma’lumotlar sharoitida **tarafkash** bo‘lmaydi.

2. Muayyan bosh to‘plam ulushi p uchun, tanlanma taqsimotdagi o‘zgaruvchanlik tanlanma hajmi n kattalashgan sari kamayadi. Bu sizning intuitivingiz bilan mos keladi. Kattaroq tanlanma hajmiga asoslangan baho odatda aniqroq bo‘ladi.

3. Muayyan tanlanma hajmi uchun o‘zgaruvchanlik $p = 0{,}5$ bo‘lganda eng katta bo‘ladi. Farqlar ozgina nozik bo‘lishi mumkin, shuning uchun diqqat bilan qarang. Bu standart xatolik formulasida p ning rolini aks ettiradi. $SX = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Standart xatolik $p = 0{,}5$ bo‘lganda eng katta qiymatga ega bo‘ladi.

Hech qachon $\hat{p}$ ning taqsimoti *mukammal* normal ko‘rinishga ega bo‘lmaydi, chunki $\hat{p}$ har doim diskret qiymatlarni (x/n) qabul qiladi. Bu har doim bir o‘lchov daraja masalasidir. Biz ushbu kitob doirasida 10 minimal qiymatga ega bo‘lgan np va $n(1-p)$ uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini qo‘llanma sifatida ishlatamiz.

5.1.6 Statistikalar uchun doirani kengaytirish

Tanlanma statistikasi yordamida parametrni baholash strategiyasi juda keng tarqalgan bo‘lib, bu strategiyani ulushdan tashqari boshqa statistikalar uchun ham qo‘llashimiz mumkin. Masalan, agar biz ma’lum bir kollejni bitirganlarning o‘rtacha ish haqini baholamoqchi bo‘lsak, yaqinda bitirganlarning tasodifiy tanlanmasi ustida so‘rov o‘tkazishimiz mumkin. Bu misolda biz barcha bitiruvchilar uchun bosh to‘plamning o‘rtacha qiymati μ ni baholash uchun tanlanma o‘rtacha qiymati $\bar{x}$ dan foydalanardik. Yana bir misol: agar biz ikkita veb-sayt uchun mahsulot narxlari farqini baholamoqchi bo‘lsak, ikkala saytda mavjud mahsulotlarning tasodifiy tanlanmasi olinib, har birining narxlari tekshirilishi mumkin, so‘ngra o‘rtacha farq hisoblanadi. Bu strategiya, albatta, nuqtaviy baho orqali haqiqiy farq haqida biror tasavvur beradi.

Ushbu bobda asosan bitta ulush konteksti ta’kidlangan bo‘lsa-da, kitob davomida ushbu usullarni qo‘llaydigan ko‘plab turli kontekstlarga duch kelamiz. Prinsiplar va umumiy g‘oyalar bir xil, garchi tafsilotlar bir oz o‘zgarsa ham. Shuningdek, biz ba’zi boshqa kontekstlarni mashqlarga qo‘shib qo‘ydik, bu sizga g‘oyalarni umumlashtirish haqida o‘ylashni boshlashga yordam beradi.

Mashqlar

5.1 Parametrni aniqlash, 1-qism. Quyidagi holatlarning har biri uchun, qiziqish parametri o‘rtacha miqdor yoki ulush ekanligini aniqlang. Yakka javoblarning sonli yoki toifali ekanligini tahlil qilish foydali bo‘lishi mumkin.

(a) So‘rovda yuz nafar kollej talabasidan haftasiga internetda qancha soat vaqt o‘tkazishi so‘raladi.

(b) So‘rovda yuz nafar kollej talabasidan: “Internetda o‘tkazgan vaqtingizning qancha foizi o‘quv dasturingizga tegishli?” deb so‘raladi.

(c) So‘rovda yuz nafar kollej talabasidan o‘z maqolalarida “Wikipedia”dan ma’lumot olgan yoki olmaganligi so‘raladi.

(d) So‘rovda yuz nafar kollej talabasidan haftalik xarajatlarining umumiy foizidan qanchasi spirtli ichimliklarga sarflanganligi so‘raladi.

(e) Yaqinda o‘qishni tamomlagan yuz nafar kollej bitiruvchilaridan iborat namunada, ulardan 85 foizi bitiruv kunidan bir yil ichida ish topishni kutmoqda.

5.2 Parametrni aniqlash, 2-qism. Quyidagi holatlarning har biri uchun, qiziqish parametri o‘rtacha miqdor yoki ulush ekanligini aniqlang.

(a) So‘rovda amerikaliklarning 64% federal xarajatlar va budjet kamomadidan katta xavotirda ekanligini bildirgan.

(b) Hisobotda mahalliy TV yangiliklar daromadi ikki yil ichida 17% ga oshgani, gazetalar daromadi esa shu davrda 6,4% iga kamaygani ko‘rsatilgan.

(c) So‘rovda o‘rta maktab va kollej o‘quvchilaridan smartfonlarida geolokatsiya xizmatidan foydalanishlari yoki foydalanmasliklari so‘raladi.

(d) So‘rovda smartfon foydalanuvchilaridan veb-taksi xizmatidan foydalanishlari yoki foydalanmasliklari so‘raladi.

(e) So‘rovda smartfon foydalanuvchilaridan o‘tgan yil davomida veb-taksi xizmatidan necha marta foydalanganliklari so‘raladi.

5.3 Sifat nazorati. Kompyuter chiplarini sifat nazorati jarayonida, zavoddagi muhandis bir hafta davomida tasodifiy tanlangan 212 chipni sinovdan o‘tkazadi va og‘ir nuqsonlari bo‘lgan chiplarning hozirgi darajasini aniqlaydi. Muhandis 27 ta chipning nuqsonli ekanligini aniqlaydi.

(a) Ma’lumot to‘plamida ko‘rib chiqilayotgan bosh to‘plam nima?

(b) Qanday parametr baholanmoqda?

(c) Ushbu parametr uchun nuqtaviy bahosi nima?

(d) Nuqtaviy bahosining noaniqligini o‘lchash uchun ishlatiladigan statistik ko‘rsatkichning nomi nima?

(e) Ushbu vaziyat uchun (d) banddagi qiymatni hisoblang.

(f) Tarixiy nuqsonlar darajasi 10% edi. Muhandis ushbu hafta aniqlangan nuqsonlar darajasidan hayratlanishi kerakmi?

(g) Bosh to‘plamning haqiqiy ulushi 10% deb faraz qiling. Agar biz ushbu ulushdan $p = 0{,}1$ sifatida foydalanib (e) banddagi qiymatini qayta hisoblasak, natija sezilarli darajada o‘zgaradimi?

5.4 Kutilmagan xarajatlar. AQShda 765 nafar kattalardan iborat tasodifiy namuna olinganida, ulardan 322 nafari $400 miqdoridagi kutilmagan xarajatni qarz olish yoki qarzga botmasdan to‘lay olmasligini aytgan.

(a) Ma’lumot to‘plamida ko‘rib chiqilayotgan bosh to‘plam nima?

(b) Qanday parametr baholanmoqda?

(c) Ushbu parametr uchun nuqtaviy bahosi nima?

(d) Nuqtaviy baho noaniqligini o‘lchash uchun ishlatiladigan statistik ko‘rsatkichning nomi nima?

(e) Ushbu vaziyat uchun (d) banddagi qiymatni hisoblang.

(f) Bir kabel televideniyasi sharhlovchisi bu qiymat aslida 50% deb hisoblaydi. U ushbu ma’lumotlardan hayratlanishi kerakmi?

(g) Aholining haqiqiy ulushi 40% deb faraz qiling. Agar biz ushbu ulushdan $p = 0{,}4$ sifatida foydalanib (e) banddagi qiymatini qayta hisoblasak, natija sezilarli darajada o‘zgaradimi?

5.5 Takroriy suv namunalari. Bir notijorat tashkilot ichimlik suvida yuqori darajadagi qo‘rg‘oshin mavjud bo‘lgan uylarning ulushini tushunishni xohlaydi. Ular kamida 5% uyda qo‘rg‘oshin darajasi yuqori bo‘lishini, lekin bu ulush 30% dan oshmasligini taxmin qilishadi. Ular tasodifiy ravishda 800 ta uy namunasi olib, suv namunalarini to‘plash uchun ularning egalari bilan ishlashadi va ushbu uylarning qo‘rg‘oshin darajasi yuqori bo‘lganlarini aniqlashadi. Ular bu jarayonni 1000 marta takrorlashadi va namuna ulushlarining taqsimotini yaratishadi.

(a) Ushbu taqsimot qanday nomlanadi?

(b) Ushbu taqsimot shakli simmetrik, o‘ng tomonga qiyshaygan yoki chap tomonga qiyshaygan bo‘lishini kutasizmi? Sababini tushuntiring.

(c) Agar ulushlar 8% atrofida taqsimlangan bo‘lsa, taqsimotning o‘zgaruvchanligi qanday bo‘ladi?

(d) (c)-qismida hisoblangan qiymatning rasmiy nomi nima?

(e) Faraz qilaylik, tadqiqotchilar byudjeti qisqardi va ular har bir tanlanmada faqat 250 ta kuzatish to‘play oladi, lekin ular hali ham 1000 ta tanlanma to‘play oladi. Ular yangi tanlanma ulushlari taqsimotini quradi. Ushbu yangi taqsimotning o‘zgaruvchanligi, har bir tanlanmada 800 kuzatish bo‘lgan taqsimotning o‘zgaruvchanligi bilan qanday solishtiriladi?

5.6 Takroriy talabalar namunasi. Yirik kollejdagi barcha birinchi kurs talabalarining 16% joriy yilda dekanning ro‘yxatiga kirgan. Sinf loyihasi doirasida talabalar tasodifiy ravishda 40 nafar talabani tanlab, ushbu talabalar ro‘yxatga kirganmi yoki yo‘qligini tekshirishadi. Ular bu jarayonni 1000 marta takrorlashadi va namuna ulushlarining taqsimotini yaratishadi.

(a) Ushbu taqsimot qanday nomlanadi?

(b) Ushbu taqsimot shakli simmetrik, o‘ng tomonga qiyshaygan yoki chap tomonga qiyshaygan bo‘lishini kutasizmi? Sababini tushuntiring.

(c) Ushbu taqsimotning o‘zgaruvchanligini hisoblang.

(d) (c)-qismida hisoblangan qiymatning rasmiy nomi nima?

(e) Faraz qilaylik, talabalar yana namuna olishga qaror qilishdi, bu safar har bir namunada 90 talaba to’playdi va ular yana 1000 ta namuna to’pladilar. Ular yangi namuna ulushlari taqsimotini quradilar. Ushbu yangi taqsimotning o’zgaruvchanligi, har bir namunada 40 ta kuzatish bo’lgan taqsimotning o’zgaruvchanligi bilan qanday solishtiriladi?

5.2 Nisbat uchun ishonch intervali

Tanlanma ulushi $\hat{p}$ bosh to‘plamning ulushi p uchun bitta ishonarli qiymatni taqdim etadi. Biroq, tanlanma ulushi mukammal emas va unga bog‘liq bo‘lgan biror *standart xatolik* mavjud bo‘ladi. Bosh to‘plam ulushi uchun baho bildirayotganda, faqat nuqtaviy bahoni berish o‘rniga, ishonarli *qiymatlar diapazonini* taqdim etish yaxshiroq amaliyot hisoblanadi.

5.2.1 Bosh to‘plam parametlarini aniqlash

Faqatgina nuqtaviy bahodan foydalanish loyqa ko‘lda nayza bilan baliq ovlashga o‘xshaydi. Biz baliqni ko‘rgan joyga nayza uloqtira olamiz, lekin ehtimol uni qochirib qo‘yamiz. Boshqa tomondan, agar biz o‘sha joyga to‘r tashlasak, baliqni tutib olish imkoniyatimiz yuqori bo‘ladi. **Ishonch intervallari** to‘r bilan baliq ovlashga o‘xshaydi va bu biz bosh to‘plamning parametrini topishimiz mumkin bo‘lgan ishonarli qiymatlar diapazonini ifodalaydi.

Agar biz $\hat{p}$ nuqtaviy bahoni bersak, biz bosh to‘plamning aniq ulushini topa olmaymiz. Boshqa tomondan, agar biz ishonch intervallarini, ya’ni ishonarli qiymatlar diapazonini taqdim qilsak, parametrni aniqlash ehtimolimiz yuqori bo‘ladi.

Y **5.6-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Bosh to‘plamning ulushini oraliqda aniqroq bilishni istasak, kengroq oraliqni tanlashimiz kerakmi yoki kichikroq oraliqnimi?[6]

5.2.2 95% lik ishonch intervallarini qurish

Bizning $\hat{p}$ tanlanma ulushimiz bosh to‘plamning ulushi uchun eng ishonchli qiymatdir, shuning uchun ishonch intervallarini ushbu nuqtaviy baho atrofida qurish mantiqiydir. Standart xatolik ishonch intervallarini qanchalik keng qilishimiz kerakligi haqida ko‘rsatma beradi.

Standart xatolik nuqtaviy bahoning standart chetlanishini ifodalaydi va markaziy limit teorema shartlari bajarilganda, nuqtaviy baho normal taqsimotga yaqinlashadi. Normal taqsimotda ma’lumotlarning 95% qismi o‘rtacha qiymatdan 1,96 standart chetlanish ichida bo‘ladi. Ushbu tamoyildan foydalanib, biz tanlanma ulushidan 1,96 standart xatolik uzoqlikka cho‘zilgan ishonch intervallarini tuza olamiz va ular bosh to‘plamning ulushini 95% ishonch bilan **qoplaydi**:

$$\text{nuqtaviy baho} \pm 1{,}96 \times SX;$$

$$\hat{p} \pm 1{,}96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

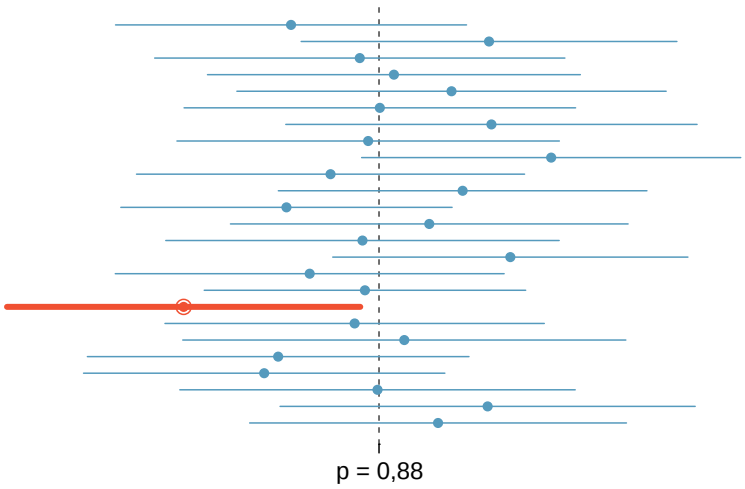
Lekin ”95% ishonch” nimani anglatadi? Tasavvur qiling, biz ko‘plab tanlanmalarni olishimiz va har biridan 95% lik ishonch intervallarini yaratishimiz mumkin. Shunda, ushbu oraliqlarning taxminan 95% qismi parametrni, ya’ni p ni o‘z ichiga oladi. 5.6-rasmda 5.1.2-bo‘limdagi simulyatsiyadan olingan 25 ta tanlanmadan 25 ta oraliq yaratish jarayoni ko‘rsatilgan bo‘lib, natijada hosil bo‘lgan ishonch intervallaridan 24 tasi bosh to‘plamning $p = 0{,}88$ ulushini o‘z ichiga oladi, biroq bitta oraliq ololmaydi.

M **5.7-MISOL**

5.6-rasmda bitta oraliq $p = 0{,}88$ ni o‘z ichiga olmaydi. Bu simulyatsiyada ishlatilgan bosh to‘plamning ulushi $p = 0{,}88$ bo‘lolmasligini anglatadimi?

Ba’zi kuzatuvlar tabiiy ravishda o‘rtacha qiymatdan 1,96 standart chetlanishdan ortiq uzoqlikda

[6] Agar baliqni aniqroq tutishni istasak, kengroq to‘r tashlashimiz mumkin. Xuddi shunday, parametrni aniqlashda ishonchimizni oshirish uchun kengroq ishonch intervallaridan foydalanamiz.



5.6-rasm. 5.1.2-bo‘limdagi simulyatsiyadan olingan 25 nuqtaviy baho va ishonch intervallari. Ushbu oraliqlar bosh to‘plamning ulushi $p = 0{,}88$ ga nisbatan ko‘rsatilgan. Faqatgina 1 ta oraliq bosh to‘plamning ulushini qoplamagan va bu oraliq ajratib ko‘rsatilgan.

sodir bo‘lgani kabi, ba’zi nuqtaviy baholar ham qiziqish parametridan 1,96 standart xatolikdan ortiq uzoqlikda bo‘ladi. Ishonch intervallari faqat ishonarli qiymatlar diapazonini beradi. Ma’lumotlarga asoslanib boshqa qiymatlar ishonarsiz deb aytishimiz mumkin, lekin bu ularning imkonsiz ekanligini anglatmaydi.

PARAMETR UCHUN 95% LIK ISHONCH INTERVALLARI

Agar nuqtaviy bahoning taqsimoti markaziy limit teorema shartlariga mos kelsa va shuning uchun normal taqsimotga yaqin bo‘lsa, biz 95% lik ishonch intervallarini quyidagicha qurishimiz mumkin:

$$\text{nuqtaviy baho} \pm 1{,}96 \times SX \ .$$

M **5.8-MISOL**

5.1-bo‘limda biz “Pew Research” tomonidan o‘tkazilgan so‘rovni o‘rgandik, unda 1000 nafar AQSh katta yoshlilarining tasodifiy tanlanmasi ichida 88,7% foizi quyosh energiyasining rolini kengaytirishni qo‘llab-quvvatlagan. Bosh to‘plam ulushi uchun 95% lik ishonch intervallarini hisoblang va talqin qiling.

Biz avvalroq $\hat{p}$ ning normal taqsimotga mos kelishini va standart xatolik $SX_{\hat{p}} = 0{,}010$ ekanligini tasdiqladik. 95% lik ishonch intervallarini hisoblash uchun $\hat{p} = 0{,}887$ nuqtaviy bahosini va standart xatolikni 95% lik ishonch intervallari formulasiga qo‘shamiz:

$$\hat{p} \pm 1{,}96 \times SX_{\hat{p}} \quad \rightarrow \quad 0{,}887 \pm 1{,}96 \times 0{,}010 \quad \rightarrow \quad (0{,}8674; 0{,}9066)$$

Biz 95% ishonch bilan ta’kidlaymizki, AQSh katta yoshlilarining quyosh energiyasini kengaytirishni qo‘llab-quvvatlaydiganlar haqiqiy ulushi 86,7% va 90,7% oralig‘ida. (Ishonch intervallarini taqdim etishda ko‘pincha eng yaqin foiz nuqtasi yoki foizning o‘nlik qismiga yaqinlashtirish amaliyoti qo‘llaniladi.)

5.2.3 Ishonch darajasini o‘zgartirish

Agar biz 95% dan yuqori ishonch darajasi, masalan, 99% ishonch darajasini ko‘rib chiqmoqchi bo‘lsak, baliqni tutish haqidagi analogiyani eslang: agar baliqni aniqroq tutishni istasak, kengroq to‘rdan foydalanishimiz kerak. 99% ishonch darajasini yaratish uchun biz 95% oraliqni ken-

gaytirishimiz kerak. Boshqa tomondan, agar biz pastroq, masalan, 90% ishonch darajasiga ega bo‘lgan oraliqni xohlasak, dastlabki 95% oraliqdan biroz torroq oraliqni ishlatishimiz mumkin.

95% lik ishonch intervallari tuzilishi turli ishonch darajalari uchun oraliqlarni qanday tuzish haqida yo‘l-yo‘riq beradi. Normal taqsimotga amal qiluvchi nuqtaviy baho uchun umumiy 95% lik ishonch intervallari formulasi quyidagicha:

$$\text{nuqtaviy baho } \pm\ 1{,}96 \times SX\ .$$

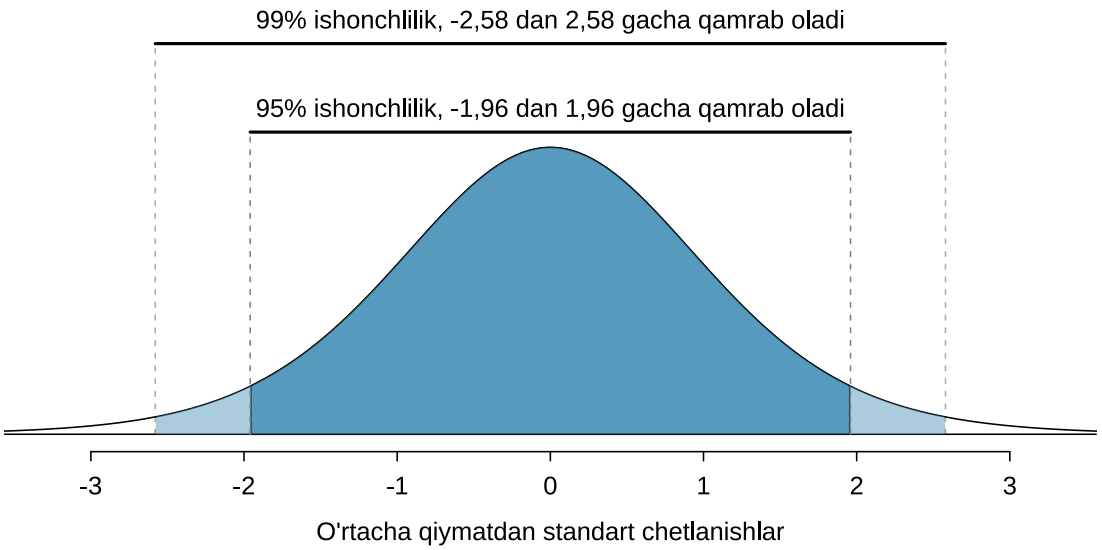
Ushbu oraliq uchta asosiy komponentdan iborat: nuqtaviy baho, “1,96” va standart xatolik. $1{,}96 \times SX$ tanlovi 95% ma’lumotni qamrab olishga asoslangan, chunki baho parametrdan 1,96 standart xatolik ichida taxminan 95% joylashgan. 1,96 tanlovi 95% ishonch darajasiga mos keladi.

Y **5.9-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Agar X normal taqsimotga ega tasodifiy miqdor bo‘lsa, X ning o‘rtacha qiymatdan 2,58 standart chetlanish ichida bo‘lish ehtimoli qanday?[7]

Yo‘naltiruvchi 5.9-yo‘naltirilgan mashqda ko‘rsatganidek, 99% holatlarda normal tasodifiy miqdor o‘rtacha qiymatdan 2,58 standart chetlanish ichida bo‘ladi. 99% lik ishonch intervallarini yaratish uchun, 95% lik ishonch intervallari formulasidagi 1,96 qiymatini 2,58 ga o‘zgartirish kerak. Shunday qilib, 99% lik ishonch intervallari formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\text{nuqtaviy baho } \pm\ 2{,}58 \times SX.$$



5.7-rasm. $-z^\star$ va $z^\star$ orasidagi maydon $z^\star$ kattalashgani sari oshadi. Agar ishonch darajasi 99% bo‘lsa, $z^\star$ ni $-z^\star$ va $z^\star$ orasida normal taqsimotning 99% maydoniga mos ravishda tanlaymiz, bu pastki va yuqori qismda 0,5% maydonga to‘g‘ri keladi: $z^\star = 2{,}58$.

Ushbu yondashuv – normal modelda Z-ballardan foydalanib ishonch darajalarini hisoblash – $\hat{p}$ kabi nuqtaviy baho normal taqsimot bilan bog‘liq bo‘lganda mos keladi. Ba’zi boshqa nuqtaviy baholar uchun normal model yaxshi mos kelmasligi mumkin. Bunday holatlarda, tanlanma taqsimotni yaxshiroq ifodalovchi muqobil taqsimotlardan foydalanamiz.

[7]Bu Z-ballning $-2{,}58$ dan kattaroq va 2,58 dan kichik bo‘lish ehtimolini so‘rash bilan tengdir. 5.7-rasmni ko‘ring. Ushbu ehtimolni aniqlash uchun statistik dastur, kalkulyator yoki jadvaldan foydalanib, normal taqsimot uchun $-2{,}58$ va 2,58 qiymatlarini tekshiramiz: 0,0049 va 0,9951. Shunday qilib, X normal tasodifiy miqdorning 2,58 standart chetlanish ichida bo‘lish ehtimoli $0{,}9951 - 0{,}0049 \approx 0{,}99$ ga teng.

ISTALGAN ISHONCH DARAJASI UCHUN ISHONCH INTERVALLARI

Agar nuqtaviy baho standart xatolik SX bilan normal modelga yaqin bo‘lsa, unda bosh to‘plamning parametri uchun ishonch intervallari quyidagicha bo‘ladi:

$$\text{nuqtaviy baho } \pm \ z^\star \times SX$$

bu yerda $z^\star$ tanlangan ishonch darajasiga mos keladi.

5.7-rasm ishonch darajasiga asoslanib $z^\star$ ni qanday aniqlash mumkinligini tasvirlaydi. Biz $z^\star$ ni shunday tanlaymizki, standart normal taqsimot, $N(0;1)$, da $-z^\star$ va $z^\star$ orasidagi maydon ishonch darajasiga mos kelsin.

XATOLIK CHEGARASI

Ishonch intervallarida $z^\star \times SX$ **xatolik chegarasi** deb ataladi.

Ⓜ **5.10-MISOL**

5.8-misoldagi ma’lumotlardan foydalanib, AQSh katta yoshlilarining quyosh energiyasidan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlash ulushi uchun 90% lik ishonch intervallarini yarating. Biz normal taqsimot shartlarini avvalroq o‘rganganmiz.

Avvalo, biz $z^\star$ ni topamiz, shunday qilib, taqsimotning 90% maydoni $-z^\star$ va $z^\star$ orasida bo‘ladi, bu standart normal taqsimot $N(\mu = 0; \sigma = 1)$ ga mos keladi. Grafik kalkulyator, statistik dastur yoki ehtimollik jadvali yordamida yuqori quyruq 5% (quyi quyruqda yana 5% bor) ekanligini topamiz: $z^\star = 1{,}65$. 90% lik ishonch intervallarini quyidagicha hisoblaymiz:

$$\hat{p} \ \pm \ 1{,}6449 \times SX_{\hat{p}} \quad \rightarrow \quad 0{,}887 \ \pm \ 1{,}65 \times 0{,}0100 \quad \rightarrow \quad (0{,}8705; 0{,}9034)$$

Ya’ni, biz 90% ishonch bilan 2018-yilda AQSh katta yoshlilarining 87,1% dan 90,3% gacha bo‘lgan qismi quyosh energiyasidan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlagan deb ta’kidlaymiz.

BIR ULUSH UCHUN ISHONCH INTERVALLARI

Agar bir ulush uchun ishonch intervallari amaliyotda foydali bo‘lishini aniqlagan bo‘lsangiz, oraliqni qurish uchun to‘rt bosqich mavjud:

Tayyorlash. $\hat{p}$ va n ni aniqlang hamda foydalanmoqchi bo‘lgan ishonch darajasini tanlang.

Tekshirish. $\hat{p}$ ning deyarli normal ekanligini ta’minlash uchun shartlarni tekshiring. Bir ulush uchun ishonch intervallarida muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirishda p o‘rniga $\hat{p}$ ni ishlating.

Hisoblash. Agar shartlar bajarilgan bo‘lsa, $\hat{p}$ yordamida SX ni hisoblang, $z^\star$ ni toping va oraliqni yarating.

Xulosa. Ishonch intervallarini muammo kontekstida talqin qiling.

5.2.4 Qo‘shimcha holatlar tahlillari

Nyu-York shahrida 2014-yil 23-oktabr kuni yaqinda Gvineyada Ebola bemorlarini davolagan bir shifokor biroz isitma bilan shifoxonaga bordi va keyinchalik unda Ebola kasalligi aniqlanib tashxis qo‘yildi. Shundan ko‘p o‘tmay, NBC 4 New York / The Wall Street Journal / Marist Poll so‘rovi Nyu-yorkliklarning 82% i “Ebola bemori bilan aloqada bo‘lgan har qanday kishi uchun majburiy 21 kunlik karantin”ni qo‘llab-quvvatlashini aniqladi. Ushbu so‘rov 2014-yil 26–28-oktabr kunlari Nyu-Yorkdagi 1042 nafar voyaga yetgan (kattalar) aholi orasida o‘tkazilgan va ularning javoblarini o‘z ichiga olgan.

5.11-MISOL

Ushbu holatda nuqtaviy baho qanday, va bu nuqtaviy bahoni normal taqsimot orqali modellashtirish mantiqiymi?

Tanlanmasi $n = 1042$ ga teng bo‘lgan holda, nuqtaviy baho $\hat{p} = 0{,}82$ ga teng. $\hat{p}$ ni normal taqsimot orqali modellashtirish mumkinmi yoki yo‘qligini tekshirish uchun bog‘liqsizlikni (so‘rov oddiy tasodifiy tanlanmaga asoslangan) va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshiramiz ($1042 \times \hat{p} \approx 854$ va $1042 \times (1-\hat{p}) \approx 188$, ikkalasi ham 10 dan katta). Ushbu shartlar bajarilganda, $\hat{p}$ ning tanlanma taqsimotini normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqan maqbul bo‘ladi.

5.12-MISOL

Ebola so‘rovidan $\hat{p} = 0{,}82$ ning standart xatolikni baholang.

Standart xatolikni hisoblash uchun $p \approx \hat{p} = 0{,}82$ almashtirib yaqinlashtirishdan foydalanamiz:

$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{0{,}82(1-0{,}82)}{1042}} = 0{,}012.$$

5.13-MISOL

Ebola bilan kasallangan bemor bilan muloqotda bo‘lgan har qanday kishiga karantin joriy etishni qo‘llab-quvvatlagan nyu-yorklik kattalarning ulushi p uchun 95% lik ishonch intervallarini yarating.

5.12-misoldagi $SX = 0{,}012$ standart xatolikni, 0,82 nuqtaviy bahosini va 95% ishonch darajasi uchun $z^\star = 1{,}96$ ni qo‘llab, ishonch intervallarini hisoblaymiz:

$$\text{nuqtaviy baho} \pm z^\star \times SX \quad \rightarrow \quad 0{,}82 \pm 1{,}96 \times 0{,}012 \quad \rightarrow \quad (0{,}796; 0{,}844)$$

Biz 95% ishonch bilan 2014-yil oktyabr oyida Ebola bilan kasallangan bemor bilan muloqotda bo‘lgan har qanday kishiga karantin joriy etishni qo‘llab-quvvatlagan nyu-yorklik kattalarning ulushi 0,796 va 0,844 orasida bo‘lgan deb ta’kidlaymiz.

5.14-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Quyidagi savollarga 5.13-misoldagi ishonch intervallari asosida javob bering:[8]

(a) Ushbu kontekstdagi “95% lik ishonch” nimani anglatadi?

(b) Sizningcha, ushbu ishonch intervallari bugungi kunda nyuyorkliklarning fikrlarini ifodalashda hamon to‘g‘rimi?

5.15-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

“Pew Research” shamol energiyasini kengaytirish haqida ham so‘rov o‘tkazdi va 84,8% respondentlar shamol turbinalaridan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlashlarini aytishdi.[9]

(a) Shamol turbinalaridan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlagan AQSh katta yoshlilarining ulushini normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqiymi?

(b) Shamol turbinalaridan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlovchilar ulushi uchun 99% lik ishonch intervallarini yarating.

Biz boshqa parametrlar, masalan, bosh to‘plam o‘rtacha qiymati uchun ham ishonch interval-

---

[8] (a) Agar biz ko‘plab shunday tanlanmalarni olsak va har biridan 95% lik ishonch intervallari yaratsak, ushbu oraliqlarning taxminan 95% qismi Ebola bilan muloqotda bo‘lgan har qanday kishiga karantin joriy etishni qo‘llab-quvvatlagan nyuyorklik kattalarning haqiqiy ulushini o‘z ichiga oladi.
(b) Shart emas. So‘rov jamoat xavfsizligiga katta xavf mavjud bo‘lgan bir paytda o‘tkazilgan. Endi odamlar vaqt o‘tishi bilan boshqacha fikrlashlari mumkin. Bugungi kunda nyuyorkliklarning ushbu masalaga oid fikrlarini baholamoqchi bo‘lsak, yangi so‘rov o‘tkazishimiz kerak bo‘ladi.

[9] (a) So‘rov tasodifiy tanlanmaga asoslangan va hisoblangan qiymatlar 10 dan kattadir ($1000 \times 0{,}848 = 848$ va $1000 \times 0{,}152 = 152$), shuning uchun bog‘liqsizlik va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilgan va $\hat{p} = 0{,}848$ ni normal taqsimot yordamida modellashtirish mumkin.
(b) 5.15-yo‘naltiruvchi mashq $\hat{p}$ ning normal taqsimotga mos kelishini tasdiqladi, shuning uchun biz ishonch intervallari formulasidan foydalanishimiz mumkin:

$$\text{nuqtaviy baho} \pm z^\star \times SX.$$

larini yaratishimiz mumkin. Bunday hollarda, ishonch intervallari bitta ulush kabi hisoblanadi. Nuqtaviy baho va xatolik chegarasining qo‘shilishi/ayirilishi kabi. Ushbu tafsilotlarni keyingi boblarda o‘rganamiz.

5.2.5 Ishonch intervallarini talqin qilish

Har bir misolda biz ishonch intervallarini ma’lumotlar kontekstida tavsifladik va biroz rasmiy tildan foydalanib ifodaladik:

Quyosh. Biz 2018-yilda AQSh katta yoshlilarining 87,1% dan 90,4% gacha bo‘lgan qismi quyosh energiyasidan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlaganligiga 90% ishonchdamiz.

Ebola. Biz 2014-yil oktyabr oyida Ebola bilan muloqotda bo‘lgan har qanday kishiga karantin joriy etishni qo‘llab-quvvatlagan nyuyorklik kattalarning ulushi 0,796 va 0,844 orasida ekanligiga 95% ishonchdamiz.

Shamol turbinalari. Biz 2018-yilda shamol turbinalaridan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlagan AQSh katta yoshlilarining ulushi 81,9% va 87,7% orasida ekanligiga 99% ishonchdamiz.

Birinchidan, bu bayonotlar har doim bosh to‘plam parametri haqida ekanligiga e’tibor bering, ya’ni quyosh va shamol energiyasi so‘rovlari uchun *barcha* AQSh katta yoshlilari yoki Ebola karantini so‘rovi uchun *barcha* nyuyorklik kattalarni o‘z ichiga oladi.

Shuningdek, biz yana bir keng tarqalgan xatodan qochdik: noto‘g‘ri til ishlatib, ishonch intervallarini bosh to‘plam parametrini ma’lum bir ehtimollik bilan o‘z ichiga oladi deb tavsiflash. Ehtimollik talqini qilish keng tarqalgan xato bo‘lib, garchi bu bosh to‘plam parametrining berilgan oraliqda ekanligini tasavvur qilish foydali bo‘lsa-da, ishonch darajasi faqat parametrning berilgan oraliqda ekanligining qanchalik ishonarli ekanligini miqdoriy baholaydi.

Ishonch intervallarining yana bir muhim jihati shundaki, ular faqat *bosh to‘plam parametri haqida* gapiradi. Ishonch intervallari alohida kuzatuvlar yoki nuqtaviy baholar haqida hech narsa demaydi. Ular faqat bosh to‘plam parametrlari uchun ishonarli qiymatlar diapazonini ta’minlaydi.

Nihoyat, biz muhokama qilgan usullar faqat tanlanma xatoliklarga taalluqli ekanligini yodda tuting, tarafkashlikka emas. Agar ma’lumotlar to‘plami bosh to‘plam parametrini tizimli ravishda kam baholashga (yoki ortiqcha baholashga) olib keladigan tarzda yig‘ilgan bo‘lsa, biz muhokama qilgan texnikalar bu muammoni hal qilmaydi. Buning o‘rniga, biz misollarda tarafkashlikka qarshi kurashish uchun ehtiyotkorlik bilan ma’lumot yig‘ish protseduralariga tayanamiz, bu esa ma’lumotlar olimlari tomonidan keng qo‘llaniladigan amaliyotdir.

Y

5.16-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Quyosh energiyasi so‘rovi uchun 87,1% dan 90,4% gacha bo‘lgan 90% lik ishonch intervallarini ko‘rib chiqing. Agar biz so‘rovni qayta o‘tkazsak, yangi so‘rov ulushi 87,1% va 90,4% orasida bo‘lishiga 90% ishonchdamiz deb ayta olamizmi?[10]

Mashqlar

5.7 Surunkali kasallik, 1-qism. 2013-yilda “Pew Research” shunday xabar bergan edi: “AQShdagi kattalarning 45%i bir yoki undan ko‘p surunkali kasallik bilan yashayotganliklarini ma’lum qilganlar”.[11] Biroq, bu qiymat namunaga asoslangan bo‘lib, bu o‘z-o‘zidan aholi parametri uchun mukammal baho bo‘lmasligi mumkin. Tadqiqot taxminan 1,2% standart xatolik haqida xabar bergan va bu sharoitda normal modelni

Ushbu holatda nuqtaviy baho $\hat{p} = 0{,}848$ ga teng. 99% lik ishonch intervallari uchun $z^\star = 2{,}58$. Standart xatolikni hisoblash: $SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0{,}848(1-0{,}848)}{1000}} = 0{,}0114$. Yakunda oraliqlarni hisoblaymiz: $0{,}848 \pm 2{,}58 \times 0{,}0114 \rightarrow (0{,}8186; 0{,}8774)$. Oraliqlarni talqin qilish muhim: biz 99% ishonch bilan 2018-yilda shamol turbinalaridan foydalanishni kengaytirishni qo‘llab-quvvatlagan AQSh katta yoshlilarining ulushi 81,9% va 87,7% orasida ekanligini ta’kidlaymiz.

[10] Yo‘q, ishonch intervallari faqat parametr uchun ishonarli qiymatlar diapazonini taqdim etadi, kelajakdagi nuqtaviy baholar uchun emas.

[11] Pew Research Center, Washington, D.C. The Diagnosis Difference, November 26, 2013.

oqilona qo‘llash mumkin. AQShdagi kattalarning bir yoki undan ko‘p surunkali kasallikka ega bo‘lish ehtimoli uchun 95% ishonch oralig‘ini hosil qiling. Shuningdek, ushbu ishonch oralig‘ini tadqiqot kontekstida izohlang.

5.8 “Twitter”foydalanuvchilari va yangiliklar, 1-qism. 2013-yilda o‘tkazilgan so‘rov natijasida shunday ma’lumot berilgan: AQShdagi kattalar orasidagi “Twitter” foydalanuvchilarining 52%i “Twitter” orqali hech bo‘lmaganda bir qism yangiliklarni olishadi.[12]. Ushbu baho uchun standart xatolik 2,4% bo‘lib, namunaviy ulushni modellashtirish uchun normal taqsimotdan foydalanish mumkin. AQShdagi kattalar “Twitter” foydalanuvchilari orasida “Twitter” orqali yangilik oladiganlar ulushi uchun 99% ishonch oralig‘ini hosil qiling va uni kontekstda izohlang.

5.9 Surunkali kasallik, 2-qism. 2013-yilda Pew Research Foundation shunday xabar bergan edi: “AQShdagi kattalarning 45%i bir yoki undan ko‘p surunkali kasallik bilan yashashini ma’lum qilganlar”, va ushbu baho uchun standart xatolik 1,2% edi. Quyidagi bayonotlarning har birini to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri sifatida baholang. Har bir javobingizga izoh bering.

(a) Biz aniq ayta olamizki, 5.7-mashqdagi ishonch oralig‘i AQSh kattalari orasida surunkali kasallikdan aziyat chekadiganlarning haqiqiy foizini o‘z ichiga oladi.

(b) Agar ushbu tadqiqotni 1000 marta takrorlagan holda, har bir tadqiqot uchun 95% ishonch oralig‘ini hosil qilsak, taxminan 950 ta ishonch oralig‘i AQSh kattalari orasida surunkali kasallikdan aziyat chekadiganlarning haqiqiy ulushini o‘z ichiga oladi.

(c) Ushbu so‘rov statistik jihatdan ishonarli dalillarni taqdim etadi ($\alpha = 0{,}05$ darajasida) va AQSh kattalari orasida surunkali kasallikdan aziyat chekadiganlarning foizi 50% dan kam ekanligini ko‘rsatadi.

(d) Standart xatolik 1,2% bo‘lganligi sababli, tadqiqotdagi odamlarning faqat 1,2%i o‘z javoblaridan noaniq ekanliklarini bildirgan.

5.10 “Twitter” foydalanuvchilari va yangiliklar, 2-qism. 2013-yilda o‘tkazilgan so‘rov natijasida shunday ma’lumot berilgan: AQShdagi kattalar “Twitter” foydalanuvchilarining 52%i “Twitter” orqali hech bo‘lmaganda bir qism yangiliklarni olishadi, va ushbu baho uchun standart xatolik 2,4% edi. Quyidagi bayonotlarning har birini to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri sifatida baholang. Har bir javobingizga izoh bering.

(a) Ushbu ma’lumot AQShdagi kattalar “Twitter”foydalanuvchilarining yarmidan ko‘pi “Twitter”orqali yangilik olishi haqida statistik jihatdan ishonarli dalillarni taqdim etadi. $\alpha = 0{,}01$ darajasidan foydalaning. (Ushbu qism 5.3 bo‘limidan olingan tushunchalardan foydalanadi va kelajakdagi nashrda aniqlanadi.)

(b) Standart xatolik 2,4% bo‘lganligi sababli, barcha AQSh kattalar “Twitter”foydalanuvchilarining 97,6%i tadqiqotga kiritilgan deb xulosa qilishimiz mumkin.

(c) Agar bahoning standart xatolikni kamaytirmoqchi bo‘lsak, kamroq ma’lumot yig‘ishimiz kerak.

(d) AQSh kattalar “Twitter”foydalanuvchilarining “Twitter”orqali yangilik olish foizi uchun 90% ishonch oralig‘i hosil qilsak, bu ishonch oralig‘i 99% ishonch oralig‘iga nisbatan kengroq bo‘ladi.

5.11 Registratsiya bo‘limida kutish, 1-qism. Kasalxona administratori kutish vaqtlarini yaxshilashni maqsad qilib, o‘rtacha favqulodda yordam xonasi kutish vaqtini baholashga qaror qiladi. U 64 bemorni tasodifiy oddiy namunani yig‘ib, ularning RBga ro‘yxatdan o‘tgan vaqtidan shifokor tomonidan birinchi marta ko‘rilgan vaqtgacha bo‘lgan vaqtni (daqiqalarda) aniqlaydi. Ushbu namuna asosida 95% ishonch oralig‘i (128 daqiqa, 147 daqiqa) bo‘lib, bu o‘rtacha qiymat uchun normal modelga asoslangan. Quyidagi bayonotlarning har birini to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri sifatida baholang va o‘z fikringizni tushuntiring.

(a) Biz 64 nafar RB bemorining o‘rtacha kutish vaqti 128 va 147 daqiqalar orasida ekanligiga 95% ishonamiz.

(b) Biz ushbu kasalxonadagi barcha RB bemorlarining o‘rtacha kutish vaqti 128 va 147 daqiqalar orasida ekanligiga 95% ishonamiz.

(c) Tasodifiy namunalarining 95%i uchun namuna o‘rtacha qiymati 128 va 147 daqiqalar orasida bo‘ladi.

(d) 99% ishonch oralig‘i 95% ishonch oralig‘iga qaraganda torroq bo‘ladi, chunki biz bahomizga ko‘proq ishonch hosil qilishimiz kerak.

(e) Xatolik darajasi 9,5 va namuna o‘rtacha qiymati 137,5.

(f) Agar 95% ishonch oralig‘i xatolik darajasni hozirgi qiymatidan ikki barobar kamaytirishni istasak, namunani ikki barobar oshirishimiz kerak bo‘ladi. (Ishora: O‘rtacha qiymat uchun xatolik darajai namunadagi xatolik darajasi bilan bir xil tarzda o‘lchanadi.)

5.12 Ruhiy salomatlik. Umumiy ijtimoiy tadqiqot quyidagi savolni berdi: ”Oxirgi 30 kun davomida stress, depressiya va his-tuyg‘ular bilan bog‘liq muammolarni o‘z ichiga olgan holda, sizning ruhiy salomatligingiz

[12]Pew Research Center, Washington, D.C. Twitter News Consumers: Young, Mobile and Educated, November 4, 2013.

qanchadan-qancha kun yaxshi bo‘lmagan?” 1151 AQSh aholisi javoblariga asoslanib, tadqiqot 2010-yilda 3,40 kundan 4,24 kungacha bo‘lgan 95% ishonch oralig‘ini xabar qildi.

(a) Ushbu oralig‘ni ma’lumotlar kontekstida sharhlang.

(b) ”95% ishonch” nimani anglatadi? Ushbu so‘rovni ilova kontekstida tushuntiring.

(c) Tadqiqotchilar ushbu oralig‘ uchun 99% ishonch darajasi ko‘proq mos keladi deb o‘ylashsa, yangi oralig‘ 95% ishonch oralig‘idan torroqmi yoki kengroq bo‘ladimi?

(d) Agar yangi so‘rov 500 amerikalik bilan o‘tkazilsa, baho uchun standart xatolik kattaroqmi, kichikroqmi yoki taxminan bir xil bo‘ladimi?

5.13 Veb-saytga ro‘yxatdan o‘tish. Veb-sayt birinchi marta tashrif buyuruvchilar uchun ro‘yxatdan o‘tishni oshirishga harakat qilmoqda va ushbu tashrif buyuruvchilarning 1%iga yangi sayt dizaynini ko‘rsatmoqda. Bir oy davomida yangi dizaynni ko‘rgan 752 tasodifiy tanlangan tashrif buyuruvchilardan 64 tasi ro‘yxatdan o‘tgan.

(a) Ishonch oralig‘ini qurish uchun zarur bo‘lgan shartlarni tekshiring.

(b) Standart xatolikni hisoblang.

(c) Saytning yangi dizayni ostida birinchi marta tashrif buyuruvchilarning ro‘yxatdan o‘tish ulushi uchun 90% ishonch oralig‘ini tuzing va sharhlang (vaqt o‘tishi bilan yangi tashrif buyuruvchilarning xatti-harakatlari barqaror bo‘ladi deb faraz qiling).

5.14 Kuponlar tashriflarni oshirmoqda. Do‘kon yil davomida 603 nafar xaridorni tasodifiy tanlab, ularning 142 nafari pochta orqali olgan kupon tufayli tashrif buyurganligini aniqladi. Yil davomida kupon sabab tashrif buyurgan barcha xaridorlarning ulushi uchun 95% ishonch oralig‘ini tuzing.

5.3 Nisbat uchun gipotezalar tekshiruvi

Quyidagi savol Hans Rosling, Anna Rosling Rönnlund va Ola Rosling tomonidan yozilgan *Factfulness* kitobidan olingan:

> *Bugungi kunda dunyodagi 1 yoshli bolalarning qancha qismi biron-bir kasallikka qarshi emlangan:*
>
> *a. 20%*
> *b. 50%*
> *c. 80%*

O‘zingizning javobingizni (yoki taxminingizni) yozing va tayyor bo‘lganingizda, javobni izohda toping.[13]

Ushbu bo‘limda biz gipoteza testlari bilan tanishamiz, bu esa dunyo sog‘lig‘i haqidagi ushbu va boshqa savollarga 4 yillik kollej diplomiga ega odamlar qanday javob berganligini ko‘rib chiqish orqali amalga oshiriladi. Gipoteza testlari qarama-qarshi g‘oyalar va da’volarni sinchkovlik bilan baholash uchun ishlatiladigan asosiy metodologiyadir.

5.3.1 Gipoteza testlash asoslari

Biz dunyo sog‘lig‘i va rivojlanishi haqida odamlar qanchalik ma’lumotga ega ekanligini tushunishni istaymiz. Agar biz ko‘p variantli dunyo sog‘lig‘i savolini olsak, quyidagilarni tushunishni xohlaymiz:

H_0: Odamlar ushbu mavzularni hech qachon o‘rganmaydi va ularning javoblari tasodifiy taxminlarga tengdir.

H_A: Odamlarda bu savollarga tasodifiy taxminlardan yaxshiroq javob berishga yordam beradigan bilimlar mavjud, yoki ular noto‘g‘ri ma’lumotga ega bo‘lib, tasodifiy taxminlardan ham yomonroq javob berishadi.

[13] To‘g‘ri javob (c): bugungi kunda dunyodagi 1 yoshli bolalarning 80% qismi biron-bir kasallikka qarshi emlangan.

Ushbu qarama-qarshi g‘oyalar **gipotezalar** deb ataladi. Biz H_0 ni nol gipoteza deb, H_M ni esa muqobil gipoteza deb ataymiz. Agar H_0 kabi 0 indeksdan foydalansa, ma’lumotlar olimlari uni “noll” (masalan, H_0 “H-nol” deb o‘qiladi) deb talaffuz qilishadi.

NOL VA MUQOBIL GIPOTEZALAR

Nol gipoteza (H_0) ko‘pincha skeptik nuqtai nazar yoki sinovdan o‘tkazilishi kerak bo‘lgan da’voni ifodalaydi. **Muqobil gipoteza (H_M)** ko‘rib chiqilayotgan muqobil da’voni ifodalaydi va ko‘pincha mumkin bo‘lgan parametr qiymatlari diapazoni bilan ifodalanadi.

Ma’lumotlar olimlari sifatida biz skeptik rolini o‘ynaymiz: muqobil gipotezani qabul qilishdan oldin, biz kuchli qo‘llab-quvvatlovchi dalillarni ko‘rishimiz kerak.

Nol gipoteza ko‘pincha skeptik pozitsiyani yoki “farq yo‘q” nuqtai nazarini ifodalaydi. Bizning birinchi misolimizda, Roslinglarning bolalar emlanishi haqidagi savolida, odatiy odamning tasodifiy taxminlardan boshqacha javob berish-bermasligini ko‘rib chiqamiz.

Muqobil gipoteza, odatda, yangi yoki kuchliroq nuqtai nazarni ifodalaydi. Bolalar emlanishi haqidagi savol uchun, odamlarning tasodifiy taxminlardan yaxshiroq javob berishi juda qiziqarli bo‘ladi, chunki bu odatiy odamning dunyo sog‘lig‘i statistikasi haqida nimadir bilishini anglatadi. Shuningdek, odamlarning tasodifiy taxminlardan *yomonroq* javob berishini bilish ham juda qiziq bo‘ladi, bu esa odamlar dunyo sog‘lig‘i haqida noto‘g‘ri ma’lumotga ega ekanligini ko‘rsatadi.

Gipoteza testlash asoslari juda umumiy vositadir va biz uni ko‘pincha sezmagan holda qo‘llaymiz. Agar biror kishi biroz ishonarsiz da’vo qilsa, biz dastlab skeptik bo‘lamiz. Biroq, agar ushbu da’voni qo‘llab-quvvatlovchi yetarlicha dalillar mavjud bo‘lsa, biz skeptitsizmni chetga suramiz va nol gipotezani muqobil gipoteza foydasiga rad etamiz. Gipoteza testlash tamoyillari AQSh sud tizimida ham mavjud.

Y **5.17-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

AQSh sudida ayblanuvchi haqida ikkita da’vo ko‘rib chiqiladi: u yoki aybsiz, yoki aybdor. Agar ushbu da’volarni gipoteza asosida tartibga solsangiz, qaysi biri nol gipoteza, qaysi biri muqobil gipoteza bo‘ladi?[14]

Hay’at a’zolari dalillarni tekshirib, ular ayblanuvchining aybdorligini ishonarli darajada ko‘rsatadimi yoki yo‘qmi, degan xulosaga keladilar. Agar hay’at a’zolari aybdorlik haqida asosli shubhasiz ishontirilmasa, bu ularning ayblanuvchini aybsiz deb hisoblashlarini anglatmaydi. Xuddi shunday, gipoteza testlashda ham: *hatto biz nol gipotezani rad etishda muvaffaqiyatsizlikka uchrasak ham, odatda nol gipotezani haqiqat sifatida qabul qilmaymiz.* Muqobil gipoteza uchun kuchli dalillar topa olmaslik nol gipotezani qabul qilish bilan teng emas.

Roslinglarning bolalar emlanishi haqidagi savolini ko‘rib chiqsak, nol gipoteza kollej ma’lumotiga ega kattalar tasodifiy taxminlar kabi aniq javob berishlarini ifodalaydi. Ya’ni, 1 yoshli bolalarning 80% i biron-bir kasallikka qarshi emlanganligini to‘g‘ri tanlagan respondentlar ulushi p taxminan 33,3% (yoki aniqroq qilib aytganda, 1 dan 3) ga teng.

Muqobil gipoteza esa ushbu ulushning 33,3% dan boshqa qiymatga ega ekanligini ko‘rsatadi. Ushbu gipotezalarni so‘zlar bilan yozish foydali bo‘lsa-da, ularni matematik belgilar yordamida ifodalash ham foydali bo‘lishi mumkin:

H_0**:** $p = 0{,}333$

H_M**:** $p \neq 0{,}333$

Ushbu gipoteza tuzilmasida biz p bosh to‘plam parametri haqida xulosa qilishni xohlaymiz. Biz parametrni solishtirayotgan qiymat **nol qiymat** deb ataladi, bu holda 0,333 ga teng. Nol qiymat odatda parametr bilan bir xil belgi bilan, lekin pastki indeks ‘0’ bilan belgilanadi. Ushbu holda nol qiymat $p_0 = 0{,}333$ (“p-noll teng 0,333” deb o‘qiladi).

M **5.18-MISOL**

Odamlarning to‘g‘ri javob bergan ulushi *aniq* 33,3% ekanligi mumkin emasdek tuyuladi. Agar biz nol gipotezaga ishonmasak, uni shunchaki rad etishimiz kerakmi?

[14] Hay’at dalillar shunchalik ishonarli (kuchli) ekanligini ko‘rib chiqadi, ular ayblanuvchining aybdorligi haqida hech qanday asosli shubha qoldirmaydi; bunday holda, hay’at aybsizlikni (nol gipotezani) rad etadi va ayblanuvchining aybdorligini (muqobil gipotezani) tan oladi.

Yo‘q. Biz ulushning aniq 33,3% ekanligiga ishonmasak-da, gipoteza testlash asoslari nol gipotezani rad etishdan oldin kuchli dalillar bo‘lishini talab qiladi va bu orqali qiziqroq xulosaga kelish mumkin.

Axir, agar biz ulushning *aniq* 33,3% ekanligiga ishonmasak ham, bu bizga foydali ma’lumot bermaydi! Biz hali ham dastlabki savol bilan qolamiz: odamlar Roslinglarning savoliga tasodifiy taxminlardan yaxshiroq yoki yomonroq javob berishadimi? Ma’lumotlar bir yo‘nalishda kuchli ko‘rsatma bermasa, H_0 ni rad etish na qiziqarli, na foydali bo‘ladi.

Y **5.19-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Yana bir real hayotiy gipoteza testlash misoli bu yangi dori ma’lum bir kasallikni davolashda mavjud doridan yaxshiroq yoki yomonroq ekanligini baholashdir. Ushbu holatda nol va muqobil gipotezalar uchun nimadan foydalanishimiz kerak?[15]

5.3.2 Ishonch intervallaridan foydalanib gipotezalarni testlash

Biz `rosling_responses` ma’lumotlar to‘plamini ishlatib, kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan kattalar orasida 1 yoshli bolalarning 80% i biron-bir kasallikka qarshi emlanganligini to‘g‘ri javob berganlarning ulushi 33,3% dan farqlanishini baholash uchun gipoteza testini o‘tkazamiz. Ushbu ma’lumotlar to‘plami 50 kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan kattalarning javoblarini jamlaydi. Ushbu 50 kishidan 24% respondentlar savolga to‘g‘ri javob berishgan.

Hozirgacha bizning muhokamalarimiz falsafiy edi. Biroq, endi ma’lumotlarga ega bo‘lganimiz uchun, quyidagi savolni berishimiz mumkin: ma’lumotlar barcha kollej ma’lumotiga ega kattalarning ushbu savolga to‘g‘ri javob berish ulushi 33,3% dan farqlanishiga kuchli dalillarni taqdim etadimi?

5.1-bo‘limda biz bir tanlanmadan ikkinchisiga o‘zgarishlar bo‘lishini o‘rgandik va bizning tanlanma ulushimiz, $\hat{p}$, aynan p ga teng bo‘lishi ehtimoli kam, ammo biz p haqida xulosa qilishni istaymiz. Bizda bir muammo mavjud: 24% va 33,3% orasidagi bu farq shunchaki tasodif tufayli yuzaga kelganmi yoki ma’lumotlar bosh to‘plamning ulushi 33,3% dan farqlanishini ko‘rsatuvchi kuchli dalillarni taqdim etadimi?

5.2-bo‘limda biz ishonch intervallari yordamida baholashdagi noaniqlikni qanday miqdoriy baholashni o‘rgandik. O‘zgaruvchanlikni o‘lchashning ushbu usuli gipoteza testlash uchun ham foydali bo‘lishi mumkin.

M **5.20-MISOL**

Tanlanma ma’lumotlaridan foydalanib p uchun ishonch intervallarini tuzish mantiqiy ekanligini tekshiring va agar shunday bo‘lsa, 95% lik ishonch intervallarini yarating.

$\hat{p}$ ni deyarli normal deb hisoblash shartlari bajarilgan: ma’lumotlar oddiy tasodifiy tanlanmadan olingan (bog‘liqsizlik sharti bajarilgan) va $n\hat{p} = 12$ hamda $n(1-\hat{p}) = 38$ ikkalasi ham kamida 10 ga teng (muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti).

Ishonch intervallarini yaratish uchun biz nuqtaviy bahoni ($\hat{p} = 0{,}24$), 95% ishonch darajasi uchun kritik qiymatni ($z^\star = 1{,}96$) va $\hat{p}$ ning standart xatolikni ($SX_{\hat{p}} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} = 0{,}060$) aniqlashimiz kerak. Ushbu komponentlardan foydalanib, p uchun ishonch intervallari quyidagicha tuziladi:

$$\hat{p} \pm z^\star \times SX_{\hat{p}}$$
$$0{,}24 \pm 1{,}96 \times 0{,}060$$
$$(0{,}122; 0{,}358)$$

Biz 95% ishonch bilan aytishimiz mumkinki, barcha kollej ma’lumotiga ega kattalarning bolalar emlanishi haqidagi ushbu savolga to‘g‘ri javob bergan ulushi 12,2% va 35,8% orasida.

Nol gipotezaning gipoteza testidagi qiymati $p_0 = 0{,}333$, u ishonch intervallari orqali topilgan ishonarli qiymatlar diapazoniga kirgani uchun biz nol qiymatni ishonarsiz deb ayta olmaymiz.[16] Bu shuni anglatadiki, ma’lumotlar kollej ma’lumotiga ega kattalarning tasodifiy taxminlardan boshqacha

[15] Ushbu holatda nol gipoteza (H_0) *farq yo‘qligi*ni bildiradi: dorilar bir xil darajada samarali. Muqobil gipoteza (H_M) esa yangi dorining asl doriga nisbatan boshqacha ishlashini, ya’ni yaxshiroq yoki yomonroq ishlashini bildiradi.

[16] Bu usul biroz noaniq deb baholanishi mumkin. Keyingi bir necha betlarda ko‘ramizki, gipoteza testlari kontekstida standart xatolik biroz boshqacha hisoblanadi.

javob berishganligini ko‘rsatuvchi yetarli dalillarni taqdim etmaydi, va biz nol gipotezani, H_0 ni, rad eta olmaymiz.

M

5.21-MISOL

Kollej ma’lumotiga ega kattalar bolalar emlanishi haqidagi savolga shunchaki taxmin bilan javob bergan deb xulosa qilishimiz mumkin emasligini tushuntiring.

Biz H_0 ni rad eta olmaganimiz, nol gipoteza to‘g‘ri ekanligini anglatmaydi. Ehtimol, haqiqiy farq mavjud bo‘lgan bo‘lishi mumkin, lekin biz 50 kabi nisbatan kichik tanlanmada uni aniqlay olmadik.

STATISTIKADA IKKI MARTA INKOR ISHLATILISHI MUMKIN

Ko‘plab statistik izohlarimizda ikki marta inkordan foydalanamiz. Masalan, biz nol gipoteza *ishonarsiz emas* yoki biz nol gipotezani *rad eta olmadik* deb aytishimiz mumkin. Ikki marta inkor bir pozitsiyani rad etmayotgan bo‘lsak-da, uning to‘g‘ri ekanligini ham tasdiqlamayotganimizni bildirish uchun ishlatiladi.

Y

5.22-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Keling, Roslinglar tomonidan berilgan ikkinchi savolga o‘taylik:

> *Bugungi kunda dunyoda 0-15 yosh oralig‘ida 2 milliard bola bor, 2100-yilda Birlashgan Millatlar Tashkiloti prognoziga ko‘ra, bolalar soni qancha bo‘ladi?*
>
> *a. 4 milliard.*
> *b. 3 milliard.*
> *c. 2 milliard.*

Kollej ma’lumotiga ega kattalar ushbu savolda tasodifiy taxminlardan yaxshiroq natija ko‘rsatganmi-yo‘qligini baholash uchun mos gipotezalarni tuzing. Bundan tashqari, izohdan javobni tekshirmasdan oldin, to‘g‘ri javobni taxmin qilib ko‘ring![17]

Y

5.23-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Bu safar biz 228 kollej ma’lumotiga ega bo‘lgan kattalar orasidan tanlanma oldik, ulardan 34 nafari (14,9%) 5.22-yo‘naltirilgan mashqdagi savolga to‘g‘ri javob berdi: 2 milliard. Tanlanma ulushini normal taqsimot yordamida modellashtira olamizmi va ishonch intervallarini tuza olamizmi?[18]

M

5.24-MISOL

2100-yilda bolalar soni haqidagi savolga to‘g‘ri javob bergan kollej ma’lumotiga ega kattalarning ulushi uchun 95% lik ishonch intervallarini hisoblang va 5.22-yo‘naltirilgan mashqdagi gipotezalarni baholang.

Standart xatolikni hisoblash uchun yana p o‘rniga $\hat{p}$ dan foydalanamiz:

$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}149(1-0{,}149)}{228}} = 0{,}024 \ .$$

5.23-yo‘naltirilgan mashqda $\hat{p}$ ni normal taqsimot yordamida modellashtirish mumkinligini topdik,

[17] Mos gipotezalar quyidagicha:
H_0: To‘g‘ri javob beruvchilar ulushi tasodifiy taxminlar bilan bir xil, ya’ni 1 dan 3, yoki $p = 0{,}333$.
H_M: To‘g‘ri javob beruvchilar ulushi tasodifiy taxminlardan farq qiladi, ya’ni $p \neq 0{,}333$.
Savolga to‘g‘ri javob: 2 milliard. Dunyo aholisi o‘sishi prognoz qilinayotgan bo‘lsa-da, o‘rtacha yosh ham oshishi kutilmoqda. Bu shuni anglatadiki, aholi sonining ko‘payishi asosan yoshi katta guruhlarda sodir bo‘ladi, ya’ni ko‘pchilik hududlarda odamlarning umr ko‘rish davomiyligi oshishi prognoz qilinmoqda.

[18] Ikkala shartni tekshiramiz va ular bajariladi, shuning uchun $\hat{p}$ uchun normal taqsimotdan foydalanish mantiqan to‘g‘ri bo‘ladi:
Bog‘liqsizlik. Ma’lumotlar oddiy tasodifiy tanlanmadan olinganligi sababli, kuzatuvlar bog‘liqsiz.
Muvaffaqiyatsizlik-sharti. Tekshirish uchun p o‘rniga $\hat{p}$ dan foydalanamiz: $n\hat{p} = 34$ va $n(1-\hat{p}) = 194$. Ikkalasi ham 10 dan katta, shuning uchun muvaffaqiyatsizlik-sharti bajarilgan.

bu esa 95% lik ishonch intervallarini to‘g‘ri qurish imkonini beradi:

$$\hat{p} \pm z^\star \times SX \quad \to \quad 0{,}149 \pm 1{,}96 \times 0{,}024 \quad \to \quad (0{,}103; 0{,}195)$$

Nol qiymat, $p_0 = 0{,}333$, ushbu ishonch intervallarida yo‘qligi sababli, 0,333 ulushning bosh to‘plam proporsiyasi sifatida mavjud bo‘lishi mumkin emas va biz nol gipotezani rad etamiz. Bu shuni anglatadiki, ma’lumotlar kollej ma’lumotiga ega kattalarning 2100-yildagi bolalar soni haqidagi savolga tasodifiy taxminlardan farqli javob berishini ko‘rsatadigan statistik jihatdan ahamiyatli dalillarni taqdim etadi. 95% lik ishonch intervallarining to‘liq qismi 0,333 dan pastda ekanligini hisobga olsak, biz kollej ma’lumotiga ega kattalar ushbu savolda tasodifiy taxminlardan *yomonroq* natija ko‘rsatgan degan xulosaga kelishimiz mumkin.

Bir nozik jihat shundaki, biz 95% lik ishonch intervallaridan foydalandik. Agar biz 99% yoki hatto 99,9% ishonch darajasini ishlatgan bo‘lsak, xulosa o‘zgarishi mumkin edi. Shuning uchun, ishonch intervallari asosida xulosa chiqarishda, qanday ishonch darajasidan foydalanganimizni aniq ko‘rsatishimiz muhim.

Hypoteza sinovlari kamchiliklardan holi emas: statistik hipoteza testida ma’lumotlarga asoslangan noto‘g‘ri qarorlar qabul qilishimiz mumkin. Masalan, sud tizimida aybsiz odamlar noto‘g‘ri hukm qilinishi va aybdorlar esa jazodan qutulib ketishi mumkin. Statistik hipoteza sinovlarida esa biz xatolik ehtimolini probabilistik ravishda baholash imkoniga egamiz.

5.3.3 Qaror xatolari

Gipoteza testlari xatosiz emas: ma’lumotlarga asoslanib statistik gipoteza testida noto‘g‘ri qaror qabul qilishimiz mumkin. Masalan, sud tizimida ba’zan aybsiz odamlar nohaq hukm qilinadi, aybdorlar esa ba’zan jazodan qutulib qoladi. Statistik gipoteza testlarining muhim jihatlaridan biri shundaki, xulosalarimizda qanchalik tez-tez xato qilishimizni ehtimollik nuqtayi nazaridan baholash uchun zarur vositalarga egamiz.

Yodingizda bo‘lsin, o‘zaro raqobat qiladigan ikkita gipoteza mavjud: nol gipoteza va muqobil gipoteza. Gipoteza testida biz ulardan qaysi biri to‘g‘ri bo‘lishi mumkinligi haqida xulosa qilamiz, ammo noto‘g‘ri tanlov qilishimiz ham mumkin. To‘rtta mumkin bo‘lgan holat mavjud bo‘lib, ular 5.8-rasmda jamlangan.

		Sinov natijasi	
		H_0 rad etilmaydi	H_0 H_M foydasiga rad etiladi
Haqiqat	H_0 haqiqat	to‘g‘ri	**1-tur xatolik**
	H_M haqiqat	**2-tur xatolik**	to‘g‘ri

5.8-rasm. Gipoteza sinovlarining to‘rt xil ssenariysi.

1-tur xatolik H_0 to‘g‘ri bo‘lsa ham uni rad etishdan iborat. **2-tur xatolik** esa muqobil gipoteza H_M to‘g‘ri bo‘lsa ham H_0 ni rad etmaslikdir.

Y **5.25-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

AQSh sudida ayblanuvchi yoki aybsiz (H_0) yoki aybdor (H_M). 1-tur va 2-tur xatoliklar ushbu kontekstda nimani anglatadi? 5.8-rasm foydali bo‘lishi mumkin.[19]

M **5.26-MISOL**

AQSh sudlarida 1-tur xatoliklarni qanday kamaytirish mumkin? Bu 2-tur xatoliklar darajasiga qanday ta’sir qiladi?

1-tur xatolik darajasini kamaytirish uchun biz aybdorlik mezonini “asosli shubhasiz”dan ”tasavvur qilish qiyin darajada shubhasiz”ga oshirishimiz mumkin edi. Natijada, noto‘g‘ri hukm qilinadigan odamlar soni kamayadi. Ammo, bu haqiqiy aybdorlarni hukm qilishni qiyinlashtiradi, natijada

[19] 1-tur xatolik sud tomonidan aybsiz ayblanuvchini noto‘g‘ri hukm qilishidir. Bu xatolik faqat H_0 rad etilganda mumkin bo‘ladi.

2-tur xatolik esa sud H_0 ni rad etmasligi (ya’ni aybdorni oqlashi), ammo ayblanuvchi aslida aybdor bo‘lishi (H_M to‘g‘ri bo‘lishi) holatidir. Bu xatolik faqat H_0 rad etilmagan hollarda yuzaga keladi.

2-tur xatoliklar soni oshadi.

Y **5.27-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

AQSh sudlarida 2-tur xatoliklar darajasini qanday kamaytirish mumkin? Bu 1-tur xatoliklar darajasiga qanday ta’sir qiladi?[20]

5.25-5.27-mashqlar bizga muhim saboq beradi: bir turdagi xatoliklarni kamaytirishga urinish ko‘pincha boshqa turdagi xatoliklarni oshiradi.

Gipoteza sinovlari nol gipotezani (H_0) rad etish yoki rad etmaslik atrofida qurilgan. Ya’ni, H_0 ni rad etish uchun bizda kuchli dalillar bo‘lishi kerak. Lekin *kuchli dalillar* aniq nimani anglatadi? Umumiy qoidaga ko‘ra, agar nol gipoteza haqiqatan to‘g‘ri bo‘lsa, H_0 ni noto‘g‘ri rad etish ehtimoli 5% dan oshmasligi kerak. Bu 0,05 ga teng **ahamiyatlilik darajasi** bilan mos keladi. Ya’ni, agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, ahamiyatlilik darajasi ma’lumotlar H_0 ni noto‘g‘ri rad etishimizga qanchalik tez-tez olib kelishini ko‘rsatadi. Biz ko‘pincha ahamiyatlilik darajasini α (yunon harfi alfa) orqali ifodalaymiz: $\alpha = 0{,}05$. Turli ahamiyatlilik darajalarining mosligini biz 5.3.5-bo‘limda muhokama qilamiz.

Agar biz 95% lik ishonch intervalidan foydalansak va nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, xatolik bosh to‘plam parametri va nuqta bahosi orasida 1,96 standart xatolikdan ortiq farq bo‘lganida sodir bo‘ladi. Bu holat taxminan 5% vaqt sodir bo‘ladi (2,5% har bir quyruqda). Xuddi shunday, hipotezani baholash uchun 99% lik ishonch intervalidan foydalanish $\alpha = 0{,}01$ ahamiyatlilik darajasiga teng.

Ishonch oralig‘i nol gipotezani rad etish yoki etmaslikni aniqlashda juda foydali. Biroq, ishonch intervaliga asoslangan yondashuv har doim barqaror bo‘lavermaydi. Keyingi bo‘limlarda, ba’zi hollarda ishonch intervalini tuzib bo‘lmasligini ko‘ramiz. Masalan, bir nechta ulushlar tengligini baholashni xohlaganimizda, ko‘p sonli ishonch intervallarini qanday qurish va solishtirish kerakligini aniqlash qiyin bo‘ladi.

Keyingi bo‘limda biz statistik vositalar qatoriga *p-qiymat* deb nomlangan statistikani qo‘shamiz. Bu vosita bizga dalil kuchini yaxshiroq tushunishga va keyingi bo‘limlarda murakkabroq ma’lumotlar ssenariylarida ishlash imkonini beradi.

5.3.4 p-qiymatdan foydalanib rasmiy sinov

P-qiymat nol gipotezaga qarshi va muqobil gipoteza foydasiga dalil kuchini aniqlash usulidir. Statistik gipoteza sinovlari odatda p-qiymat usulidan foydalanadi, ishonch intervaliga asoslangan qarorlar qabul qilishdan ko‘ra.

P-QIYMAT

p-qiymat bu nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lganda, hozirgi ma’lumotlar to‘plamimizdek yoki undan ko‘ra muqobil gipotezani qo‘llab-quvvatlaydigan ma’lumotlarni kuzatish ehtimoli. Biz odatda ma’lumotlarning qisqacha statistikasi, ushbu bo‘limda tanlanma ulushi, yordamida p-qiymatni hisoblaymiz va gipotezalarni baholaymiz.

M **5.28-MISOL**

“Pew Research” tasodifiy ravishda 1000 amerikalik kattalardan energiya ishlab chiqarishda ko‘mirning ko‘proq ishlatilishini qo‘llab-quvvatlash yoki qarshi ekanliklarini so‘radi. Amerikalik kattalarning ko‘pchiligi ko‘mirning ko‘proq ishlatilishini qo‘llab-quvvatlaydimi yoki unga qarshimi ekanligini baholash uchun gipotezalarni tuzing.

Oddiy natija shundan iboratki, hech qanday ustunlik yo‘q: amerikaliklarning yarmi ko‘mirning ko‘proq ishlatilishini qo‘llab-quvvatlaydi, boshqa yarmi esa bunga qarshi. Muqobil gipoteza esa amerikaliklarning ko‘pchiligi bu masalada bir tarafga og‘ishini bildiradi (garchi biz qaysi tomonga ekanini bilmasak ham!). Agar p qo‘llab-quvvatlovchi ulushni ifodalasa, biz gipotezalarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

[20] 2-tur xatoliklarni kamaytirish uchun biz ko‘proq aybdorlarni hukm qilishni maqsad qilib qo‘yishimiz kerak. Aybdorlik mezonini ”asosli shubhasiz”dan ”kichik shubha mavjud bo‘lsa ham”ga tushirishimiz mumkin. Biroq, mezonni pasaytirish natijasida ko‘proq noto‘g‘ri hukmlar chiqarilishi mumkin, bu esa 1-tur xatoliklar darajasini oshiradi.

H_0: $p = 0{,}5$

H_M: $p \neq 0{,}5$

Bu holatda nol qiymati $p_0 = 0{,}5$ ga teng.

Hipotezalarni p-qiymat usulida ulushlar uchun baholashda biz muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti va bir ulushli holatda standart xatolikni hisoblash usullarini biroz o‘zgartiramiz. Bu o‘zgarishlar katta emas, ammo nol qiymat p_0 ni qanday ishlatishimizga e’tibor bering.

M

5.29-MISOL

“Pew Research” tadqiqoti ko‘rsatdiki, amerikalik kattalarning 37% ko‘mirning ko‘proq ishlatilishini qo‘llab-quvvatlaydi. Endi biz 37% nol gipotezadagi 50% dan haqiqiy farqni aks ettiradimi yoki yo‘qmi deb o‘ylaymiz. Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, $\hat{p}$ ning tanlanma taqsimoti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, bosh to‘plam ulushi nol qiymatiga teng bo‘ladi, ya’ni 0,5. Avval biz o‘rganganmizki, $\hat{p}$ ning tanlanma taqsimoti ikki shart bajarilganda normal bo‘ladi:

Bog‘liqsizlik. So‘rovnoma tasodifiy tanlanmaga asoslangan, shuning uchun bog‘liqsizlik sharti bajarilgan.

Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik. So‘rovnoma hajmi $n = 1000$ ga asoslanib, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilgan, chunki

$$np \overset{H_0}{=} 1000 \times 0{,}5 = 500 \qquad n(1-p) \overset{H_0}{=} 1000 \times (1 - 0{,}5) = 500$$

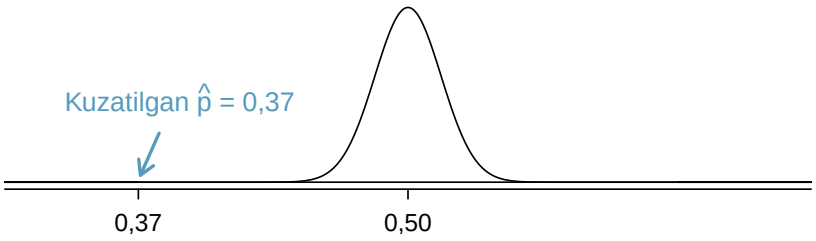
ikkisi ham 10 dan katta. E’tibor bering, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti nol qiymatdan, ya’ni $p_0 = 0{,}5$ dan foydalanib tekshirildi; bu ishonch intervalidan birinchi uslubiy farqdir.

Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, tanlanma taqsimoti shuni ko‘rsatadiki, $n = 1000$ kuzatuvlariga asoslangan tanlanma ulushi normal taqsimotga ega bo‘ladi. Keyin biz standart xatoni hisoblashimiz mumkin, bu yerda yana nol qiymat $p_0 = 0{,}5$ hisob-kitobda ishlatiladi:

$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \overset{H_0}{=} \sqrt{\frac{0{,}5 \times (1-0{,}5)}{1000}} = 0{,}016 \ .$$

Bu ishonch intervalidan boshqa uslubiy farqni belgilaydi: tanlanma taqsimoti nol ulush ostida aniqlanganligi sababli, hisoblashda $\hat{p}$ o‘rniga nol qiymat p_0 ishlatilgan.

Oxir-oqibat, agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, tanlanma ulushi 0,5 o‘rtacha va 0,016 standart xatolik bilan normal taqsimotga amal qiladi. Bu taqsimot 5.9-rasmda ko‘rsatilgan.



5.9-rasm. Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, bu normal taqsimot $\hat{p}$ taqsimotini ifodalaydi.

MUVAFFAQIYAT-MUVAFFAQIYATSIZLIKNI TEKSHIRISH VA $SX_{\hat{p}}$ NI HISOBLASH UCHUN YO‘RIQ

P-qiymat usulidan foydalanib gipoteza sinovini baholashda, biz $\hat{p}$ uchun shartlarni tekshiramiz va standart xatolikni tanlanma ulushi o‘rniga nol qiymat, p_0, yordamida tuzamiz.

P-qiymat yordamida gipoteza sinovini o‘tkazishda, biz nol gipoteza to‘g‘ri deb taxmin qilamiz. Bu ishonch intervalini hisoblashdagi yondashuvdan farq qiladi. Shu sababli, biz bu kontekstdagi shartlarni tekshirish va standart xatolikni hisoblashda $\hat{p}$ o‘rniga p_0 ni ishlatamiz.

Agar biz nol gipoteza ostidagi tanlanma taqsimotini aniqlasak, unga maxsus nom beriladi: **nol taqsimoti**. P-qiymat esa, agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, kuzatilgan $\hat{p}$ yoki undan ham ekstremlarini kuzatish ehtimolini bildiradi. P-qiymatni topish uchun, odatda, nol taqsimotini aniqlaymiz, keyin tanlanma ulushimizga mos keladigan quyruq maydonini ushbu taqsimotda topamiz.

5.30-MISOL

Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, $\hat{p}$ ning nol taqsimoti ostida 0,37 kabi yoki undan ham uzoqroq quyruq sohalarida joylashish ehtimolini aniqlang. Bu nol taqsimoti $\mu = 0{,}5$ o‘rtacha va $SX = 0{,}016$ standart xatolik bilan normal taqsimotdir.

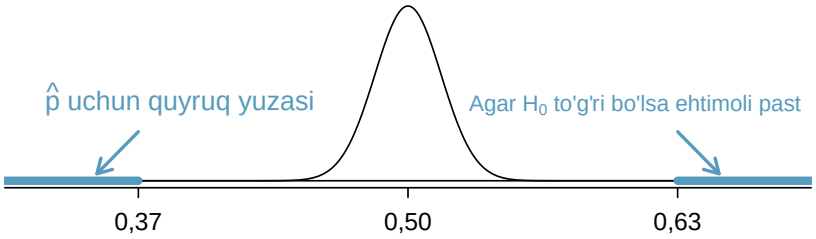
Bu $x = 0{,}37$ bo‘lgan normal ehtimollik masalasi. Avval, holatni tasvirlovchi oddiy grafikni chizamiz, bu 5.9-rasmdagiga o‘xshash. $\hat{p}$ quyruqning juda uzoq qismida joylashgani sababli, quyruq maydoni juda kichik bo‘lishini bilamiz. Uni topish uchun, biz Z qiymatini 0,5 o‘rtacha va 0,016 standart xatolik bilan hisoblashdan boshlaymiz:

$$Z = \frac{0{,}37 - 0{,}5}{0{,}016} = -8{,}125 \ .$$

Dasturiy ta’minotdan foydalanib quyruq maydonini topishimiz mumkin: $2{,}2 \times 10^{-16}$ $(0{,}000\,000\,000\,000\,000\,22)$. Agar C.1-ilovada keltirilgan normal ehtimollik jadvalidan foydalansak, $Z = -8{,}125$ jadvaldan tashqarida bo‘ladi, shuning uchun eng kichik ko‘rsatilgan maydonni ishlatamiz: 0,0002.

Yuqori quyruqdagi 0,63 dan yuqori potentsial $\hat{p}$ lar ham 0,37 dan kam bo‘lmagan ekstremlikdagi kuzatuvlarni ifodalaydi, bu 5.10-rasmda ko‘rsatilgan. Bu gipoteza konfiguratsiyasida yanada ekstremal bo‘lgan qiymatlarni ham hisobga olish uchun, pastki quyruqni ikki barobar qilib p-qiymatni baholaymiz: $4{,}4 \times 10^{-16}$ (jadval usulida 0,0004).

P-qiymat nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, shunday ekstremal tanlanma ulushini tasodifan kuzatish ehtimolini bildiradi.



5.10-rasm. Agar H_0 to‘g‘ri bo‘lsa, unda 0,63 dan yuqori qiymatlar 0,37 dan pastroq qiymatlar kabi imkonsiz bo‘ladi.

5.31-MISOL

$4{,}4 \times 10^{-16}$ p-qiymatdan foydalangan holda gipotezalarni qanday baholash kerak? $\alpha = 0{,}05$ standart ahamiyat darajasidan foydalaning.

Agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, $\hat{p}$ ning 0,5 dan shunchalik ekstremal chetlanishini kuzatish ehtimoli juda kichik. Bu quyidagilardan biri to‘g‘ri ekanini anglatadi:

1. Nol gipoteza to‘g‘ri va biz shunchaki juda ekstremal holatni kuzatdik, bu holat har 23 kvadrillionda bir marta sodir bo‘ladi (1 kvadrillion = 1 million×1 milliard).

2. Muqobil gipoteza to‘g‘ri, bu esa 0,5 dan uzoqdagi tanlanma ulushini kuzatish bilan mos keladi.

Birinchi holat kulgili darajada imkonsiz, ikkinchi holat esa ancha ishonarli ko‘rinadi.

Rasmiy jihatdan, gipoteza sinovini baholashda, p-qiymatni ahamiyat darajasi $\alpha = 0{,}05$ bilan taqqoslaymiz. P-qiymat α dan kichik bo‘lgani sababli, nol gipotezani rad etamiz. Ya’ni, ma’lumotlar H_0 ga qarshi kuchli dalillarni beradi. Ma’lumotlar farq yo‘nalishini ko‘rsatadi: amerikaliklarning aksariyati ko‘mir yoqilg‘isi bilan ishlaydigan energiyani kengaytirishni qo‘llab-quvvatlamaydi.

P-QIYMATNI α BILAN TAQQOSLASH ORQALI H_0 NI BAHOLASH

Agar p-qiymat ahamiyat darajasi α dan kichik bo‘lsa, H_0 ni rad etamiz. Shunda biz ma’lumotlar muqobil gipotezani qo‘llab-quvvatlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadi, deb xulosa qilamiz.

Agar p-qiymat α dan katta bo‘lsa, H_0 ni rad qilmaymiz, va nol gipotezani rad etishga yetarli dalillar yo‘qligini ta’kidlaymiz.

Har qanday holatda, xulosani ma’lumotlar kontekstida tasvirlash muhimdir.

Y **5.32-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Amerikaliklarning aksariyati yadroviy qurollarni kamaytirishni qo‘llab-quvvatlaydimi yoki unga qarshimi? Bu savolni baholash uchun gipotezalarni tuzing.[21]

M **5.33-MISOL**

2013-yil mart oyida o‘tkazilgan 1028 AQSh fuqarolaridan iborat oddiy tasodifiy tanlama shuni ko‘rsatdiki, 56% yadroviy qurollarni qisqartirishni qo‘llab-quvvatlaydi. Bu ko‘pchilik amerikaliklar yadroviy qurollarni qisqartirishni qo‘llab-quvvatlaganiga 5% ahamiyatlilik darajasida ishonchli dalillarni taqdim etadimi?

Dastlab sharoitlarni tekshiring:

Bog‘liqsizlik. So‘rov AQSh fuqarolaridan olingan oddiy tasodifiy tanlama asosida o‘tkazilgan, ya’ni kuzatuvlar bog‘liqsizdir.

Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti. Bir proporsiya uchun gipoteza testida ushbu shart nol proporsiya yordamida tekshiriladi, bu kontekstda $p_0 = 0{,}5$: $np_0 = n(1-p_0) = 1028 \times 0{,}5 = 514 \geq 10$.

Ushbu sharoitlar tasdiqlangan holda, $\hat{p}$ ni normal model yordamida tasvirlashimiz mumkin.

Keyin standart xatolikni hisoblash mumkin. Nol qiymat p_0 yana bu yerda ishlatiladi, chunki bu bitta proporsiya uchun gipoteza testi.

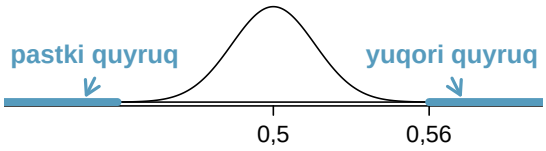
$$SX_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{1028}} = 0{,}0156 \ .$$

Normal model asosida, test statistikasi Z-score sifatida hisoblanishi mumkin:

$$Z = \frac{\text{nuqtaviy baho} - \text{noll qiymat}}{SX} = \frac{0{,}56 - 0{,}50}{0{,}0156} = 3{,}85 \ .$$

nol taqsimotni va p-qiymatini hisoblash uchun muhim chekka maydonlarni tasvirlash foydali:

[21] Biz amerikaliklarning aksariyati qo‘llab-quvvatlaydimi yoki qarshimi, yoki umuman farq yo‘qmi, degan savolni tushunishni xohlaymiz. Agar p amerikaliklarning yadroviy qurollarni kamaytirishni qo‘llab-quvvatlaydiganlar ulushini ifodalasa, unda H_0: $p = 0{,}50$ va H_M: $p \neq 0{,}50$.



Yuqori chekka maydon taxminan 0,0001 va bu chekka maydonni ikki baravar ko‘paytirib p-qiymatni olamiz: 0,0002. p-qiymati 0,05 dan kichik bo‘lgani uchun, H_0 ni rad qilamiz. So‘rov natijalari 2013-yil mart oyida amerikaliklarning ko‘pchiligi yadroviy qurollarni qisqartirish sa’y-harakatlarini qo‘llab-quvvatlaganiga ishonchli dalillarni taqdim etadi.

BIR PROPORSIYA UCHUN GIPOTEZA TESTI

Bir proporsiya uchun gipoteza testi to‘g‘ri usul ekanligini aniqlaganingizdan so‘ng, testi bajarish uchun quyidagi to‘rt bosqichni bajaring:

Tayyorlanish. Qiziqish parametrini aniqlang, gipotezalarni yozing, ahamiyatlilik darajasini belgilang, $\hat{p}$ va n ni aniqlang.

Tekshirish. Shartlarni tekshiring $\hat{p}$ ning H_0 ostida deyarli normal ekanligini ta’minlash uchun. Bir proporsiya uchun gipoteza testlarida muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish uchun nol qiymatdan foydalaning.

Hisoblash. Agar shartlar bajarilsa, standart xatolikni hisoblang, yana p_0 dan foydalanib, Z-score ni hisoblang va p-qiymatni aniqlang.

Xulosa qilish. p-qiymatni α bilan solishtirib, gipoteza testini baholang va muammoning konteksti bo‘yicha xulosa bering.

5.3.5 Ahamiyatlilik darajasini tanlash

Test uchun ahamiyatlilik darajasini tanlash ko‘plab kontekstlarda muhim va an’anaviy daraja $\alpha = 0{,}05$ hisoblanadi. Ammo, qo‘llanilayotgan vaziyatga qarab ahamiyatlilik darajasini moslashtirish foydali bo‘lishi mumkin. Agar testdan olingan xulosalarning oqibatlari jiddiy bo‘lsa, $\alpha = 0{,}05$ dan kichikroq yoki kattaroq darajani tanlash mumkin.

Agar 1-tur xato qilish xavfli yoki juda qimmatga tushsa, kichik ahamiyatlilik darajasini tanlash kerak (masalan, 0,01). Bunday vaziyatda H_0 gipotezasini rad etishda juda ehtiyot bo‘lishni xohlaymiz, shuning uchun H_0 ni rad etishdan oldin H_M ni qo‘llab-quvvatlovchi juda kuchli dalillar talab qilinadi.

Agar 2-tur xato 1-tur xatoga nisbatan nisbatan xavfliroq yoki ancha qimmatga tushsa, unda yuqoriroq ahamiyatlilik darajasini tanlash mumkin (masalan, 0,10). Bu yerda biz H_0 ni rad etmaslikda ehtiyot bo‘lishni xohlaymiz, ayniqsa alternativ gipoteza aslida to‘g‘ri bo‘lsa.

Bundan tashqari, agar ma’lumotlarni yig‘ish narxi 2-tur xatolar narxiga nisbatan kichik bo‘lsa, qo‘shimcha ma’lumotlarni yig‘ish yaxshi strategiya bo‘lishi mumkin. Ushbu strategiya ostida 2-tur xatolar kamaytiriladi, 1-tur xato darajasiga ta’sir qilmasdan. Albatta, qo‘shimcha ma’lumotlarni yig‘ish odatda qimmatga tushadi, shuning uchun odatda foyda-va-xarajat tahlilini hisobga olish kerak.

Ⓜ **5.34-MISOL**

Avtomobil ishlab chiqaruvchi kompaniya avtomobil eshiklari menteşalarini tayyorlaydigan yangi, yuqori sifatli uskunaga o‘tishni o‘ylamoqda. Ular yangi uskuna menteşalarni 0,2% dan kam qismida nuqsonli ishlab chiqarsa, uzoq muddatda pul tejashlari mumkin deb o‘ylashadi. Ammo, agar menteşalar 0,2% dan ko‘p qismida nuqsonli bo‘lsa, ular yangi uskuna bo‘yicha kutilgan foydani ololmaydi va pul yo‘qotadi. Bunday gipoteza testida ahamiyatlilik darajasini o‘zgartirish uchun yaxshi sabab bormi?

Nol gipoteza menteşalar nuqson darajasi 0,2% ga teng ekanini, alternativ gipoteza esa nuqson darajasi 0,2% dan farq qilishini bildiradi. Bu qaror avtomobil va kompaniyaga nisbatan marginal

ta'sirga ega qarorlardan biridir. 0,05 ahamiyatlilik darajasi mantiqiy ko'rinadi, chunki 1-tur yoki 2-tur xatolardan biri ham xavfli yoki (nisbatan) ancha qimmat emas.

Ⓜ **5.35-MISOL**

Xuddi shu avtomobil ishlab chiqaruvchi kompaniya eshik menteşalariga tegishli emas, balki xavfsizlik bilan bog'liq qismlar uchun biroz qimmatroq etkazib beruvchini ko'rib chiqmoqda. Agar ushbu xavfsizlik komponentlarining chidamliligi hozirgi etkazib beruvchidan yaxshiroq ekani ko'rsatilsa, ular ishlab chiqaruvchini o'zgartiradilar. Bunday baholashda ahamiyatlilik darajasini o'zgartirish uchun yaxshi sabab bormi?

Nol gipoteza shundan iboratki, etkazib beruvchilar qismlari bir xil darajada ishonchli. Xavfsizlik ishi bilan bog'liq bo'lgani uchun avtomobil kompaniyasi biroz qimmatroq ishlab chiqaruvchiga (ya'ni, H_0 ni rad etish) o'tishni xohlaydi, hatto xavfsizlikning yaxshilanganligi haqidagi dalillar faqat o'rtacha darajada kuchli bo'lsa ham. Biroz yuqoriroq ahamiyatlilik darajasi, masalan, $\alpha = 0{,}10$, maqbul bo'lishi mumkin.

Ⓨ **5.36-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Mashina ichidagi bir qismni almashtirish juda qimmatga tushadi. Ammo, ushbu qism buzilgan taqdirda ham mashina odatda to'g'ri ishlaydi, shuning uchun ushbu qism faqat uning buzilganligiga yuqori darajada ishonchli bo'lsakgina o'zgartiriladi. Ushbu test uchun tegishli gipotezalarni (oddiy tilda) aniqlang va mos ahamiyatlilik darajasini tavsiya qiling.[22]

NEGA 0,05 STANDART HISOBLANADI?

$\alpha = 0{,}05$ darajasi eng keng tarqalgan. Ammo nega? Ehtimol, standart daraja kichikroq bo'lishi kerakdir, yoki ehtimol kattaroq. Agar bu savol sizni qiziqtirayotgan bo'lsa, demak, siz o'ta tanqidiy ko'z bilan o'qiyapsiz – ajoyib ish! Biz bu masalani aniqlashtirish uchun 5 daqiqalik vazifa yaratdik:

www.openintro.org/why05

5.3.6 Statistik ahamiyat va amaliy ahamiyat

Tanlanma hajmi oshgani sayin, nuqta baholari yanada aniqroq bo'ladi va o'rtacha qiymat bilan nol qiymat orasidagi har qanday haqiqiy farqlarni aniqlash va aniqlash osonlashadi. Agar biz yetarlicha katta tanlanmani olsak, hatto juda kichik farq ham aniqlanishi mumkin. Ba'zan tadqiqotchilar shunchalik katta tanlanmalarni yig'adilar-ki, hatto eng kichik farqlar ham aniqlanadi, hatto ularning amaliy qiymati bo'lmasa ham. Bunday holatlarda biz farqni hali ham **statistik ahamiyatli** deb aytamiz, lekin u **amaliy ahamiyatli** emas. Masalan, onlayn eksperiment film sharhlash veb-saytida qo'shimcha reklamalarni joylashtirish TV ko'rsatuvining tomoshabinligini 0,001% ga oshirganini statistik jihatdan ahamiyatli deb aniqlashi mumkin, lekin bu o'sishning amaliy qiymati bo'lmasligi mumkin.

Tadqiqot o'tkazishda ma'lumotlar olimining roli ko'pincha tadqiqot hajmini rejalashtirishni o'z ichiga oladi. Ma'lumotlar olimi avval ekspertlar yoki ilmiy adabiyotlardan maslahat olib, nol qiymatdan eng kichik mazmunli farq qanday bo'lishini bilib olishi mumkin. Shuningdek, u boshqa ma'lumotlarni ham oladi, masalan, haqiqiy ulush p ning taxminiy bahosi, shunda u standart xatolikni taxminan baholashi mumkin. Shundan so'ng u haqiqiy va mazmunli farq bo'lsa, uni aniqlashimiz uchun etarlicha katta tanlanma hajmini taklif qilishi mumkin. Katta tanlanma hajmlari hali ham ishlatilishi mumkin, ammo bu hisob-kitoblar, ayniqsa, xarajatlar yoki tibbiy tadqiqotda ko'ngillilarga mumkin bo'lgan salbiy ta'sir kabi potentsial xavflarni hisobga olishda foydalidir.

[22] Bu yerda nol gipoteza shundan iboratki, qism buzilmagan, va alternativ gipoteza shundan iboratki, qism buzilgan. Agar H_0 ni rad etish uchun yetarli dalil bo'lmasa, biz qismini almashtirmaymiz. Qism buzilgan (H_0 noto'g'ri, H_M to'g'ri) bo'lsa ham uni almashtirmaslik unchalik muammoli emas, ammo qismini almashtirish qimmat. Shunday ekan, H_0 ni rad etishdan oldin juda kuchli dalil talab qilishimiz kerak. Kichik ahamiyatlilik darajasini tanlang, masalan, $\alpha = 0{,}01$.

5.3.7 Bir tomonli gipoteza testlari (maxsus mavzu)

Hozirgacha biz faqat **ikki tomonli gipoteza testlari** deb ataladigan testlarni ko‘rib chiqdik, bu yerda biz p ning nol qiymati p_0 dan yuqori yoki pastda ekanligini aniqlashga ahamiyat beramiz. Ikkinchi turdagi gipoteza testi esa **bir tomonli gipoteza testi** deb ataladi. Bir tomonli gipoteza testida gipotezalar quyidagi shakllardan biriga ega bo‘ladi:

1. Bosh to‘plam parametri *ba’zi qiymatdan past* (p_0) bo‘lishini aniqlashgina qiziqarli bo‘lgan holatlar. Bu holda alternativ gipoteza $p < p_0$ ko‘rinishida yoziladi.

2. Bosh to‘plam parametri *ba’zi qiymatdan yuqori* (p_0) bo‘lishini aniqlashgina qiziqarli bo‘lgan holatlar. Bu holda alternativ gipoteza $p > p_0$ ko‘rinishida yoziladi.

Alternativ gipotezaning shakli o‘zgartirilsa-da, bir tomonli gipoteza testlari uchun nol gipoteza hali ham tenglik belgisidan foydalanib yoziladi.

Butun gipoteza sinovi jarayonida, bir tomonli gipoteza testi va ikki tomonli gipoteza testi orasidagi yagona farq shundaki: p-qiymatni qanday hisoblash kerak. Bir tomonli gipoteza testida, p-qiymat *faqat alternativ gipotezaning yo‘nalishidagi* quyruq maydoni sifatida hisoblanadi, ya’ni u faqat bitta quyruq maydoni bilan ifodalanadi. Bu yerda bir tomonli testlarning ba’zan qiziqarli bo‘lishining sababi yotadi: agar biz p-qiymatni olish uchun quyruq maydonini ikki baravar oshirishga ehtiyoj sezmasak, u holda p-qiymat kichikroq bo‘ladi va alternativ gipoteza yo‘nalishidagi qiziqarli topilmalarni aniqlash uchun kerak bo‘lgan dalil darajasi pasayadi. Ammo, bir tomonli testlar har doim ham foydali emas: eng katta kamchiligi shundaki, qarama-qarshi yo‘nalishdagi qiziqarli topilmalarni e’tibordan chetda qoldirish kerak bo‘ladi.

Ⓜ **5.37-MISOL**

1.1-bo‘limida biz shunday misolni ko‘rib chiqdikki, unda shifokorlar insult xavfi yuqori bo‘lgan odamlarga yordam berish uchun stentlar foyda keltiradimi-yo‘qmi, shuni aniqlashga qiziqishdi. Tadqiqotchilar stentlar yordam berishiga ishongan. Afsuski, ma’lumotlar aksini ko‘rsatdi: stentlar qo‘llangan bemorlar aslida yomonlashdi. Bu kontekstdagi ikki tomonli testdan foydalanish nima uchun juda muhim edi?

Tadqiqotdan oldin, tadqiqotchilar stentlar bemorlarga yordam berishiga ishonishgan edi, chunki mavjud tadqiqotlar stentlar yurak xuruji bo‘lgan bemorlarga yordam berganini ko‘rsatgan edi. Bu vaziyatda bir tomonli testdan foydalanish vasvasasi katta bo‘lardi va agar ular shunday qilgan bo‘lishsa, bemorlarga salbiy ta’sir ko‘rsatadigan mumkin bo‘lgan zararlarni aniqlash imkoniyatlarini cheklagan bo‘lardilar.

5.37 misoli shuni ko‘rsatadiki, bir tomonli gipotezadan foydalanish qarama-qarshi xulosani qo‘llab-quvvatlaydigan ma’lumotlarni e’tibordan chetda qoldirish xavfini tug‘diradi. Biz ushbu bo‘limda Roslinglarning savol ma’lumotlarini ko‘rib chiqayotganimizda shunga o‘xshash xatoga yo‘l qo‘ygan bo‘lishimiz mumkin edi; agar biz oldindan oliy ma’lumotli odamlar tasodifiy taxmindan yomonroq natijaga erishmaydi, deb o‘ylab, bir tomonli test ishlatganimizda, global sog‘liqni saqlash bo‘yicha ko‘pchilikning noto‘g‘ri bilimga ega ekanligini ko‘rsatuvchi haqiqatan ham qiziqarli topilmalarni e’tibordan chetda qoldirgan bo‘lardik. Bir tomonli testni qachon ishlatish mumkin? *Juda kam hollarda.* Agar bir tomonli testni qo‘llash haqida o‘ylayotgan bo‘lsangiz, quyidagi savolga diqqat bilan javob bering:

> *Agar ma’lumotlar mening alternativ gipotezam yo‘nalishidan mutlaqo qarama-qarshi yo‘nalishda bo‘lsa, men yoki boshqalar qanday xulosaga keladi?*

Agar siz yoki boshqalar ma’lumotlarni bir tomonli test yo‘nalishidan qarama-qarshi yo‘nalishda baholashda qandaydir foyda topishingizni ko‘rsangiz, unda aslida ikki tomonli gipoteza testi ishlatilishi kerak. Bu fikrlar nozik bo‘lishi mumkin, shuning uchun ehtiyotkorlik bilan yondashing. Ushbu kitobning qolgan qismida faqat ikki tomonli testlarni qo‘llaymiz.

Ⓜ **5.38-MISOL**

Nima uchun biz ma’lumotlar yo‘nalishida bir tomonli testni oddiygina amalga oshira olmaymiz?

Biz gipoteza testida α ahamiyatlilik darajasiga mos keluvchi bir turdagi xatolarni nazorat qilishni ko‘zda tutuvchi ehtiyotkor tizim yaratmoqdamiz. Bu yerda oddiylik uchun $\alpha = 0{,}05$ ni ishlatamiz.

Tasavvur qiling, biz ma’lumotlarni ko‘rganimizdan keyin bir tomonli testni tanlashimiz mumkin.

Nima xato bo‘ladi?

- Agar $\hat{p}$ nol qiymatdan *kichikroq* bo‘lsa, unda $p < p_0$ bir tomonli testi, nol taqsimotning *quyi* 5% quyruq qismidagi har qanday kuzatish bizni H_0ni rad etishga olib keladi.
- Agar $\hat{p}$ nol qiymatdan *katta* bo‘lsa, unda $p > p_0$ bir tomonli testi, nol taqsimotning *yuqori* 5% quyruq qismidagi har qanday kuzatish bizni H_0ni rad etishga olib keladi.

Shunda, agar H_0 to‘g‘ri bo‘lsa, ikki quyruqning birida bo‘lish ehtimoli 10% bo‘ladi, shuning uchun bizning testdagi xato aslida $\alpha = 0{,}10$ bo‘lib, 0,05 emas. Ya’ni, bir tomonli testlarni qachon ishlatish kerakligini ehtiyotkorlik bilan ko‘rib chiqmaslik biz ishlab chiqayotgan va qo‘llayotgan usullarning ishonchliligini buzadi.

Mashqlar

5.15 Gipotezalarni aniqlash, 1-qism. Quyidagi holatlar uchun gipotezalarni so‘zlar va belgilardan foydalanib yozing.

(a) Repetitorlik kompaniyasi ko‘pchilik talabalarning baholari ularning xizmatidan foydalangandan keyin yaxshilanadimi yoki yo‘qmi, bilishni xohlaydi. Ular o‘tgan yili ularning xizmatidan foydalangan 200 talabani tanlab olib, baholari avvalgi yilga nisbatan yaxshilangani yoki pasayganini so‘raydilar.

(b) Korxonadagi ish beruvchilar AQShda har bahorda o‘tkaziladigan basketbol chempionati - Mart Madness ta’siridan xavotirda. Ular odatiy ish kunida xodimlar o‘rtacha 15 daqiqa kompaniya vaqtini shaxsiy email tekshirish, shaxsiy qo‘ng‘iroqlar qilish kabi shaxsiy faoliyatlarga sarflashlarini taxmin qilishadi. Shuningdek, ular xodimlarning Mart Madness paytida shunga o‘xshash shaxsiy faoliyatlarga qancha vaqt sarflashlari bo‘yicha ma’lumot to‘plashadi. Ular bu ma’lumotlar xodimlarning unumdorligi Mart Madness davrida o‘zgarganligini tasdiqlaydigan isbotlarni taqdim etadimi yoki yo‘qmi, bilishni xohlaydilar.

5.16 Gipotezalarni aniqlash, 2-qism. Quyidagi holatlar uchun gipotezalarni so‘zlar va belgilardan foydalanib yozing.

(a) 2008 yildan boshlab Kaliforniyadagi restoran tarmoqlaridan har bir menyu mahsulotining kaloriyasini ko‘rsatish talab etiladi. Menyuda kaloriya miqdori ko‘rsatilishidan oldin, restoranda ovqatlanadigan odamlarning o‘rtacha kaloriya iste’moli 1100 kaloriya bo‘lgan. Menyuda kaloriya miqdori ko‘rsatilishni boshlaganidan keyin, dietolog tasodifiy namunadagi mehmonlardan restoranda iste’mol qilingan kaloriya miqdorini to‘playdi. Ushbu ma’lumotlar restoranda o‘rtacha kaloriya iste’molida farq borligini ko‘rsatadigan isbotlarni taqdim etadimi?

(b) Viskonsin shtati o‘zining katta yoshdagi aholisi orasida o‘tgan yil davomida spirtli ichimliklar iste’mol qilganlarning ulushini bilishni xohlaydi, xususan, bu ko‘rsatkich milliy ko‘rsatkich bo‘lgan 70% dan farq qiladimi yoki yo‘q. Buni aniqlash uchun ular 852 aholining tasodifiy namunasi bo‘yicha spirtli ichimliklar iste’moli haqida so‘rov o‘tkazadi.

5.17 Onlayn muloqot. Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, kollej talabalarning 60% haftasiga 10 yoki undan ortiq soatni boshqalar bilan onlayn muloqot qilishga sarflaydi. Siz bu noto‘g‘ri deb o‘ylaysiz va gipoteza sinovini o‘tkazish uchun o‘z namunangizni yig‘ishga qaror qilasiz. Yotoqxonangizdan tasodifiy tanlangan 160 talabadan so‘rov o‘tkazasiz va 70% talaba haftasiga 10 yoki undan ortiq soatni boshqalar bilan onlayn muloqot qilishga sarflashini aniqlaysiz. Sizga yordam bermoqchi bo‘lgan do‘stingiz quyidagi gipotezalar to‘plamini taklif qiladi. Ushbu to‘plamda qanday xatolar borligini ko‘rsating.

$$H_0 : \hat{p} < 0{,}6$$
$$H_A : \hat{p} > 0{,}7$$

5.18 25 yoshida uylanish. Tadqiqot shuni ko‘rsatadiki, 25 yoshdagi odamlarning 25% uylangan. Siz bu noto‘g‘ri deb o‘ylaysiz va gipoteza sinovini o‘tkazish uchun o‘z namunangizni yig‘ishga qaror qilasiz. 25 yoshdagi aholining 776 ta tasodifiy namunasi bo‘yicha aholini ro‘yxatga olish ma’lumotlaridan foydalanasiz va 24% uylanganligini aniqlaysiz. Sizga yordam bermoqchi bo‘lgan do‘stingiz gipoteza sinovini o‘rnatishga yordam berishni taklif qiladi va quyidagi gipotezalarni taklif qiladi. Ushbu to‘plamda qanday xatolar borligini ko‘rsating.

$$H_0 : \hat{p} = 0{,}24$$
$$H_A : \hat{p} \neq 0{,}24$$

5.19 Kiberbulling darajalari. O‘smirlar kiberbulling haqida so‘raldi va 54% dan 64% gacha ularni kiberbullingga duch kelganini bildirishdi (95% ishonch intervali).[23] Quyidagi savollarga ushbu interval asosida javob bering.

(a) Gazeta shunday da’vo qiladiki, ko‘pchilik o‘smirlar kiberbullingga duch kelgan. Ushbu da’vo ishonch intervali bilan tasdiqlanganmi? Fikringizni tushuntiring.

(b) Tadqiqotchi o‘smirlarning 70% kiberbullingga duch kelganini taxmin qildi. Ushbu da’vo ishonch intervali bilan tasdiqlanganmi? Fikringizni tushuntiring.

(c) Intervalni hisoblamasdan, tadqiqotchining (b)-qismidagi da’vosi 90% ishonch intervali asosida tasdiqlanadimi yoki yo‘qmi, aniqlang.

5.20 ERda kutish, 2-qism.-mashqda 5.11 favqulodda yordam xonasida (ER) kutish vaqtining o‘rtacha qiymati uchun 95% ishonch intervalini (128 daqiqa, 147 daqiqa) beradi. Quyidagi savollarga ushbu interval asosida javob bering.

(a) Mahalliy gazeta ushbu ERda o‘rtacha kutish vaqti 3 soatdan oshishini da’vo qiladi. Ushbu da’vo ishonch intervali bilan tasdiqlanganmi? Fikringizni tushuntiring.

(b) Ushbu shifoxonadagi tibbiyot dekani o‘rtacha kutish vaqti 2,2 soat ekanligini da’vo qiladi. Ushbu da’vo ishonch intervali bilan tasdiqlanganmi? Fikringizni tushuntiring.

(c) Intervalni hisoblamasdan, dekanning (b)-qismidagi da’vosi 99% ishonch intervali asosida tasdiqlanadimi yoki yo‘qmi, aniqlang.

5.21 Minimal ish haqi, 1-qism. AQSh kattalarining ko‘pchiligi minimal ish haqini oshirish iqtisodiyotga yordam berishiga ishonadimi yoki bunga ishonmaydigan ko‘pchilik bormi? Rasmussen Reports tadqiqotida tasodifiy tanlangan 1000 AQSh kattalari orasida 42% iqtisodiyotga yordam beradi deb ishonishini aniqladi.[24] Ushbu tadqiqot savoliga javob berishga yordam berish uchun mos gipoteza sinovini o‘tkazing.

5.22 Yetarli uyqu olish. Katta universitetdan 400 talaba tasodifiy tanlab olindi, va ulardan 289 nafari yetarli uyqu olmayotganini aytdi. Bu 50% dan statistik jihatdan ahamiyatli farqni ifodalaydimi yoki yo‘qmi tekshirish uchun gipoteza sinovini 0,01 ahamiyat darajasida o‘tkazing.

5.23 Orqaga ishlash,1-qism. Quyidagi gipotezalar berilgan:

$$H_0 : p = 0{,}3$$
$$H_A : p \neq 0{,}3$$

Namunaviy hajm 90 ekanligi ma’lum. q-qiymati 0,05 ga teng bo‘lishi uchun namuna ulushi qancha bo‘lishi kerak? Tahlil uchun zarur bo‘lgan barcha shartlar bajarilgan deb faraz qiling.

5.24 Orqaga ishlash, 2-qism. Quyidagi gipotezalar berilgan:

$$H_0 : p = 0{,}9$$
$$H_A : p \neq 0{,}9$$

Namunaviy hajm 1429 ekanligi ma’lum. q-qiymati 0,01 ga teng bo‘lishi uchun namuna ulushi qancha bo‘lishi kerak? Tahlil uchun zarur bo‘lgan barcha shartlar bajarilgan deb faraz qiling.

5.25 Fibromialgiya uchun test. Diana ismli bemor tanadagi uzoq muddatli og‘riqlar sindromi - fibromialgiya bilan tashxis qo‘yilgan va antidepressantlar buyurilgan. Skeptik bo‘lganligi sababli, Diana boshlanishida antidepressantlarning uning simptomlariga yordam berishiga ishonmaydi. Ammo bir necha oy davomida dorilarni qabul qilganidan keyin, antidepressantlar ishlayotganini, chunki simptomlari haqiqatan ham yaxshilanayotganini his qiladi.

(a) Diananing antidepressantlarni qabul qilishni boshlagan paytidagi skeptik holati uchun gipotezalarni so‘zlarda yozing.

(b) Ushbu kontekstda 1-turdagi xato nimani anglatadi?

(c) Ushbu kontekstda 2-turdagi xato nimani anglatadi?

5.26 Qaysi biri yuqori. Quyidagi har bir qismda, qiziqish qiymati va ikkita holat (I va II) berilgan. Har bir qism uchun qiziqish qiymati I holatda, II holatda kattaroqmi yoki holatlar orasida tengmi, deb xabar bering.

(a) $\hat{p}$ uchun standart xatolik, (I) $n = 125$ yoki (II) $n = 500$ holatlari.

[23] Pew Research Center, A Majority of Teens Have Experienced Some Form of Cyberbullying. September 27, 2018.
[24] Rasmussen Reports survey, Most Favor Minimum Wage of $10.50 Or Higher, April 16, 2019.

(b) Ishonch intervalining xato chegarasi, ishonch darajasi (I) 90% yoki (II) 80% holatlari.

(c) Z-statistikasi 2,5 uchun p-qiymati, asoslangan (I) $n = 500$ namunada yoki (II) $n = 1000$ namunada.

(d) Muqobil gipoteza haqiqiy bo‘lganida va ahamiyat darajasi (I) 0,05 yoki (II) 0,10 bo‘lganida 2-turdagi xatoni qilish ehtimoli.

Bob bo‘yicha mashqlar

5.27 Ishdan keyin dam olish. General Social Survey tasodifiy tanlangan 1155 amerikalikka shunday savol berdi: “O‘rtacha ish kunidan keyin dam olish yoki o‘zingiz yoqtiradigan faoliyatlarni amalga oshirish uchun qancha vaqt ajratasiz?”[25] Dam olish yoki o‘zingiz yoqtiradigan faoliyatlarga ajratilgan vaqtning o‘rtacha miqdori uchun 95% ishonch intervali (1,38; 1,92) bo‘lgan.

(a) Ushbu intervalni ma’lumotlar kontekstida izohlang.

(b) Faraz qilaylik, boshqa tadqiqotchilar 1155 amerikaliklardan olingan shu namunaga asoslanib, kattaroq xato chegarasi bilan ishonch intervalini xabar qilishdi. Ularning ishonch darajasi yuqoridagi intervalning ishonch darajasi bilan qanday taqqoslanadi?

(c) Keyingi yili shu savol bilan yangi so‘rov o‘tkazilib, bu safar namuna hajmi 2500 bo‘lgan deb faraz qilaylik. Aholi xarakteristikasi, ishlardan keyin dam olishga qancha vaqt ajratilishi jihatidan, bir yil ichida ko‘p o‘zgarmagan deb hisoblasak. Yangi so‘rov ma’lumotlariga asoslangan 95% ishonch intervalining xato chegarasi yuqoridagi interval bilan qanday taqqoslanadi?

5.28 Minimal ish haqi, 2-qism. 5.21-mashqda biz Rasmussen Reports tadqiqoti natijalariga ko‘ra 1000 AQSh kattalarining 42% minimal ish haqini oshirish iqtisodiyotga yordam beradi deb ishonishini bilib oldik. AQSh kattalari orasida ushbu fikrga ega bo‘lganlar ulushi uchun 99% ishonch intervalini tuzing.

5.29 Oziq-ovqat xavfsizligini tekshirish. Oziq-ovqat xavfsizligi bo‘yicha inspektor bir necha mijozning sanitariya qoidalariga rioya qilinmaganligi haqidagi xabarlari tufayli restoranni tekshirish uchun chaqiriladi. Inspektor restoranning qoidalarga rioya qilmaganligini baholash uchun gipoteza sinovi doirasidan foydalanadi. Agar u restoran qoidalarni jiddiy buzgan deb qaror qilsa, uning oziq-ovqat xizmatini ko‘rsatish uchun litsenziyasi bekor qilinadi.

(a) Gipotezalarni so‘zlarda yozing.

(b) Ushbu kontekstda 1-turdagi xato nimani anglatadi?

(c) Ushbu kontekstda 2-turdagi xato nimani anglatadi?

(d) Qaysi xato restoran egasi uchun ko‘proq muammo tug‘diradi? Nima uchun?

(e) Qaysi xato mijozlar uchun ko‘proq muammo tug‘diradi? Nima uchun?

(f) Mijoz sifatida, oziq-ovqat xavfsizligi bo‘yicha inspektor restoran litsenziyasini bekor qilishdan oldin sog‘liq muammolari bo‘yicha kuchli dalillar yoki juda kuchli dalillar talab qilishini xohlaysizmi? Fikringizni tushuntiring.

5.30 To‘g‘ri yoki noto‘g‘ri. Quyidagi bayonotlarning to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini aniqlang va sababini tushuntiring. Agar noto‘g‘ri bo‘lsa, uni qanday qilib to‘g‘rilash mumkinligini ayting.

(a) Agar biror qiymat (masalan, parametrning null gipoteza qilingan qiymati) 95% ishonch intervalida bo‘lsa, u 99% ishonch intervalida ham bo‘ladi.

(b) Ahamiyatlilik darajasini (α) kamaytirish 1-turdagi xato qilish ehtimolini oshiradi.

(c) Null gipoteza $p = 0{,}5$ bo‘lsa va biz H_0 ni rad etmasak, bu holatda aholining haqiqiy ulushi 0,5 ga teng.

(d) Katta namuna hajmlarida, null qiymat va kuzatilgan nuqta bahosi orasidagi hatto kichik farqlar (ko‘pincha ta’sir hajmi deb ataladi) ham statistik jihatdan ahamiyatli deb topiladi.

5.31 Ishsizlik va munosabatlar muammolari. USA Today/Gallup so‘rovi ishsiz va to‘liq band bo‘lmagan amerikaliklardan ish topa olmaganligi (ishsiz bo‘lsa) yoki to‘liq vaqtli ish topa olmaganligi (to‘liq band bo‘lmagan bo‘lsa) sababli turmush o‘rtog‘i yoki boshqa yaqin oila a’zosi bilan munosabatlarda katta muammolar bo‘lganmi, deb so‘radi. 1145 ishsiz respondentlarning 27% va 675 to‘liq band bo‘lmagan respondentlarning 25% ishi tufayli munosabatlarda katta muammolar borligini aytishdi.

(a) Ishsiz va to‘liq band bo‘lmagan odamlar orasida munosabatlar muammolariga ega bo‘lganlar ulushi farqli ekanligini baholash uchun gipotezalarni yozing.

[25] National Opinion Research Center, General Social Survey, 2018.

(b) Ushbu gipoteza testi uchun p-qiymat taxminan 0,35. Bu gipoteza testi va ma'lumotlar kontekstida nimani anglatadi, tushuntiring.

5.32 Yaqindan ko'ra olmaslik. Yaqindan ko'ra olmaslik barcha bolalarning taxminan 8% ini ta'sir qiladi deb hisoblanadi. 194 bola tasodifiy tanlanib, ulardan 21 tasi yaqindan ko'ra olmasligi aniqlandi. Ushbu savol bo'yicha gipoteza sinovini o'tkazing: bu ma'lumotlar 8% qiymatining noto'g'ri ekanligini ko'rsatadimi?

5.33 Ovqatlanish yorliqlari. Kartoshka chiplarining bir untsiya (28 gramm) porsiyasida 130 kaloriya va 10 gramm yog', shu jumladan uch gramm to'yingan yog' mavjudligi ovqatlanish yorlig'ida ko'rsatilgan. 35 ta paketning tasodifiy namunasi bo'yicha kaloriyalar sonining ishonch intervali 128,2 dan 139,8 kaloriya-gacha chiqdi. Kartoshka chipslari paketlaridagi kaloriyalar haqida ovqatlanish yorlig'ida to'g'ri ma'lumot berilmaganligi haqida dalillar mavjudmi?

5.34 Proportsiyalar uchun Markaziy Chegara Teoremasi. Namuna ulushining "namuna taqsimoti" atamasini aniqlang va namuna hajmi oshgani sayin, $p = 0{,}1$ bo'lganda, namuna taqsimotining shakli, markazi va tarqalishi qanday o'zgarishini tasvirlab bering.

5.35 Amaliy va statistik ahamiyat. Quyidagi bayonotning to'g'ri yoki noto'g'riligini aniqlang va sababini tushuntiring: "Katta namuna hajmlarida, null qiymat va kuzatilgan nuqta bahosi o'rtasidagi hatto kichik farqlar ham statistik jihatdan ahamiyatli bo'lishi mumkin".

5.36 Bitta kuzatuv, har xil namuna hajmi. Tasavvur qiling, namuna hajmi $n = 50$ bo'lgan namunaga asoslangan gipoteza sinovini o'tkazasiz va 0,08 p-qiymatga erishasiz. Keyin qaydlaringizga qarab, ehtiyotsizlik bilan xato qilganingizni va namuna hajmi aslida $n = 500$ bo'lishi kerakligini aniqlaysiz. P-qiymat oshadimi, kamayadimi yoki bir xil qoladimi? Tushuntiring.

5.37 Tibbiyotda genderga asoslangan ish haqi tafovuti. Bir tadqiqot 21 xil lavozim bo'yicha shifokor bo'lib ishlay boshlagan erkaklar va ayollarning o'rtacha ish haqini o'rgandi.[26]

(a) Agar har ikkala gender bir xil ish haqiga ega bo'lsa, taxminan yarmida erkaklar ayollarga nisbatan ko'proq maosh olsa, qolgan yarmida esa ayollar erkaklardan ko'proq maosh olishadi deb kutish mumkin. Ushbu holatni sinash uchun mos gipotezalarni yozing.

(b) Erkaklar o'rtacha hisobda 21 ta lavozimning 19 tasida ayollarga nisbatan ko'proq maosh olgan. Ushbu 21 lavozim tasodifiy namuna deb hisoblanadi, deb faraz qilib, (a)-qismdagi gipotezalaringizdan foydalangan holda gipoteza sinovini yakunlang.

[26] Lo Sasso AT et al. "The $16,819 Pay Gap For Newly Trained Physicians: The Unexplained Trend Of Men Earning More Than Women". In: *Health Affairs* 30.2 (2011).

6-BOB

Toifali ma’lumotlar uchun xulosalar chiqarish

6.1 Bitta nisbat uchun xulosalar

6.2 Ikki nisbat farqi

6.3 Xi-kvadrat usuli yordamida moslikni tekshirish

6.4 Ikki yo‘nalishli jadvallarda bog‘liqsizlikni tekshirish

Ushbu bobda, biz toifali ma'lumotlar uchun bir nechta masala mazmuni uchun (5-bobda) o'rganilgan usul va g'oyalarni qo'llaymiz. Dastlab, bitta nisbat uchun normal taqsimot tanlanma nisbat noaniqligini modellash uchun qanday ishlatilishini ko'rib chiqamiz. Keyin, ushbu g'oyalardan foydalanib, ikkita nisbat farqini normal model orqali tahlil qilamiz. Bobning keyingi qismida, kontingensiya jadvallariga xulosa chiqarish texnikasini qo'llaymiz. Bu kontekstda boshqacha taqsimotdan foydalansak ham, gipotezani test qilishning asosiy tamoyillari o'zgarishsiz qoladi.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

6.1 Bitta nisbat uchun xulosalar

Biz bitta nisbat uchun xulosalar usullari bilan 5-bobda tanishgan edik, unda nuqta bahosi, ishonch intervallari, va gipotezani test qilish haqida gaplashganmiz. Ushbu bo‘limda ushbu mavzularni qayta ko‘rib chiqamiz hamda bitta nisbat kontekstida ma’lumot yig‘ish uchun motanlanmani qanday tanlashni o‘rganamiz.

6.1.1 Tanlanma nisbatining normalga yaqinligini aniqlash

Tanlanma nisbati $\hat{p}$, agar tanlanmaviy kuzatuvlar mustaqil va tanlanma hajmi yetarlicha katta bo‘lsa, normal taqsimotdan foydalanib modellash mumkin.

TANLANMA NISBATINING TAQSIMOTI $\hat{p}$

$\hat{p}$ uchun tanlanmaviy taqsimot, agar tanlanma hajmi n va bosh to‘plamning haqiqiy nisbati p bo‘lsa, quyidagi holatlarda normalga yaqin bo‘ladi:

1. Tanlanmaning kuzatuvlari mustaqil bo‘lishi kerak, masalan, oddiy tasodifiy tanlanmadan.
2. Tanlanma tarkibida kamida 10 muvaffaqiyat va 10 muvaffaqiyatsizlik bo‘lishi kerak, ya’ni $np \geq 10$ va $n(1-p) \geq 10$. Bu **muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti** deb ataladi.

Ushbu shartlar bajarilganda, $\hat{p}$ uchun tanlanmaviy taqsimot p o‘rtacha va $SX = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ standart xatolik bilan normalga yaqinlashadi. .

Odatda haqiqiy nisbat p bizga ma’lum emas, shuning uchun shartlarni tekshirish va standart xatolikni baholash uchun boshqa bir qiymatdan foydalanamiz. Ishonch intervallari uchun, tanlanmaviy nisbat $\hat{p}$ muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti va standart xatolikni hisoblash uchun ishlatiladi. Gipoteza testlari uchun odatda Nol gipotezadagi da’vo qilingan nisbat o‘rniga p o‘rniga ishlatiladi.

6.1.2 Nisbat uchun ishonch intervallari

Ishonch intervallari parametr p uchun ehtimoliy qiymatlar doirasini taqdim etadi va agar $\hat{p}$ normal taqsimot bilan modellash mumkin bo‘lsa, p uchun ishonch intervallari quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\hat{p} \pm z^\star \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

M **6.1-MISOL**

Tasodifiy tanlanmadan olingan 826 nafar mikroqarz kredit oluvchilar so‘rov qilingan, ularning regulyatsiya va xarajatlar bo‘yicha qiziqishlari haqida ko‘proq bilish uchun. 70% respondentlar yangi regulyatsiyalarni qo‘llab-quvvatlashlarini bildirgan. $\hat{p} = 0{,}70$ ni normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqdanmi?

Ma’lumotlar tasodifiy tanlanmadir, shuning uchun kuzatuvlar mustaqil va qiziqish bosh to‘plamni ifodalovchi hisoblanadi.

Bundan tashqari, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti tekshirilishi kerak, bu shartni hisoblashda ishonch intervallari uchun p o'rniga $\hat{p}$ dan foydalanamiz:

$$\text{Qo'llab-quvvatlovchilar: } n\hat{p} \approx 826 \times 0{,}70 = 578$$
$$\text{Qo'llab-quvvatlamaydiganlar: } n(1-\hat{p}) \approx 826 \times (1-0{,}70) = 248\ .$$

Ikkala qiymat ham kamida 10 ga teng bo'lgani sababli, $\hat{p}$ ni normal taqsimot yordamida modellashtirishimiz mumkin.

Y **6.2-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

$\hat{p} = 0{,}70$ uchun standart xatolikni baholang. p noma'lum va standart xatolik ishonch intervallari bo'lganligi uchun formulada p o'rniga $\hat{p}$ dan foydalaning.[1]

M **6.3-MISOL**

95% ishonch intervallarini mikroqarz kredit oluvchilarining yangi regulyatsiyalarni qo'llab-quvvatlashnisbati p uchun tuzing.

Nuqta bahosi 0,70, 95% ishonch intervallari uchun $z^\star = 1{,}96$ va yo'naltirilgan 6.2-mashqdan standart xatolik $SX = 0{,}016$ dan foydalanib, ishonch intervallari:

$$\text{nuqta bahosi } \pm\ z^\star \times SX \quad \rightarrow \quad 0{,}70 \ \pm\ 1{,}96 \times 0{,}016 \quad \rightarrow \quad (0{,}669;\ 0{,}731)$$

Biz 95% ishonch bilan ayta olamizki, mikroqarz kredit oluvchilarining regulyatsiyalarni qo'llab-quvvatlagan haqiqiy nisbati so'rov paytida 0,669 va 0,731 orasida bo'lgan.

BIR ULUSH UCHUN ISHONCH INTERVALLARI

Agar bir ulush uchun ishonch intervallari amaliyotda foydali bo'lishini aniqlagan bo'lsangiz, oraliqni qurish uchun to'rt bosqich mavjud:

Tayyorlash. $\hat{p}$ va n ni aniqlang hamda foydalanmoqchi bo'lgan ishonch darajasini tanlang.

Tekshirish. $\hat{p}$ ning deyarli normal ekanligini ta'minlash uchun shartlarni tekshiring. Bir ulush uchun ishonch intervallarida muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirishda p o'rniga $\hat{p}$ ni ishlating.

Hisoblash. Agar shartlar bajarilgan bo'lsa, $\hat{p}$ yordamida SX ni hisoblang, $z^\star$ ni toping va oraliqni yarating.

Xulosa. Ishonch intervallarini muammo kontekstida talqin qiling.

Yana boshqa bitta nisbat uchun ishonch intervallari misollarini ko'rish uchun, 5.2-bo'limga qarang.

6.1.3 Nisbat uchun gipoteza testlari

Mikroqarz kredit oluvchilarni nazorat qilish bo'yicha mumkin bo'lgan regulyatsiyalardan biri shundaki, ular kredit oluvchilarning moliyaviy holatini baholab, kredit to'lovlarini tekshirishlari kerak bo'ladi. Biz bilmoqchimiz kredit oluvchilar ushbu regulyatsiyani qo'llab-quvvatlaydilarmi?

Y **6.4-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Ushbu turdagi regulyatsiyaga kredit oluvchilar tomonidan ko'pchilik tomonidan qo'llab-quvvatlanish yoki qarshilik bildirilishini baholash uchun gipotezalarni tuzing.[2]

Normal taqsimotdan foydalanish uchun gipoteza testlari kontekstida mustaqillik va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartlari bajarilishi kerak. Gipoteza testida muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti nol nisbat yordamida tekshiriladi: np_0 va $n(1-p_0)$ kamida 10 ekanligini tasdiqlaymiz, bu yerda p_0 Nol qiymatdir.

[1] $SX = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \approx \sqrt{\frac{0{,}70(1-0{,}70)}{826}} = 0{,}016.$

[2] H_0: $p = 0{,}50$. H_A: $p \neq 0{,}50$.

Y

6.5-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Mikroqarz kredit oluvchilar qarz beruvchilardan kredit hisobotlarini olishni va qarz to‘lovlarini baholashni talab qiladigan regulyatsiyani qo‘llab-quvvatlaydilarmi? Tasodifiy 826 nafar kredit oluvchilar so‘rov qilinganida, 51% ushbu regulyatsiyani qo‘llab-quvvatlashlarini aytgan. $\hat{p} = 0{,}51$ ni gipoteza testi kontekstida normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqdanmi?[3]

M

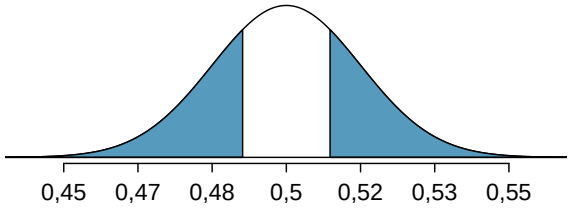
6.6-MISOL

6.4- va 6.5-yo‘naltirilgan mashqdan olingan gipotezalar va ma’lumotlardan foydalanib, qarz beruvchilardan kredit hisobotlarini olish va qarz to‘lovlarini baholashni talab qiluvchi yangi regulyatsiyani mikroqarz kredit oluvchilarining ko‘pchiligi qo‘llab-quvvatlayotganiga ishonarli dalillarni aniqlang.

Gipotezalar oldindan tuzilgan va shartlar tekshirilgan, endi hisob-kitoblarga o‘tamiz. Bitta nisbat gipoteza testi kontekstida standart xatolik nol qiymat p_0 yordamida hisoblanadi:

$$SX = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{826}} = 0{,}017 \ .$$

Quyida normal modelning grafik ko‘rinishi keltirilgan, unda p-qiymat soyali hudud bilan ifodalangan.



Normal model asosida, test statistikasi nuqta bahosining Z-balli sifatida hisoblanadi:

$$Z = \frac{\text{nuqta bahosi} - \text{nol qiymat}}{SX} = \frac{0{,}51 - 0{,}50}{0{,}017} = 0{,}59 \ .$$

Bitta quloqdagi maydon 0,2776 va p-qiymat, ikkala quloqdagi umumiy maydon bilan ifodalanadi, bu esa 0,5552. p-qiymat 0,05 dan kattaroq bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad etmaymiz. Ushbu so‘rov mikroqarz kredit oluvchilarining kredit hisobotlari va qarz to‘lovlarini baholash bo‘yicha regulyatsiyani qo‘llab-quvvatlayotganini yoki qarshilik bildirayotganini aniqlash uchun yetarlicha dalillar bermaydi.

BIR PROPORSIYA UCHUN GIPOTEZA TESTI

Bir proporsiya uchun gipoteza testi to‘g‘ri usul ekanligini aniqlaganingizdan so‘ng, testi bajarish uchun quyidagi to‘rt bosqichni bajaring:

Tayyorlanish. Qiziqish parametrini aniqlang, gipotezalarni yozing, ahamiyatlilik darajasini belgilang, $\hat{p}$ va n ni aniqlang.

Tekshirish. Shartlarni tekshiring $\hat{p}$ ning H_0 ostida deyarli normal ekanligini ta’minlash uchun. Bir proporsiya uchun gipoteza testlarida muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish uchun nol qiymatdan foydalaning.

Hisoblash. Agar shartlar bajarilsa, standart xatolikni hisoblang, yana p_0 dan foydalanib, Z-score ni hisoblang va p-qiymatni aniqlang.

Xulosa qilish. p-qiymatni α bilan solishtirib, gipoteza testini baholang va muammoning konteksti bo‘yicha xulosa bering.

---

[3]Mustaqillik sharti bajarilgan, chunki so‘rov tasodifiy tanlanmaga asoslangan. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajarilgan, bu Nol qiymat ($p_0 = 0{,}5$) dan H_0 ga qarab tekshiriladi: $np_0 = 826 \times 0{,}5 = 413$, $n(1-p_0) = 826 \times 0{,}5 = 413$.

Bitta nisbatli gipoteza testlariga oid qo'shimcha misollar uchun 5.3-bo'limga qarang.

6.1.4 Bir yoki bir nechta shartlar bajarilmagan holatlarda

Biz $\hat{p}$ ni normal taqsimot bilan qachon modellashtirish mumkin bo'lishi haqida ko'p vaqt sarfladik. Agar muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilmasa nima bo'ladi? Bog'liqsiz sharti bajarilmasa-chi? Har ikkala holatda ham ishonch intervallari va gipoteza testlari umumiy tamoyillari bir xil qoladi, ammo interval yoki p-qiymatni hosil qilish uchun strategiya yoki usul o'zgaradi.

Agar gipoteza testi uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilmasa, $\hat{p}$ ning nol taqsimotini nol qiymatdan, p_0, foydalangan holda simulyatsiya qilishimiz mumkin. Simulyatsiya kontseptsiyasi 2.3-bo'limdagi malariya tadqiqotlaridagi g'oyalar bilan o'xshash bo'lib, bu uslub onlayn bo'limda bayon qilingan:

www.openintro.org/r?go=stat_sim_prop_ht

Agar muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ishonch intervallari uchun bajarilmasa, Clopper-Pearson oraliqlari deb ataladigan usuldan foydalanishimiz mumkin. Biroq, ushbu usulning tafsilotlari ushbu kitob doirasidan tashqarida. Internetda bu mavzuni yorituvchi ko'plab manbalar mavjud.

Mustaqillik sharti biroz nozikroq talabdir. U bajarilmaganda, uning qanday va nima sababdan bajarilmaganligini tushunish muhimdir. Masalan, agar biz klaster tanlanmasi olgan bo'lsak (1.3-bo'limga qarang), mos statistik usullar mavjud, lekin ular hatto statistika bo'yicha ikkinchi yoki uchinchi kurslar doirasidan ham tashqarida bo'ladi. Boshqa tomondan, qulaylik tanlanmalaridan olingan ma'lumotlarning ichki tarafkashliklarini to'g'rilash uchun ishonch bilan qo'llaniladigan biror usulni topish qiyin bo'ladi.

Ushbu kitob aniq chegaralangan statistik muammolarni qamrab olgan bo'lsa-da, esda tutingki, bu keng turdagi ma'lumotlar va kontekstlarga mos statistik usullar kutubxonasining faqat birinchi kitobidir.

6.1.5 Nisbatni baholashda tanlanma hajmini tanlash

Ma'lumot yig'ishda, tadqiqot maqsadlariga mos keladigan tanlanma hajmini tanlaymiz. Ko'p hollarda, bu **xatolik chegarasi** (inglizcha: margin of error) – bu ishonch intervallarida nuqta bahosidan qo'shiladigan va ayriladigan qism – etarlicha kichik bo'lishi uchun yetarli tanlanma hajmini tanlashni anglatadi. Masalan, bizning vazifamiz tanlanma hajmini n shunday topish bo'lishi mumkinki, tanlanma nisbati 95% ishonch intervallarida haqiqiy nisbatdan ± 0.04 intervalda bo'lsin.

M **6.7-MISOL**

Bir universitet gazetasi yangi futbol stadionini qurish uchun talabalar to'lovlarini yiliga \$200 ga oshirishni qo'llab-quvvatlaydigan talabalar ulushini aniqlash uchun so'rov o'tkazmoqda. Xatolik chegarasi 0,04 dan kichik bo'lishi uchun 95% ishonchlilik darajasi bilan qanday hajmdagi tanlanma talab qilinadi?

Tanlanma nisbati uchun xatolik chegarasi quyidagicha:

$$z^\star \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ .$$

Bizning maqsadimiz xatolik chegarasi 0,04 dan kichik bo'lishi uchun eng kichik tanlanma hajmini n topishdir. 95% ishonchlilik darajasi uchun $z^\star$ qiymati 1,96 ga teng:

$$1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \ < \ 0,04 \ .$$

Ushbu tenglamada ikkita noma'lum mavjud p va n. Agar p ning oldingi so'rovdan bahosi bo'lsa, biz ushbu qiymatni kiritib n ni hisoblashimiz mumkin. Agar bunday baho bo'lmasa, p ning boshqa bir qiymatini ishlatishimiz kerak bo'ladi. Xatolik chegarasi $p = 0,5$ bo'lganida eng katta bo'lishi aniqlangan, shuning uchun agar nisbat bahosi mavjud bo'lmasa, odatda ushbu *eng yomon holat*

qiymati (inglizcha: worst case value) ishlatiladi:

$$\begin{aligned} 1,96 \times \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{n}} &< 0,04 \\ 1,96^2 \times \frac{0,5(1-0,5)}{n} &< 0,04^2 \\ 1,96^2 \times \frac{0,5(1-0,5)}{0,04^2} &< n \\ 600,25 &< n\ . \end{aligned}$$

Bizga 600,25 dan ortiq ishtirokchilar talab qilinadi, bu esa haqiqiy nisbatdan 0,04 intervalida 95% ishonchlilik darajasida bo‘lish uchun kamida 601 ishtirokchi kerakligini bildiradi.

Agar nisbatning bahosi mavjud bo‘lsa, uni $0,5$ ning eng yomon holat qiymati o‘rniga ishlatamiz.

Y **6.8-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Bir menejer o‘z fabrikasida yangi shinalar modelini katta hajmda ishlab chiqarishni boshqarish arafasida, va u ushbu shinalar orasida sifat nazoratidan o‘tmaydigan ulushni baholashni xohlaydi. Sifat nazorati jamoasi so‘nggi uchta shinalar modelini kuzatgan, bunda birinchi modelda shinalarning 1,7% i, ikkinchisida 6,2% i, va uchinchisida 1,3% i rad etilgan. Menejer yangi shinalar modelining sifatsizlik ulushini 90% ishonchlilik darajasida taxminan 1% intervalida baholash uchun yetarli shinalarni ko‘rib chiqmoqchi. Tanlash uchun uch xil sifatsizlik ulushi mavjud. Har birini alohida hisoblang va ko‘rib chiqish uchun uchta tanlanma hajmini aniqlang.[4]

M **6.9-MISOL**

6.8-yo‘naltirilgan mashq da tanlanma hajmlari sezilarli darajada farq qiladi. Uchta hisob-kitobdan qaysi birini tanlashni taklif qilasiz? Sizning tanlovingizga nima ta’sir qiladi?

Yangi model qaysi eski modellarga eng ko‘p o‘xshashligini aniqlashimiz va keyin tegishli tanlanma hajmini tanlashimiz mumkin. Yoki, agar oldingi baholarning ikkitasi kichik tanlanmalarga asoslangan bo‘lsa, qolgan biri esa katta tanlanma asosida bo‘lsa, katta tanlanma uchun qiymatni ko‘rib chiqishimiz mumkin.

Shuningdek, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti yakuniy tanlanmada tekshirilishi kerakligini unutmang. Masalan, agar biz $n = 1584$ ta shinalarni sinovdan o‘tkazib, xato darajasi 0,5% ekanini aniqlasak, normal yaqinlashuv mantiqdan bo‘lmasligi va ishonch intervallarini yaratish uchun yanada rivojlangan statistik usullarga ehtiyoj bo‘lishi mumkin.

Y **6.10-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tasavvur qiling, biz qarz beruvchilar uchun regulyatsiyani qo‘llab-quvvatlash holatini har oy kuzatib borishni xohlaymiz va bu maqsadda yangi so‘rovlar o‘tkazamiz. Tez-tez so‘rov o‘tkazish qimmatga tushadi, shuning uchun har bir alohida so‘rov uchun 5% xatolik chegarasi qoniqarli bo‘ladi. Dastlabki qarz oluvchilar namunasi asosida, 70% regulyatsiyaning biror bir shaklini qo‘llab-quvvatlagan, 95% ishonchlilik darajasida 0,05 xatolik chegarasi uchun har oygi namunaamiz qanchalik katta bo‘lishi kerak?[5]

---

[4] 90% ishonch intervallari uchun, $z^\star = 1,6449$, va nisbatning 0,017 bahosi mavjudligi sababli, biz xatolik chegarasi formulasida uni ishlatamiz:

$$1,6449 \times \sqrt{\frac{0,017(1-0,017)}{n}} < 0,01 \quad \rightarrow \quad \frac{0,017(1-0,017)}{n} < \left(\frac{0,01}{1,6449}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 452,15 < n$$

Tanlanma hajmini hisoblashda biz har doim yuqoriga qarab yaxlitlaymiz, shuning uchun birinchi shinalar modeli 453 ta shinani etarli deb ko‘rsatadi.

Shunga o‘xshash hisob-kitoblarni p uchun 0,062 va 0,013 qiymatlarini ishlatib amalga oshirish mumkin va ushbu nisbatlar mos ravishda 1574 va 348 ta minimal tanlanma hajmlarini beradi, buni tasdiqlashingiz kerak.

[5] Oldingi hisob-kitoblar kabi, bu safar p uchun 0,70 dan foydalanamiz, $0,5$ o‘rniga:

$$1,96 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx 1,96 \times \sqrt{\frac{0,70(1-0,70)}{n}} \leq 0,05 \quad \rightarrow \quad n \geq 322,7$$

Tanlanma hajmi kamida 323 ta bo‘lishi kerak. (Eslatma: tanlanma hajmi hisob-kitoblarida har doim yuqoriga qarab yaxlitlang!) Ushbu so‘rovni vaqt o‘tishi bilan kuzatib borishni rejalashtirayotganimiz sababli, vaqt-vaqti bilan ushbu hisob-kitoblarni takrorlashni va asosiy holat ko‘rsatkichlari o‘zgarishi ehtimolini hisobga olish tavsiya etiladi.

Mashqlar

6.1 Vegetarian kollej talabalari. Faraz qilaylik, kollej talabalarning 8% vegetarian. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.

(a) 60 ta tasodifiy tanlangan vegetarianlarning namuna proporsiyalari taqsimoti $n \geq 30$ bo'lgani sababli taxminan normal.

(b) 50 ta tasodifiy tanlangan vegetarian kollej talabalari proporsiyalari taqsimoti o'ngga egilgan.

(c) 125 ta kollej talabalaridan iborat tasodifiy namuna, bunda 12% vegetarian, g'ayrioddiy hisoblanadi.

(d) 250 ta kollej talabalaridan iborat tasodifiy namuna, bunda 12% vegetarian, g'ayrioddiy hisoblanadi.

(e) Namunani 125 dan 250 ga oshirsak, standart xatolik ikki baravarga kamayadi.

6.2 Yosh amerikaliklar, 1-qism. Taxminan 77% yosh kattalar Amerikaning orzusiga erishishlari mumkin deb o'ylashadi. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.[6]

(a) Amerikaning orzusiga erishish mumkin deb o'ylagan yosh amerikaliklarning 20 ta namunalarida proporsiyalar taqsimoti chapga egilgan.

(b) Amerikaning orzusiga erishish mumkin deb o'ylagan yosh amerikaliklarning 40 ta tasodifiy namunalarida proporsiyalar taqsimoti $n \geq 30$ sababli taxminan normal.

(c) 60 ta yosh amerikaliklardan iborat tasodifiy namuna, bunda 85% Amerikaning orzusiga erishish mumkin deb o'ylasa, g'ayrioddiy hisoblanadi.

(d) 120 ta yosh amerikaliklardan iborat tasodifiy namuna, bunda 85% Amerikaning orzusiga erishish mumkin deb o'ylasa, g'ayrioddiy hisoblanadi.

6.3 To'q sariq mushuklar. Faraz qilaylik, to'q sariq mushuklarning 90% erkak. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.

(a) 30 ta tasodifiy tanlangan namunalar proporsiyalari taqsimoti chapga egilgan.

(b) Namunani 4 barobarga oshirish namuna proporsiyasining standart xatolikni ikki baravarga kamaytiradi.

(c) 140 ta tasodifiy namunalar proporsiyalari taqsimoti taxminan normal.

(d) 280 ta tasodifiy namunalar proporsiyalari taqsimoti taxminan normal.

6.4 Yosh amerikaliklar, 2-qism. Taxminan 25% yosh amerikaliklar iqtisodiy tanazzul sababli oila qurishni kechiktirishgan. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.[7]

(a) Iqtisodiy tanazzul sababli oila qurishni kechiktirgan yosh amerikaliklarning 12 ta tasodifiy namunalarida proporsiyalar taqsimoti o'ngga egilgan.

(b) Iqtisodiy tanazzul sababli oila qurishni kechiktirgan yosh amerikaliklarning proporsiyalari taqsimoti taxminan normal bo'lishi uchun tasodifiy namunalar soni kamida 40 bo'lishi kerak.

(c) 50 ta yosh amerikaliklardan iborat tasodifiy namuna, bunda 20% oila qurishni kechiktirgan, g'ayrioddiy hisoblanadi.

(d) 150 ta yosh amerikaliklardan iborat tasodifiy namuna, bunda 20% oila qurishni kechiktirgan, g'ayrioddiy hisoblanadi.

(e) Namunani uch barobarga oshirish namuna proporsiyasining standart xatolikni uchdan bir qismini kamaytiradi.

6.5 Jinsiy tenglik. Umumiy ijtimoiy so'rovnoma 1,390 amerikaliklardan tasodifiy namunalar asosida quyidagi savolni so'radi: "Umuman olganda, erkaklar va ayollar o'rtasida tenglikni targ'ib qilish hukumatning mas'uliyati bo'lishi kerak deb o'ylaysizmi yoki kerak emasmi?" Respondentlarning 82% "bo'lishi kerak" deb javob berishgan. 95% ishonch darajasida, ushbu namunada 2% xatolik marjasi mavjud. Ushbu ma'lumotga asoslanib, quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.[8]

(a) Biz ushbu namunadagi amerikaliklarning 80% dan 84% gacha bo'lgan qismi hukumatning erkaklar va ayollar o'rtasida tenglikni targ'ib qilish mas'uliyati ekanligiga ishonadi deb 95% ishonchdamiz.

(b) Biz barcha amerikaliklarning 80% dan 84% gacha bo'lgan qismi hukumatning erkaklar va ayollar o'rtasida tenglikni targ'ib qilish mas'uliyati ekanligiga ishonadi deb 95% ishonchdamiz.

(c) Agar biz 1,390 amerikaliklardan ko'plab tasodifiy namunalar olganimizda, har bir namunaga 95% ishonch oralig'i hisoblaganimizda, ushbu oralig'larning 95% amerikaliklarning haqiqiy proporsiyasini o'z ichiga olgan bo'lardi.

[6] A. Vaughn. "Poll finds young adults optimistic, but not about money". In: *Los Angeles Times* (Nov. 3, 2011).
[7] Demos.org. "The State of Young America: The Poll". In: (Nov. 2, 2011).
[8] National Opinion Research Center, General Social Survey, 2018.

(d) Xatolik marjasini 1% ga kamaytirish uchun namunalar sonini to‘rt barobar oshirish kerak.

(e) Ushbu ishonch oralig‘iga asoslanib, ko‘pchilik amerikaliklar hukumatning erkaklar va ayollar o‘rtasida tenglikni targ‘ib qilish mas’uliyati ekanligiga ishonadi deb xulosa qilish uchun yetarli dalillar mavjud.

6.6 Keksalar haydovchilari. Marist so‘rovnomasiga ko‘ra, mamlakat bo‘ylab kattalarning 66% haydovchilik guvohnomasiga ega bo‘lgan shaxslar 65 yoshga to‘lganidan keyin yo‘l harakati imtonini qayta topshirishlari kerak deb o‘ylashadi. Bundan tashqari, 1,018 amerikalik kattalar bilan suhbat o‘tkazilganligi va 95% ishonch darajasida xatolik marjasi 3% ekanligi haqida xabar berilgan.[9]

(a) Marist so‘rovnomasida xabar berilgan xatolik marjasini tasdiqlang.

(b) 95% ishonch oralig‘iga asoslanib, so‘rovnoma aholi orasida 70% dan ko‘p shaxslar haydovchilik imtihonini qayta topshirishi kerak deb o‘ylashini isbotlaydimi?

6.7 4-iyuldagi mushakbozlik. Mahalliy yangiliklar manbasi Kansasning tasodifiy tanlangan 600 nafar aholisi orasida o‘tkazilgan so‘rovnoma bo‘yicha 56% 4-iyulda mushakbozlik o‘tkazishni rejalashtirganligini xabar qildi. 95% ishonch darajasida ushbu 56% nuqtali baholash uchun xatolik marjasini aniqlang.[10]

6.8 Gretsiyada hayot bahosi. Gretsiya 2009-yil oxiridan buyon jiddiy iqtisodiy inqirozga duch kelmoqda. Gallup so‘rovnomasida 2011-yilda tasodifiy tanlangan 1,000 nafar greklardan 25% “qiyinchilikda” ekanliklarini aytgan.[11]

(a) Populyatsiya parametrini aniqlang. Ushbu parametrning nuqtali bahosi qanday qiymatda?

(b) Ushbu ma’lumotlar asosida ishonch oralig‘ini tuzish uchun zarur bo‘lgan shartlar bajarilganmi, tekshiring.

(c) Gretsiyada “qiyinchilikda” bo‘lganlar proporsiyasi uchun 95% ishonch oralig‘ini hisoblang.

(d) Hech qanday hisob-kitob qilmasdan, agar yuqori ishonch darajasidan foydalansak, ishonch oralig‘iga nima bo‘lishini tasvirlang.

(e) Hech qanday hisob-kitob qilmasdan, agar namunalar sonini oshirsak, ishonch oralig‘iga nima bo‘lishini tasvirlang.

6.9 Chet elda o‘qish. SAT topshirgan va ixtiyoriy veb-so‘rovnomani to‘ldirgan 1,509 o‘rta maktab bitiruvchilari orasida o‘tkazilgan so‘rovnoma shuni ko‘rsatadiki, o‘rta maktab bitiruvchilarining 55% kollejda chet elda o‘qish dasturida ishtirok etishiga ishonch bildirishgan.[12]

(a) Ushbu namuna AQShdagi barcha o‘rta maktab bitiruvchilarining populyatsiyasidan olingan vakillik namunasi hisoblanadimi? Fikringizni tushuntiring.

(b) Faraz qilaylik, inference uchun zarur shartlar bajarilgan. Agar sizning (a)-qism javobingiz ushbu yondashuvni ishonchli emas deb ko‘rsatgan bo‘lsa ham, bu tahlilni o‘tkazish (lekin xabar bermaslik) qiziqarli bo‘lishi mumkin. SATni topshirgan va kollejda chet elda o‘qish dasturida qatnashishga ishonch bildirgan o‘rta maktab bitiruvchilari proporsiyasi uchun 90% ishonch oralig‘ini tuzing va ushbu oralig‘ni kontekstda izohlang.

(c) “90% ishonch” nimani anglatadi?

(d) Ushbu ishonch oralig‘iga asoslanib, o‘rta maktab bitiruvchilarining ko‘pchiligi kollejda chet elda o‘qish dasturida qatnashishga ishonch bildirganini da’vo qilish to‘g‘rimi?

6.10 Marixuanani qonuniylashtirish, 1-qism. Umumiy ijtimoiy so‘rovnoma (General Social Survey) 1,578 AQSh fuqarolaridan “Sizningcha, marixuana iste’molini qonuniylashtirish kerakmi yoki yo‘qmi?” deb so‘radi. Javob beruvchilarning 61% qonuniylashtirish kerakligini aytishgan.[13]

(a) 61% namunaviy statistika yoki populyatsiya parametri hisoblanadimi? Fikringizni tushuntiring.

(b) AQSh fuqarolarining marixuana qonuniylashtirilishi kerak deb hisoblagan proporsiyasi uchun 95% ishonch oralig‘ini tuzing va ushbu oralig‘ni ma’lumotlar kontekstida izohlang.

(c) Bir tanqidchi ushbu 95% ishonch oralig‘i faqat statistik ma’lumot normal taqsimotga amal qilsa yoki normal model yaxshi yaqinlashuv bo‘lsa, to‘g‘ri ekanligini ta’kidlaydi. Ushbu ma’lumotlar uchun bu to‘g‘rimi? Tushuntiring.

(d) Ushbu so‘rovnoma natijalari bo‘yicha bir yangilikda “Amerikaliklarning ko‘pchiligi marixuanani qonuniylashtirish kerak deb hisoblaydi” deb xabar berilgan. Ushbu yangilik xabari ishonch oralig‘ingizga asoslanib oqlanadimi?

[9] Marist Poll, Road Rules: Re-Testing Drivers at Age 65?, March 4, 2011.
[10] Survey USA, News Poll #19333, data collected on June 27, 2012.
[11] Gallup World, More Than One in 10 “Suffering” Worldwide, data collected throughout 2011.
[12] studentPOLL, College-Bound Students’ Interests in Study Abroad and Other International Learning Activities, January 2008.
[13] National Opinion Research Center, General Social Survey, 2018.

6.11 Milliy sog'liqni saqlash rejasi, 1-qism. *Kaiser Family Foundation* tomonidan 2019-yilda AQSh kattalari orasida o'tkazilgan so'rov natijalariga ko'ra, Demokratlarning 79%, Mustaqillarning 55%, va Respublikachilarning 24% umumiy nomli "Milliy sog'liqni saqlash rejasi"ni qo'llab-quvvatlagan. So'rovda 347 demokrat, 298 respublikachi va 617 mustaqil ishtirok etgan.[14]

(a) Televizorda bir siyosiy sharhlovchi mustaqillarning ko'pchiligi Milliy sog'liqni saqlash rejasi qo'llab-quvvatlayotganini aytmoqda. Ushbu ma'lumotlar bu bayonotni tasdiqlash uchun kuchli dalillar taqdim etadimi?

(b) Mustaqillarning umumiy rejaga qarshi ekanligi proporsiyasi uchun ishonch oralig'i 0.5 ni o'z ichiga olishini kutasizmi? Tushuntiring.

6.12 Kollejga borish arziydimi? 1-qism. To'rt yillik kollej darajasiga ega bo'lmagan va hozirda o'qishda emas bo'lgan 331 amerikalik kattalardan iborat tasodifiy tanlamada, 48% kollejga bormaslik sababi sifatida moliyaviy imkoniyatning yo'qligini ko'rsatgan.[15]

(a) Bir gazeta maqolasi amerikaliklarning ozchilik qismi kollejga bormaslik sababini moliyaviy imkoniyatning yo'qligi deb hisoblaydi va ushbu so'rov natijasidagi nuqtali bahoni dalil sifatida keltiradi. Ushbu ma'lumotlar ushbu bayonotni tasdiqlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi? Gipoteza testini bajaring.

(b) Amerikaliklarning kollejga bormaslik sababi moliyaviy imkoniyat ekanligini ko'rsatgan proporsiyasi uchun ishonch oralig'i 0.5 ni o'z ichiga olishini kutasizmi? Tushuntiring.

6.13 Ta'mni sinash. Ba'zi odamlar birinchi qurtda dietik soda va oddiy soda o'rtasidagi farqni aniqlashlari mumkin deb da'vo qilishadi. Ushbu da'voni tekshirishni xohlagan tadqiqotchi 80 nafar odamni tasodifiy tanlab oldi. Keyin u 80 ta sodani oddiy oq stakanga quyib, yarmiga dietik va yarmiga oddiy sodani tasodifiy tarzda joylashtirdi va har bir ishtirokchiga bir qurt ichib, uni dietik yoki oddiy deb aniqlashni so'radi. 53 nafar ishtirokchi sodani to'g'ri aniqladi.

(a) Ushbu ma'lumotlar bu odamlar dietik va oddiy soda o'rtasidagi farqni aniqlashda tasodifiy taxmindan yaxshiroq yoki yomonroq ekanligini ko'rsatish uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi?

(b) Ushbu kontekstda p-qiymatini talqin qiling.

6.14 Kollejga borish arziydimi? 2-qism. 6.12-mashq 331 amerikaliklardan iborat so'rov natijalarini taqdim etadi, ulardan 48% kollejga bormaslik sababini moliyaviy imkoniyatning yo'qligi deb ko'rsatgan.

(a) Amerikaliklarning kollejga bormaslik sababini moliyaviy imkoniyat deb ko'rsatgan proporsiyasi uchun 90% ishonch oralig'ini hisoblang va ushbu oralig'ni kontekstda talqin qiling.

(b) Agar 90% ishonch darajasidagi xatolik marjasi taxminan 1.5% bo'lishini istasak, qanchalik katta so'rovni tavsiya qilasiz?

6.15 Milliy sog'liqni saqlash rejasi, 2-qism. 6.11-mashq 2019-yilda AQShda umumiy nomli "Milliy sog'liqni saqlash rejasi"ni qo'llab-quvvatlashni baholash bo'yicha so'rov natijalarini taqdim etadi va mustaqillarning 55% rejani qo'llab-quvvatlayotganini bildiradi. Agar bu raqamni 90% ishonch darajasida 1% aniqlik bilan baholashni xohlasak, qanchalik katta namuna olish kerak bo'ladi?

6.16 Marixuanani qonuniylashtirish, 2-qism. 6.10-mashqda muhokama qilinganidek, umumiy ijtimoiy so'rovnoma (inglizcha: General Social Survey) AQSh aholining taxminan 61% marixuana qonuniylashtirilishi kerak deb hisoblaganini ko'rsatgan. Agar 95% ishonch oralig'ida xatolik marjasini 2% ga cheklamoqchi bo'lsak, qancha amerikalikdan so'rovnoma olishimiz kerak?

6.2 Ikki nisbat farqi

Biz 6.1-bo'limdagi usullarni kengaytirib, bosh to'plam nisbatlaridagi farqlar uchun ishonch intervallari va gipoteza testlarini qo'llashni istaymiz: $p_1 - p_2$. Tadqiqotlarimizda, biz tanlanmaga asoslangan $p_1 - p_2$ uchun mantiqiy nuqta bahosini aniqlaymiz, va uning shaklini allaqachon taxmin qilgan bo'lishingiz mumkin: $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$. Keyin, bir nisbat kontekstida qo'llangan usullarni tatbiq qilamiz: nuqta bahosi normal taqsimot bilan modellashtirilishi mumkinligini tasdiqlaymiz, baholash uchun standart xatoni hisoblaymiz va xulosa chiqarish asosini qo'llaymiz.

[14]Kaiser Family Foundation, The Public On Next Steps For The ACA And Proposals To Expand Coverage, data collected between Jan 9-14, 2019.

[15]Pew Research Center Publications, Is College Worth It?, data collected between March 15-29, 2011.

6.2.1 Ikki nisbat farqining tanlanma taqsimoti

$\hat{p}$ bilan bo‘lgani kabi, ikki tanlanma nisbat farqi $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ ma’lum shartlar bajarilganda normal taqsimot yordamida modellashtirilishi mumkin. Birinchidan, kengroq bog‘liqsizlik sharti talab qilinadi, ikkinchidan esa muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti har ikkala guruh uchun bajarilishi kerak.

IKKI NISBAT FARQINING $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ TANLANMA TAQSIMOTINI NORMAL BILAN MODELLASHTIRISH UCHUN SHARTLAR

Farq $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ normal taqsimot bilan modellashtirilishi mumkin, agar

- *Bog‘liqsizlik, kengaytirilgan.* Ma’lumotlar har ikkala guruh ichida va guruhlar o‘rtasida bog‘liqsiz bo‘lishi kerak. Odatda, bu ma’lumotlar ikkita bog‘liqsiz tasodifiy tanlanmadan olingan yoki tasodifiy eksperimentdan kelib chiqqanda bajariladi.
- *Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti.* Har ikkala guruh uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilishi kerak, bunda muvaffaqiyat va muvaffaqiyatsizliklar har bir guruhda alohida tekshiriladi.

Ushbu shartlar bajarilganda, $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ uchun standart xatolik quyidagicha bo‘ladi:

$$SE = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

bu yerda p_1 va p_2 bosh to‘plam nisbatlarini, n_1 va n_2 esa tanlanmalar hajmini ifodalaydi.

6.2.2 Ikki nisbat farqi uchun $p_1 - p_2$ ishonch intervallari

Ikki nisbat farqi uchun umumiy ishonch intervallari formulasini qo‘llashimiz mumkin, bunda $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ nuqta bahosi sifatida ishlatiladi va SX formulasidan foydalanamiz:

$$\text{nuqta bahosi } \pm\ z^\star \times SX \qquad \rightarrow \qquad \hat{p}_1 - \hat{p}_2\ \pm\ z^\star \times \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\ .$$

Ishonch intervallarini hisoblash yoki gipoteza testini yakunlash uchun tayyorlash, tekshirish, hisoblash va xulosa chiqarish bosqichlarini bajarishda bir xil uslubdan foydalanamiz. Tafsilotlar bir oz o‘zgaradi, lekin umumiy yondashuv bir xil qoladi. Statistik usullarni qo‘llaganda ushbu bosqichlar haqida o‘ylang.

M **6.11-MISOL**

Yurak xuruji uchun kardiopulmoner reanimatsiya (inglizcha: cardiopulmonary resuscitation yoki CPR) o‘tkazgan va keyin shifoxonaga yotqizilgan bemorlar ustida o‘tkazilgan eksperimentni ko‘rib chiqamiz. Ushbu bemorlar qon suyultiruvchi vosita olgan davolash guruhi va qon suyultiruvchi vosita olmagan nazorat guruhiga tasodifiy ajratildi. Qiziqish natijasi o‘zgaruvchisi bemorlarning kamida 24 soat omon qolishidir. Natijalar 6.1-rasmda ko‘rsatilgan. Tanlanma nisbatlari farqini normal taqsimot bilan modellashtirish mumkinligini tekshiring.

Dastlab bog‘liqsizlikni tekshiramiz: bu tasodifiy eksperiment bo‘lganligi sababli, ushbu shart bajariladi.

Keyingi bosqichda har bir guruh uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshiramiz. Har bir eksperiment bo‘limida kamida 10 muvaffaqiyat va 10 muvaffaqiyatsizlik mavjud (11, 14, 39, 26), shuning uchun bu shart ham bajariladi.

Ikkala shart bajarilganda, ushbu ma’lumotlar uchun tanlanma nisbatlari farqini normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqdan.

	Omon qoldi	Vafot etdi	Jami
Nazorat	11	39	50
Davolash	14	26	40
Jami	25	65	90

6.1-rasm. CPR tadqiqot natijalari. Davolash guruhi bemorlari qon suyultiruvchi vosita oldi, nazorat guruhi bemorlari esa olmadi.

6.12-MISOL

CPR tadqiqotida omon qolish darajalari farqi uchun 90% ishonch intervallarini yarating va izoh bering.

Biz p_t ni davolash guruhidagi omon qolish darajasi, p_c ni esa nazorat guruhidagi omon qolish darajasi sifatida belgilaymiz:

$$\hat{p}_t - \hat{p}_c = \frac{14}{40} - \frac{11}{50} = 0{,}35 - 0{,}22 = 0{,}13 \ .$$

203-sahifadagi standart xatolik formulasidan foydalanamiz. Bir tanlanmali nisbat holatidagi kabi, ishonch intervallari kontekstida har bir nisbatning tanlanma baholarini ishlatamiz:

$$SX \approx \sqrt{\frac{0{,}35(1-0{,}35)}{40} + \frac{0{,}22(1-0{,}22)}{50}} = 0{,}095 \ .$$

90% ishonch intervallari uchun $z^\star = 1{,}6449$:

$$\text{nuqta bahosi } \pm \ z^\star \times SX \quad \rightarrow \quad 0{,}13 \ \pm \ 1{,}6449 \times 0{,}095 \quad \rightarrow \quad (-0{,}026; 0{,}286) \ .$$

Biz 90% ishonch bilan aytishimiz mumkinki, qon suyultiruvchi vositalar tadqiqotdagidek bemorlar uchun omon qolish darajasiga -2,6% dan +28,6% gacha ta'sir qiladi. 0% ushbu oraliq ichida bo'lganligi sababli, qon suyultiruvchi vositalar yurak xurujidan keyin CPR olgan bemorlarni yaxshilaydimi yoki zarar yetkazadimi, aniqlash uchun yetarli ma'lumot yo'q.

6.13-YO'NALTIRILGAN MASHQ

5 yillik eksperiment yurak-qon tomir hodisalarini kamaytirish bo'yicha baliq yog'larining samaradorligini baholash uchun o'tkazildi, bunda har bir ishtirokchi ikki davolash guruhidan biriga tasodifiy ravishda ajratildi. Biz ushbu bemorlarning yurak xuruji natijalarini ko'rib chiqamiz:

	yurak xuruji	hodisa yo'q	Jami
baliq yog'i	145	12788	12933
plasebo	200	12738	12938

Baliq yog'larining yurak xurujlariga ta'sirining 95% ishonch intervallarini yarating va natijalarni ushbu tadqiqot kontekstida izohlang.[16]

---

[16] Bemorlar tasodifiy ajratilganligi sababli, mavzular har ikkala guruh ichida va o'rtasida bog'liqsizdir. Har ikkala guruh uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajarilgan, chunki barcha sonlar kamida 10 ga teng. Bu ikki nisbatning farqini normal taqsimot bilan modellashtirish uchun zarur shartlarni qondiradi.

Tanlanma nisbatlarni hisoblang ($\hat{p}_{\text{baliq yog'i}} = 0{,}0112$, $\hat{p}_{\text{plasebo}} = 0{,}0155$), farqning nuqta bahosi ($0{,}0112 - 0{,}0155 = -0{,}0043$), va standart xatolikni hisoblang ($SE = \sqrt{\frac{0{,}0112 \times 0{,}9888}{12933} + \frac{0{,}0155 \times 0{,}9845}{12938}} = 0{,}00145$). Keyingi bosqichda, 95% ishonchlilik darajasi uchun umumiy formula yordamida qiymatlarni joylashtiramiz, bu yerda $z^\star = 1{,}96$:

$$-0{,}0043 \pm 1{,}96 \times 0{,}00145 \quad \rightarrow \quad (-0{,}0071, -0{,}0015).$$

95% ishonchlilik darajasiga ko'ra, baliq yog'i qo'shimchalari yurak xuruji xavfini 0,15-0,71 foizgacha kamaytiradi (boshlang'ich bazaviy ko'rsatkich 1,55%). Ishonch oralig'i butunlay manfiy bo'lgani uchun, bu baliq yog'ining samaradorligi haqida kuchli statistik dalil hisoblanadi.

6.2.3 Ikki nisbat farqi uchun gipoteza testlari

Mammografiya bu ko‘krak bezi saratoni uchun tekshiruv o‘tkazish uchun qo‘llaniladigan rentgen protsedurasi. Mammografiyalardan foydalanish kerakmi yoki yo‘qmi munozarali mavzulardan biri bo‘lib, bu bizning navbatdagi misolimizning mavzusi bo‘ladi, unda H_0 $p_1 - p_2 = 0$ (yoki ekvivalent ravishda, $p_1 = p_2$) bo‘lgan ikki nisbatli gipoteza testlarini o‘rganamiz.

30 yillik tadqiqot deyarli 90000 nafar ayol ishtirokchisi bilan o‘tkazildi. 5 yillik skrining davri davomida har bir ayol ikki guruhdan biriga tasodifiy ajratildi: birinchi guruhdagi ayollar ko‘krak bezi saratoni uchun muntazam mammografiya tekshiruvlari olgan, ikkinchi guruh esa mammografiyasiz muntazam ko‘krak bezi saratoni tekshiruvlari olgan. Tadqiqotning keyingi 25 yili davomida hech qanday interventsiya o‘tkazilmagan va biz 30 yillik davr davomida ko‘krak bezi saratonidan o‘lim natijalarini ko‘rib chiqamiz. Tadqiqot natijalari 6.2-rasmdada jamlangan.

Agar mammografiyalar oddiy ko‘krak bezi saratoni tekshiruvlariga qaraganda ancha samarali bo‘lsa, nazorat guruhida ko‘krak bezi saratonidan qo‘shimcha o‘limlarni ko‘rishimiz kerak. Boshqa tomondan, agar mammografiyalar oddiy tekshiruvlar qadar samarali bo‘lmasa, mammografiya guruhida ko‘krak bezi saratonidan o‘limlarning ortishini kutishimiz mumkin.

	Ko‘krak bezi saratonidan o‘lim?	
	Ha	Yo‘q
Mammografiya	500	44425
Nazorat	505	44405

6.2-rasm. Ko‘krak bezi saratoni tadqiqot natijalari jamlanmasi.

Y **6.14-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ushbu tadqiqot eksperimentmi yoki kuzatuv tadqiqotimi?[17]

Y **6.15-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Mammografiya va nazorat guruhlarida ko‘krak bezi saratoni o‘limlari o‘rtasidagi farqni tekshirish uchun gipotezalarni tuzing.[18]

6.16-misolda biz tadqiqot natijalarini tahlil qilish uchun normal taqsimotdan foydalanish shartlarini tekshiramiz. Tafsilotlar ishonch intervallariga o‘xshash. Biroq, nol gipoteza $p_1 - p_2 = 0$ bo‘lganida, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish uchun **birlashgan nisbat** deb nomlangan maxsus nisbatdan foydalanamiz:

$$\hat{p}_{birlashgan} = \frac{\text{butun tadqiqot davomida ko‘krak bezi saratonidan vafot etgan bemorlar soni}}{\text{butun tadqiqotdagi bemorlar soni}}$$
$$= \frac{500 + 505}{500 + 44425 + 505 + 44405}$$
$$= 0{,}0112 \ .$$

Ushbu nisbat tadqiqot davomida ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasining bahosi bo‘lib, nol gipoteza $p_{kbs} = p_{nazorat}$ to‘g‘ri bo‘lsa, p_{kbs} va $p_{nazorat}$ nisbatlarining eng yaxshi bahosidir. Shuningdek, biz standart xatoni hisoblashda ham ushbu birlashgan nisbatdan foydalanamiz.

M **6.16-MISOL**

Ushbu tadqiqotda nisbatlar farqini normal taqsimot yordamida modellashtirish mantiqdanmi?

Bemorlar tasodifiy ajratilganligi sababli, ular har ikkala guruh ichida va o‘rtasida bog‘liqsiz deb qaralishi mumkin. Shuningdek, har bir guruh uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirishimiz kerak. Nol gipoteza ostida p_{kbs} va $p_{nazorat}$ nisbatlarlari teng, shuning uchun H_0 bo‘yicha ushbu qiymatlarning eng yaxshi bahosi, ikki tanlanmadan birlashgan nisbat

[17] Bu eksperimentdir. Bemorlar tasodifiy ravishda mammografiya yoki standart ko‘krak bezi saratoni tekshiruvlarini olish uchun ajratilgan. Ushbu tadqiqot asosida sababiy xulosalar chiqarishimiz mumkin.

[18] H_0: mammografiya yordamida tekshirilgan bemorlar uchun ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasi nazorat guruhidagi bemorlar uchun ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasiga teng, $p_{kbs} - p_{nazorat} = 0$.
H_A: mammografiya yordamida tekshirilgan bemorlar uchun ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasi nazorat guruhidagi bemorlar uchun ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasidan farq qiladi, $p_{kbs} - p_{nazorat} \neq 0$.

$\hat{p}_{birlashgan} = 0{,}0112$ dan foydalanib muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshiramiz:

$$\hat{p}_{birlashgan} \times n_{kbs} = 0,0112 \times 44925 = 503 \qquad (1 - \hat{p}_{birlashgan}) \times n_{kbs} = 0,9888 \times 44925 = 44422$$
$$\hat{p}_{birlashgan} \times n_{nazorat} = 0,0112 \times 44910 = 503 \quad (1 - \hat{p}_{birlashgan}) \times n_{nazorat} = 0,9888 \times 44910 = 44407$$

Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajariladi, chunki barcha qiymatlar kamida 10 ga teng. Ikkala shart bajarilganligi sababli, nisbatlar farqini normal taqsimot yordamida modellashtirishimiz mumkin.

BIRLASHGAN NISBATDAN H_0 BO'LGANDA $p_1 - p_2 = 0$ FOYDALANING

Nol gipoteza nisabatlar tengligini bildirsa, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish va standart xatoni baholash uchun birlashgan nisbatdan ($\hat{p}_{birlashgan}$) foydalaning:

$$\hat{p}_{birlashgan} = \frac{\text{"muvaffaqiyatlar" soni}}{\text{holatlar soni}} = \frac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2} \ .$$

Bu yerda $\hat{p}_1 n_1$ birinchi tanlanma muvaffaqiyatlar sonini ifodalaydi, chunki

$$\hat{p}_1 = \frac{\text{birinchi tanlanma muvaffaqiyatlari soni}}{n_1} \ .$$

Xuddi shunday, $\hat{p}_2 n_2$ ikkinchi tanlanma muvaffaqiyatlari sonini ifodalaydi.

6.16-misolda, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish uchun birlashgan nisbatdan foydalanildi.[19] Keyingi misolda biz birlashgan nisbat ishlatiladigan ikkinchi joyni ko'ramiz: standart xatoni hisoblash.

M **6.17-MISOL**

Ko'krak bezi saratonidan o'lim darajalari farqi uchun nuqta bahosini hisoblang va birlashgan nisbatdan $\hat{p}_{birlashgan} = 0{,}0112$ foydalanib standart xatoni aniqlang.

Ko'krak bezi saratonidan o'lim darajalari farqi uchun nuqta bahosi quyidagicha:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{kbs} - \hat{p}_{nazorat} &= \frac{500}{500 + 44425} - \frac{505}{505 + 44405} \\ &= 0{,}01113 - 0{,}01125 \\ &= -0{,}00012 \ . \end{aligned}$$

Mammografiya guruhidagi ko'krak bezi saratonidan o'lim darajasi nazorat guruhidagidan 0,012% past edi. Keyingi bosqichda, standart xatolik *birlashgan nisbatdan* $\hat{p}_{birlashgan}$ foydalanib hisoblanadi:

$$SE = \sqrt{\frac{\hat{p}_{birlashgan}(1 - \hat{p}_{birlashgan})}{n_{kbs}} + \frac{\hat{p}_{birlashgan}(1 - \hat{p}_{birlashgan})}{n_{nazorat}}} = 0{,}00070 \ .$$

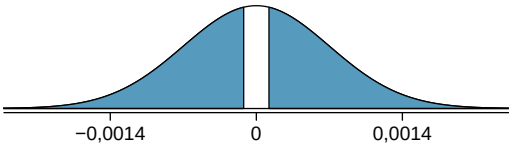
M **6.18-MISOL**

Nuqta bahosi $\hat{p}_{kbs} - \hat{p}_{nazorat} = -0{,}00012$ va standart xatolik $SX = 0,00070$ dan foydalanib, gipoteza testi uchun p-qiymatni hisoblang va xulosa yozing.

Avvalgi testlar kabi, avvalo test statistikasi hisoblanadi va grafik tasvir chiziladi:

$$Z = \frac{\text{nuqta bahosi} - \text{nol qiymat}}{SX} = \frac{-0{,}000\,12 - 0}{0{,}00070} = -0{,}17 \ .$$

[19] Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilishini talab qilmaydigan ikki nisbatli gipoteza testining misoli uchun 2.3-bo'limga qarang.



Quyruq qism maydoni 0,4325 uni ikki baravar oshiramiz va p-qiymatni olamiz: 0,8650. Bu p-qiymat 0,05 dan katta bo‘lganligi sababli, nol gipotezani rad etmaymiz. Bu, ko‘krak bezi saratonidan o‘lim darajasidagi farq tasodif bilan tushuntiriladi, degan ma’noni anglatadi. Shu sababli, mammografiyalarning muntazam ko‘krak bezi tekshiruviga nisbatan foydasi yoki zarari kuzatilmaydi.

Mammografiyalar foydasiz yoki zararli degan xulosaga kela olamizmi? Mammografiya tadqiqotini va boshqa tibbiy tadqiqotlarni ko‘rib chiqishda quyidagi omillarni hisobga olish muhim:

- Nol gipotezani rad etmaymiz, ya’ni mammografiyalar ko‘krak bezi saratonidan o‘limni kamaytiradi yoki oshiradi, degan xulosaga kelish uchun yetarli dalil yo‘q.
- Agar mammografiyalar foydali yoki zararli bo‘lsa ham, ma’lumotlar ta’sir katta emasligini ko‘rsatadi.
- Mammografiyalar oddiy ko‘krak bezi tekshiruvlariga nisbatan qimmatroqmi yoki arzonroqmi? Agar bir variant ancha qimmat bo‘lsa va aniq foyda bermasa, unda arzonroq variantga ustunlik berish kerak.
- Tadqiqot mualliflari shuningdek, mammografiyalar ko‘krak bezi saratoni ortiqcha diagnostikasiga olib kelganini aniqlashgan, ya’ni ba’zi saratonlar aniqlangan (yoki aniqlangandek qabul qilingan), ammo bu saratonlar bemorlarning hayoti davomida hech qanday alomat keltirib chiqarmasligi mumkin edi. Ya’ni, saraton alomatlari paydo bo‘lishidan oldin boshqa narsa bemorni o‘ldirgan bo‘lardi. Bu shuni anglatadiki, ba’zi bemorlar ko‘krak bezi saratoni uchun keraksiz davolanishni olishgan bo‘lishi mumkin, va bu davolashning o‘zi yana bir xarajat hisoblanadi. Bundan tashqari, ortiqcha diagnostika bemorlarga ortiqcha jismoniy yoki hissiy zarar yetkazishi mumkin.

Bu omillar tibbiy yordam va davolash bo‘yicha tavsiyalar atrofidagi murakkabliklarni ko‘rsatadi. Tibbiy davolashlarni o‘rganadigan mutaxassislar va tibbiy kengashlar yuqoridagi kabi omillarni ko‘rib chiqib, hozirgi dalillarga asoslangan eng yaxshi tavsiyalarni beradi.

6.2.4 Ikki nisbatli gipoteza testlari haqida ko‘proq (maxsus mavzu)

Ikki nisbatli gipoteza testi o‘tkazganimizda, odatda H_0 $p_1 - p_2 = 0$ bo‘ladi. Ammo, kamdan-kam holatlarda biz p_1 va p_2 o‘rtasida 0 dan boshqa bir qiymat farqini tekshirmoqchi bo‘lamiz. Masalan, ehtimol $p_1 - p_2 = 0{,}1$ bo‘lgan nol gipotezani tekshirishni xohlaymiz. Bunday holatlarda, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini tekshirish va standart xatoni qurishda odatda $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ dan foydalanamiz.

Y **6.19-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Bir kvadrokopter kompaniyasi yangi rotor pichoqlari ishlab chiqaruvchisini ko‘rib chiqmoqda. Yangi ishlab chiqaruvchi qimmatroq bo‘ladi, ammo ular yuqori sifatli pichoqlari raqobatchisidan 3% ko‘proq tekshiruvdan o‘tishini da’vo qilmoqda. Test uchun tegishli gipotezalarni tuzing.[20]

M **6.20-MISOL**

6.19-yo‘naltirilgan mashqdan sifat nazorati muhandisi har bir kompaniyadan 1000 ta pichoqni sinovdan o‘tkazadi. Joriy yetkazib beruvchi tomonidan 899 ta pichoq, taklif etilgan yetkazib beruvchi tomonidan esa 958 ta pichoq tekshiruvdan o‘tganini aniqlaydi. Ushbu ma’lumotlardan foydalanib, 6.19-yo‘naltirilgan mashqdagi gipotezalarni 5% ahamiyat darajasida baholang.

[20] H_0: Yuqori sifatli pichoqlar standart sifatli pichoqlarga nisbatan 3% ko‘proq tekshiruvdan o‘tadi. $p_{highQ} - p_{standard} = 0{,}03$.
H_A: Yuqori sifatli pichoqlar standart sifatli pichoqlarga nisbatan 3% dan farqli darajada ko‘proq tekshiruvdan o‘tadi. $p_{highQ} - p_{standard} \neq 0$.



6.3-rasm. Fantom kvadrokopter

Foto: David J (http://flic.kr/p/oiWLNu). CC-BY 2.0 litsenziyasi. Ushbu foto qirqilgan va chegara qo'shilgan.

Dastlab shartlarni tekshiramiz. Tanlanma tasodifiy bo'lmasligi mumkin, shuning uchun davom etish uchun barcha pichoqlar bog'liqsiz ekanligini taxmin qilishimiz kerak. Ushbu tanlanmada bu taxmin mantiqdan deb hisoblaymiz ammo muhandis bu taxminning to'g'riligini yaxshiroq biladi. Har bir tanlanma uchun muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi. Shu sababli, tanlanma nisbatlar farqi, $0{,}958 - 0{,}899 = 0{,}059$, deyarli normal taqsimotdan kelib chiqqan deb aytishimiz mumkin.

Standart xatolik ikki tanlanmaning nisbatlaridan foydalanib hisoblanadi, chunki ushbu kontekstda birlashgan nisbatdan foydalanilmaydi:

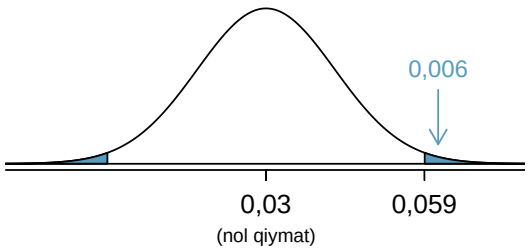
$$SX = \sqrt{\frac{0{,}958(1-0{,}958)}{1000} + \frac{0{,}899(1-0{,}899)}{1000}} = 0{,}0114 \ .$$

Ushbu gipoteza testida Nol $p_1 - p_2 = 0{,}03$ bo'lganligi sababli, standart xatolikni hisoblashda tanlanmaning nisbatlaridan foydalaniladi.

Keyingi bosqichda test statistikasi hisoblanadi va undan p-qiymatni topishda foydalaniladi, bu 6.4-rasmda tasvirlangan.

$$Z = \frac{\text{nuqta bahosi} - \text{Nol qiymat}}{SX} = \frac{0{,}059 - 0{,}03}{0{,}0114} = 2{,}54 \ .$$

Ushbu test statistikasi uchun standart normal taqsimotdan foydalanib, o'ng quyruq maydoni 0,006 deb aniqlanadi va biz uni ikki baravar oshirib, p-qiymatini topamiz: 0,012. 0,012 soni 0,05 dan kichik bo'lganligi sababli, nol gipotezani rad etamiz. 3% dan kattaroq tekshiruvdan o'tgan pichoqlar ulushini kuzatganimiz uchun, yuqori sifatli pichoqlar kompaniyaning da'volaridan oshib, joriy pichoqlarga nisbatan *3% dan ko'proq* ko'proq tekshiruvdan o'tishini tasdiqlovchi statistik dalillar mavjud.



6.4-rasm. Nol gipoteza to'g'ri bo'lsa, test statistikasi taqsimoti. P-qiymat soyali maydonlar bilan ifodalangan.

6.2.5 Standart xatolik formulasi bo‘yicha izlanish (maxsus mavzu)

Ushbu bo‘lim standart xatolik formulasi kelib chiqishining theoretik jihatlarini o‘rganadi, bu bizga ikki nisbatning farqi uchun standart xatolik formulasining ildizlariga chuqurroq nazar tashlash imkonini beradi. Oxir-oqibat, ushbu bobda va 7-bodda uchraydigan barcha standart xatolik formulalari 3.4-bo‘limda bayon etilgan ehtimollik tamoyillaridan kelib chiqadi.

Ikki nisbat farqi uchun standart xatolik formulasi alohida tanlanmaning nisbatlar uchun standart xatolik formulalaridan ajratib ko‘rsatish mumkin. Yodingizda bo‘lsa, $\hat{p}_1$ va $\hat{p}_2$ tanlanma nisbatlarining standart xatoliklari quyidagicha:

$$SE_{\hat{p}_1} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}} \qquad SE_{\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \ .$$

Ikki tanlanmaning nisbatlari farqi uchun standart xatolik alohida tanlanma nisbatlari standart xatoliklaridan quyidagicha ajratiladi:

$$SX_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{SE_{\hat{p}_1}^2 + SE_{\hat{p}_2}^2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \ .$$

Ushbu maxsus bog‘liqlik ehtimollik nazariyasidan kelib chiqadi.

Y **6.21-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Shart: 3.4-bo‘limda. Yuqoridagi tenglamani boshqa shaklda qayta yozamiz:

$$SE_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}^2 = SE_{\hat{p}_1}^2 + SE_{\hat{p}_2}^2 \ .$$

Ushbu formulani ikki tasodifiy o‘zgaruvchining yig‘indisi variatsiyasi uchun formuladan foydalangan holda tushuntiring.[21]

Mashqlar

6.17 Ijtimoiy eksperiment, 1-qism. Bir TV dasturi tomonidan o‘tkazilgan “ijtimoiy eksperiment” odamlarga juda aniq ko‘kargan ayolni uning yigitining haqorat qilayotganini ko‘rganida, nima qilishi haqida savol berdi. Xuddi shu juftlik bir xil restoranda ikkita turli vaziyatda tasvirlangan edi. Bir holatda ayol “provokatsion” kiyimda, boshqa holatda esa “konsirvativ” kiyimda edi. Quyidagi jadvalda har bir vaziyatda qancha restoran mijozlari ishtirok etgani va ularning aralashuvi haqida ma’lumotlar keltirilgan.

		Vaziyat		
		Provokatsion	Konsirvativ	Jami
Aralashish	Ha	5	15	20
	Yo‘q	15	10	25
	Jami	20	25	45

Provokatsion va konservativ vaziyatlarda aralashuv proporsiyalari o‘rtasidagi farqning tanlanma taqsimoti taxminan normal taqsimotga amal qilmasligining sababini tushuntiring.

6.18 Yurak transplantatsiyasi muvaffaqiyati. Stenford Universiteti yurak transplantatsiyasi bo‘yicha tajriba dasturining umr davomiyligini oshirishni aniqlash uchun o‘tkazilgan tadqiqot. Dasturga qabul qilingan har bir bemorga rasman yurak transplantatsiyasi nomzodi sifatida belgilandi, ya’ni ular jiddiy kasal bo‘lib, yangi yurakdan foyda olishlari mumkin edi. Bemorlar tasodifiy tarzda davolash va nazorat guruhlariga taqsimlandi. Davolash guruhidagi bemorlarga transplantatsiya o‘tkazildi, nazorat guruhidagi bemorlarga esa o‘tkazilmadi. Quyidagi jadvalda har bir guruhda qancha bemor tirik qolgan va vafot etganligi ko‘rsatilgan.[22]

[21] Standart xatolikning kvadrati baholashning dispersiyasini ifodalaydi. Agar X va Y ikkita tasodifiy o‘zgaruvchi bo‘lsa va ularning dispersiyalari σ_x^2 va σ_y^2 bo‘lsa, $X-Y$ ning dispersiyasi $\sigma_x^2+\sigma_y^2$ ga teng bo‘ladi. Xuddi shunday, $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ uchun dispersiya $\sigma_{\hat{p}_1}^2+\sigma_{\hat{p}_2}^2$ ga teng. $\sigma_{\hat{p}_1}^2$ va $\sigma_{\hat{p}_2}^2$ qiymatlari $SX_{\hat{p}_1}^2$ va $SX_{\hat{p}_2}^2$ ning boshqa yozilishi bo‘lganligi sababli, $\hat{p}_1-\hat{p}_2$ bilan bog‘liq dispersiya $SX_{\hat{p}_1}^2+SX_{\hat{p}_2}^2$ sifatida yozilishi mumkin.

[22] B. Turnbull et al. “Survivorship of Heart Transplant Data”. In: *Journal of the American Statistical Association* 69 (1974), pp. 74–80.

	Nazorat	Davolash
tirik	4	24
o'lgan	30	45

Nazorat va davolash guruhlari o'rtasidagi tirik qolish darajasidagi farqni baholash uchun ishonch oralig'ini hisoblashni xohlaymiz. Nima uchun normal yaqinlashish yordamida bunday oralig'ni tuzib bo'lmaydi? Shu muammo mavjud bo'lsa ham, ishonch oralig'i tuzilgan taqdirda, nima yomon bo'lishi mumkinligini tushuntiring.

6.19 Jins va rangga bo'lgan afzallik. Bir tadqiqotda 1924 erkak va 3666 ayol kollej talabalaridan ularning eng yoqadigan rangi so'raldi. Erkaklar va ayollar orasidagi qora rangni eng yoqtiradiganlar proporsiyasi o'rtasidagi farqning 95% ishonch oralig'i ($p_{male} - p_{female}$) (0,02; 0,06) ekanligi hisoblandi. Quyidagi bayonotlarning kollej talabalari haqidagi haqiqat yoki noto'g'riligini aniqlang va noto'g'ri deb bilgan har bir bayonotingiz uchun izoh bering.[23]

(a) Biz 95% ishonch bilan erkaklar orasida qora rangni eng yoqtiradiganlar haqiqiy proporsiyasi ayollar orasidagi proporsiyadan 2% kam yoki 6% ko'p ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

(b) Biz 95% ishonch bilan erkaklar orasida qora rangni eng yoqtiradiganlar haqiqiy proporsiyasi ayollar orasidagi proporsiyadan 2% dan 6% gacha ko'p ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

(c) Tasodifiy tanlangan 95% tanlanmalar, erkaklar va ayollar orasidagi qora rangni eng yoqtiradiganlar proporsiyasi o'rtasidagi haqiqiy farqni o'z ichiga olgan 95% ishonch oralig'larini beradi.

(d) Erkaklar va ayollar orasida qora rangni eng yoqtiradiganlar proporsiyasi o'rtasida sezilarli farq mavjud deb xulosa qilishimiz mumkin, va bu ikki namunaviy proporsiya o'rtasidagi farq ehtimolga ko'ra tasodif natijasi emas.

(e) Ushbu mashqda berilgan ma'lumotlar bilan ($p_{female} - p_{male}$) uchun 95% ishonch oralig'ini hisoblashning iloji yo'q.

6.20 Hukumat yopilishi. 2018–2019-yillarda Qo'shma Shtatlar federal hukumatining yopilishi 2018-yil 22-dekabrdan 2019-yil 25-yanvargacha bo'lgan, ya'ni 35 kun davom etgan. Shu davrda Survey USA tomonidan tasodifiy tanlangan 614 amerikalik ishtirokida so'rovnoma o'tkazilgan. So'rovda yiliga 40000 AQSh dollaridan kam daromad qiluvchilarning 48% va yiliga 40000 AQSh dollari yoki undan ortiq daromad qiluvchilarning 55% hukumatning yopilishi ularni umuman shaxsan ta'sirlamaganini aytishdi. ($p_{<40K} - p_{\geq 40K}$) uchun 95% ishonch oralig'i, bu erda p hukumatning yopilishi shaxsan ta'sir qilmaganlarni bildiradi, (−0,16; 0,02) interval sifatida hisoblangan. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va noto'g'ri deb topgan bayonotlaringiz sababini tushuntiring.[24]

(a) 5% ahamiyat darajasida, ma'lumotlar yiliga 40000 AQSh dollaridan kam daromad qiluvchilar va yiliga 40000 AQSh dollaridan ortiq daromad qiluvchilar orasida shaxsan ta'sirlanmaganlik proporsiyasidagi haqiqiy farqni ko'rsatadi.

(b) Biz 95% ishonch bilan yiliga 40000 AQSh dollaridan kam daromad qiluvchilarning 16% ko'proq yoki 2% kamroq qismi hukumat yopilishidan shaxsan ta'sirlanmagan deb aytishimiz mumkin.

(c) ($p_{<40K} - p_{\geq 40K}$) uchun 90% ishonch oralig'i (−0,16; 0,02) oralig'idan kengroq bo'ladi.

(d) ($p_{\geq 40K} - p_{<40K}$) uchun 95% ishonch oralig'i (−0,02; 0,16).

6.21 Milliy sog'liqni saqlash rejasi, 3-qism. 6.11-mashq AQShda umumiy nomli "Milliy sog'liqni saqlash rejasi" bo'yicha so'rovnoma natijalarini keltiradi. 347 demokratlarning 79% va 617 mustaqillarning 55% Milliy sog'liqni saqlash rejasini qo'llab-quvvatlagan.

(a) Demokratlar va mustaqillar o'rtasida Milliy sog'liqni saqlash rejasini qo'llab-quvvatlash proporsiyasi farqi ($p_D - p_I$) uchun 95% ishonch oralig'ini hisoblang va uni ushbu kontekstda izohlang. Biz siz uchun shartlarni allaqachon tekshirib chiqdik.

(b) To'g'ri yoki noto'g'ri: Agar biz ushbu so'rovnoma paytida tasodifiy tarzda demokrat va mustaqil shaxsni tanlaganimizda, demokratning Milliy sog'liqni saqlash rejasini qo'llab-quvvatlash ehtimoli mustaqil shaxsga qaraganda yuqoriroq bo'ladi.

6.22 Uyqu yetishmovchiligi, Kaliforniya va Oregon, 1-qism. Kasalliklarni nazorat qilish va oldini olish markazi tomonidan uyqu yetishmovchiligi haqida hisobotga ko'ra, Kaliforniya aholisi orasida oxirgi 30 kun ichida yetarli dam olish yoki uyqu olmaganlar proporsiyasi 8,0%, Oregon aholisi orasida esa 8,8% ni tashkil qiladi. Ushbu ma'lumotlar Kaliforniyaning 11545 va Oregonning 4691 aholisi bo'yicha oddiy tasodifiy tanlamaga asoslangan. Kaliforniyaliklar va Oregonliklar orasida uyqu yetishmovchiligi proporsiyasidagi farq uchun 95% ishonch oralig'ini hisoblang va uni ma'lumotlar kontekstida izohlang.[25]

[23] L Ellis and C Ficek. "Color preferences according to gender and sexual orientation". In: *Personality and Individual Differences* 31.8 (2001), pp. 1375–1379.

[24] Survey USA, News Poll #24568, data collected on April 21, 2019.

[25] CDC, Perceived Insufficient Rest or Sleep Among Adults — United States, 2008.

6.23 Offshor burg‘ulash, 1-qism. So‘rovnoma Kaliforniyada ro‘yxatdan o‘tgan 827 tasodifiy tanlangan saylovchidan “Siz Kaliforniya qirg‘oqlarida neft va tabiiy gazni burg‘ulashni qo‘llab-quvvatlaysizmi? Yo‘qmi? Yoki bu haqda yetarlicha ma’lumotga ega emasmisiz?” deb so‘radi. Quyida javoblarning taqsimoti ko‘rsatilgan bo‘lib, ular respondentning kollejni tugatgan yoki tugatmaganligi asosida ajratilgan.[26]

(a) Ushbu namunada neft va tabiiy gazni burg‘ulash haqida fikr bildirish uchun yetarli ma’lumotga ega emasligini bildirgan kollej bitiruvchilari va kollejni tugatmaganlar foizini aniqlang.

(b) Ushbu masala bo‘yicha fikr bildirish uchun yetarlicha ma’lumotga ega bo‘lmagan kollej bitiruvchilari va kollejni tugatmaganlar proporsiyasi o‘rtasida farq mavjudligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar mavjudligini aniqlash uchun gipoteza testini bajaring.

	Kollej tugatgan	
	Ha	Yo‘q
Qo‘llab-quvvatlaydi	154	132
Qarshi	180	126
Ma’lum emas	104	131
Jami	438	389

6.24 Uyqu yetishmovchiligi, Kaliforniya va Oregon, 2-qism. 6.22-mashq Kaliforniyaliklar va Oregonliklarning uyqu yetishmovchiligi haqida ma’lumot beradi. Kaliforniyaliklarning oxirgi 30 kun ichida yetarli dam olish yoki uyqu olmaganligi haqidagi proporsiya 8,0% ni tashkil qilsa, Oregonliklar orasida bu proporsiya 8,8% ni tashkil qiladi. Ushbu ma’lumotlar Kaliforniyaning 11545 aholisi va Oregonning 4691 aholisi asosida tasodifiy tanlangan namunalar bo‘yicha olingan.

(a) Ushbu ma’lumotlar ikki shtat orasida uyqu yetishmovchiligi darajasidagi farqni isbotlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi-yo‘qmi, aniqlash uchun gipoteza testini bajaring. (Eslatma: Shartlarni tekshiring)

(b) Testning (a)-qismidagi xulosasi noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin. Agar bu xulosa noto‘g‘ri bo‘lsa, qaysi turdagi xatolik qilingan?

6.25 Offshor burg‘ulash, 2-qism. 6.23-mashq Kaliforniya qirg‘oqlarida neft va tabiiy gazni burg‘ulashni qo‘llab-quvvatlashni baholash bo‘yicha so‘rovnoma natijalarini taqdim etadi.

	Kollej bitirgan	
	Ha	Yo‘q
Qo‘llab-quvvatlaydi	154	132
Qarshi	180	126
Ma’lum emas	104	131
Jami	438	389

(a) Ushbu namunada neft va tabiiy gazni burg‘ulashni qo‘llab-quvvatlaydigan kollej bitirganlar va kollejni tugatmaganlar foizini aniqlang.

(b) Ushbu ma’lumotlar Kaliforniyada offshor burg‘ulashni qo‘llab-quvvatlovchi kollej bitirganlar va kollejni tugatmaganlar proporsiyasi o‘rtasida farq mavjudligini ko‘rsatish uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi-yo‘qmi, aniqlash uchun gipoteza testini bajaring.

6.26 To‘liq tana skanerlari, 1-qism. Bir yangilik maqolasi “Amerikaliklar aeroportlarda potentsial terrorchilik hujumlarini aniqlash uchun joriy qilinishi mumkin bo‘lgan noqulay va invaziv amaliyotlar bo‘yicha turlicha fikrda.” deb xabar berdi. Ushbu maqola tasodifiy tanlangan 1137 kattalar orasida o‘tkazilgan so‘rovnoma natijalariga asoslangan bo‘lib, unda quyidagi savol berilgan: “Ba’zi aeroportlar endi yo‘lovchilarni xavfsizlik chizig‘ida elektron ko‘rikdan o‘tkazish uchun ‘to‘liq tana’ raqamli rentgen uskunalaridan foydalanmoqda. Sizningcha, ushbu yangi rentgen uskunalaridan aeroportlarda foydalanilishi kerakmi yoki kerak emasmi?” Quyida partiyaviy bog‘liqlik asosida javoblar ko‘rsatilgan.[27]

		Partiyaviy bog‘liqlik		
		Respublikachilar	Demokratlar	Mustaqillar
Javob	Kerak	264	299	351
	Kerak emas	38	55	77
	Bilmayman/Javob yo‘q	16	15	22
	Jami	318	369	450

(a) Respublikachilar va Demokratlar orasida aeroportlarda to‘liq tana skanerlari qo‘llanilishi kerak deb hisoblovchi proporsiyalar orasida farq mavjudligini baholash uchun tegishli gipoteza testini o‘tkazing. (Eslatma: Barcha shartlar bajarilgan deb hisoblang.)

(b) (a)-qismidagi test xulosasi noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin, ya’ni test xatolikka yo‘l qo‘ygan. Agar xato qilingan bo‘lsa, bu I-tur yoki II-tur xatosi bo‘lganmi? Tushuntiring.

[26] Survey USA, Election Poll #16804, data collected July 8-11, 2010.
[27] S. Condon. “Poll: 4 in 5 Support Full-Body Airport Scanners”. In: *CBS News* (Nov. 15, 2010).

6.27 Uyqudan mahrum transport xodimlari. Milliy uyqu fondi tomonidan transport xodimlari va transport bilan bog'liq bo'lmagan ishchilar orasida tasodifiy tanlangan namunalar bo'yicha uyqu odatlari haqida so'rovnoma o'tkazildi. Quyida so'rovnoma natijalari keltirilgan.[28]

		Transport xodimlari			
	Nazorat	Pilotlar	Yuk mashinasi Haydovchilari	Poyezd Operatorlar	Avtobus/Taksi/Limo Haydovchilar
6 soatdan kam uyqu	35	19	35	29	21
6 dan 8 soatgacha uyqu	193	132	117	119	131
8 soatdan ko'p uyqu	64	51	51	32	58
Jami	292	202	203	180	210

Ushbu ma'lumotlar yuk mashinasi haydovchilari va transport bilan bog'liq bo'lmagan ishchilar (nazorat guruhi) orasida kuniga 6 soatdan kam uxlaydigan, ya'ni uyqu yetishmovchiligi mavjud bo'lganlar proporsiyasi orasida farq mavjudligini aniqlash uchun gipoteza testini o'tkazing.

6.28 Prenatal vitaminlar va autizm. Prenatal vitaminlar iste'moli va autizm o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganayotgan tadqiqotchilar 24-60 oylik autizmga ega bolalar va odatiy rivojlanayotgan bolalar onalaridan tasodifiy tanlangan namunalarni o'rgandilar. Quyida homiladorlikning uch oy oldin (perikontseptsiyaviy davrda) prenatal vitaminlar iste'mol qilgan va iste'mol qilmagan onalar soni keltirilgan.[29]

		Autizm		
		Autizm	Odatiy rivojlanish	Jami
Perikontseptsiyaviy prenatal vitamin	Vitamin yo'q	111	70	181
	Vitamin	143	159	302
	Jami	254	229	483

(a) Homiladorlikning uch oy oldin prenatal vitaminlar iste'moli va autizm o'rtasidagi mustaqillikni tekshirish uchun tegishli gipotezalarni yozing.

(b) Gipoteza testini yakunlang va tegishli xulosani ayting. (Eslatma: Test uchun zarur shartlarni tekshirishni unutmang.)

(c) Ushbu tadqiqot haqida New York Times gazetasida "Prenatal vitaminlar autizmning oldini olishga yordam berishi mumkin" nomli maqola chop etilgan. Ushbu maqola nomini mos deb hisoblaysizmi? Javobingizni tushuntiring. Bundan tashqari, muqobil nom taklif qiling.[30]

6.29 Saharadan janubdagi Afrikada OIV. 2008-yil iyul oyida AQSh Milliy sog'liqni saqlash instituti klinik tadqiqotni kutilmagan natijalar tufayli erta to'xtatgani haqida e'lon qildi. Tadqiqot populyatsiyasi saharadan janubdagi Afrikada yashovchi, bola tug'ish paytida bolaga OIV yuqishining oldini olish uchun yagona doz Nevaripin (OIVni davolash uchun ishlatiladigan dori) berilgan OIVga chalingan ayollardan iborat edi. Tadqiqotda bola tug'ilganidan keyin ayollarga Nevaripin bilan davolashni davom ettirish va OIVni davolashda ishlatiladigan ikkinchi dori Lopinavir bilan davolash o'rtasida tasodifiy taqqoslash o'tkazilgan. Tadqiqotda 240 ayol ishtirok etgan; har ikkala davolash usuli bo'yicha 120 nafar ayol tasodifiy taqsimlangan. Tadqiqot boshlanganidan 24 hafta o'tib, har bir ayol OIV infeksiyasining yomonlashayotganini aniqlash uchun testdan o'tkazilgan (*virologik muvaffaqiyatsizlik* deb ataladigan natija). Nevaripin bilan davolangan 120 ayoldan 26 nafari virologik muvaffaqiyatsizlikni boshdan kechirgan, boshqa dori bilan davolangan 120 ayoldan esa 10 nafari shu natijani ko'rsatgan.[31]

(a) Ushbu tadqiqot natijalarini ko'rsatuvchi ikki tomonli jadvalni yarating.

(b) Davolash guruhlari o'rtasida virologik muvaffaqiyatsizlik ko'rsatkichlaridagi farqni tekshirish uchun tegishli gipotezalarni yozing.

(c) Gipoteza testini yakunlang va tegishli xulosani bildiring. (Eslatma: Test uchun zarur shartlarni tekshirishni unutmang.)

6.30 Har kuni bitta olma shifokorni uzoqlashtiradi. Bir o'rta maktab jismoniy tarbiya o'qituvchisi o'z talabalarida ovqatlanish va sog'liq masalalari bo'yicha xabardorlikni oshirishni xohlab, semestr boshida talabalardan "har kuni bitta olma yeyish shifokorni uzoqlashtiradi" degan ifodaga ishonishlarini so'radi va 40% talabalar "ha" deb javob berishdi. Semestr davomida u har bir darsni meva va sabzavotlarni iste'mol qilishning ijobiy ta'sirlarini ko'rsatadigan tadqiqotni qisqacha muhokama qilish bilan boshladi. Semestr oxirida xuddi shu so'rovni o'tkazdi va bu safar 60% talabalar "ha" deb javob berishdi. U ushbu tahlil uchun ushbu bo'limda muhokama qilingan ikki-proporsiyali usulni ishlatishi mumkinmi? Fikringizni tushuntiring.

[28] National Sleep Foundation, 2012 Sleep in America Poll: Transportation Workers' Sleep, 2012.

[29] R.J. Schmidt et al. "Prenatal vitamins, one-carbon metabolism gene variants, and risk for autism". In: *Epidemiology* 22.4 (2011), p. 476.

[30] R.C. Rabin. "Patterns: Prenatal Vitamins May Ward Off Autism". In: *New York Times* (June 13, 2011).

[31] S. Lockman et al. "Response to antiretroviral therapy after a single, peripartum dose of nevirapine". In: *Obstetrical & gynecological survey* 62.6 (2007), p. 361.

6.3 Xi-kvadrat usuli yordamida moslikni tekshirish

Ushbu bo‘limda ma’lumotlar guruhlarga bo‘linganda nol modelni baholash uchun usul ishlab chiqamiz. Ushbu usul ikki holatda keng qo‘llaniladi:

- Bir nechta guruhlarga bo‘linadigan holatlar tanlanmasini hisobga olgan holda, tanlanmaning umumiy bosh to‘plamni ifodalashini aniqlash.
- Ma’lumotlarning normal taqsimot yoki geometrik taqsimot kabi muayyan taqsimotga o‘xshashligini baholash.

Ushbu holatlarning har biri uchun bir xil statistik testdan foydalanish mumkin: Xi-kvadrat testi.

Birinchi holatda, kichik bir tumandagi 275 nafar jurorning tasodifiy tanlanmasi ma’lumotlarini ko‘rib chiqamiz. Jurorlar o‘zlarining irqiy guruhlarini 6.5-rasmda ko‘rsatilganidek aniqladilar va biz ushbu jurorlar bosh to‘plamni irqiy jihatdan ifodalovchi ekanligini aniqlashni xohlaymiz. Agar juri bosh to‘plamni ifodalovchi bo‘lsa, tanlanmadagi nisbatlar taxminan ro‘yxatdan o‘tgan saylovchilarning, ya’ni ovoz berishga huquqli aholining nisbatlarini aks ettirishi kerak.

Iroq	Oq tanli	Qora tanli	Ispanik	Boshqa	Jami
Jurilarda vakillik	205	26	25	19	275
Ro‘yxatdan o‘tgan saylovchilar	0,72	0,07	0,12	0,09	1,00

6.5-rasm. Shahar juri va bosh to‘plamsining irqiy vakilligi.

Jurilardagi nisbatlar bosh to‘plam nisbatlarini aniq ifodalamasa ham, ushbu ma’lumotlar tanlanmani ifodalovchi emasligini isbotlash uchun yetarli dalillar beradimi yoki yo‘qmi aniq emas. Agar jurorlar ro‘yxatdan o‘tgan saylovchilardan tasodifiy tanlangan bo‘lsa, kichik farqlar tasodif tufayli paydo bo‘lishi mumkin. Ammo, odatdagidan kattaroq farqlar jurilarning ifodalovchi emasligini ko‘rsatuvchi ishonchli dalillarni taqdim qilishi mumkin.

Ikkinchi qo‘llanma, taqsimotning mosligini baholash, ushbu bo‘lim oxirida keltirilgan. 25 yil davomida S&P500 dagi kunlik aksiyalar rentabelligi har kuni aksiyalar faoliyatining oldingi kunlardagi xatti-harakatlariga bog‘liq emasligini baholash uchun qo‘llaniladi.

Ushbu muammolarda biz barcha guruhlarni bir vaqtda tahlil qilishni xohlaymiz, bir yoki ikkita guruhni solishtirish bilan cheklanib qolmaymiz, bu bizdan yangi test statistikasi ishlab chiqishni talab qiladi.

6.3.1 Bir yo‘nalishli jadvallar uchun test statistikasi yaratish

(M) **6.22-MISOL**

Shahardagi 275 kishi jurilarga xizmat qilgan. Agar jurilarga xizmat qilish uchun shaxslar tasodifiy tanlangan bo‘lsa, 275 kishidan qancha Oq tanli bo‘lishini kutgan bo‘lar edingiz? Qancha Qora tanli bo‘lishini kutasiz?

---

bosh to‘plamning taxminan 72% Oq tanlilar, shuning uchun jurilarning taxminan 72% Oq tanli bo‘lishi kerak: $0{,}72 \times 275 = 198$.

Xuddi shunday, jurilarning taxminan 7% Qora tanli bo‘lishini kutgan bo‘lar edik, bu taxminan $0{,}07 \times 275 = 19{,}25$ Qora tanli jurorga mos keladi.

(Y) **6.23-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

bosh to‘plamning o‘n ikki foizi Ispanik va 9 foizi boshqa irqiy guruhlarga tegishli. 275 jurordan nechta Ispanik yoki boshqa irqdan bo‘lishini kutasiz? Javoblarni 6.6-rasmda topishingiz mumkin.

275 juror orasida har bir irq tomonidan ifodalanadigan tanlanmaning nisbatlar hech bir etnik guruh uchun aniq mos kelmadi. Ba’zi bir tanlanmaviy o‘zgarishlar kutiladi, ammo agar jurilarning

Iroq	Oq tanli	Qora tanli	Ispanik	Boshqa	Jami
Kuzatilgan ma'lumotlar	205	26	25	19	275
Kutilayotgan sonlar	198	19,25	33	24,75	275

6.6-rasm. Jurorlarning real va kutilayotgan tarkibi.

tarkibida biron bir tarafkashlik bo'lmasa, tanlanmaning nisbatlari bosh to'plam nisbatlariga o'xshash bo'lishi kerak edi. Biz farqlar tanlanmaning o'zgarishlar asosida jurilarning tasodifiy tanlanmaganligini ko'rsatuvchi ishonchli dalil taqdim etish uchun yetarlicha kuchli ekanligini test qilishimiz kerak. Ushbu g'oyalarni gipotezalarga tashkil qilish mumkin:

H_0: Jurorlar tasodifiy tanlangan, ya'ni juri tarkibida irqiy tarafkashlik yo'q va kuzatilgan sonlar tabiiy tanlanmaning o'zgarishlarni aks ettiradi.

H_A: Jurorlar tasodifiy tanlanmagan, ya'ni jurorlarni tanlashda irqiy tarafkashlik mavjud.

Ushbu gipotezalarni baholash uchun biz kuzatilgan sonlarning kutilayotgan sonlardan qanchalik farq qilishini aniqlaymiz. Muqobil gipoteza uchun kuchli dalillar guruhlardagi kutilgan o'zgarishlarga nisbatan odatdagidan kattaroq farqlar shaklida paydo bo'ladi.

6.3.2 Xi-kvadrat test statistikasi

Avvalgi gipoteza testlarida biz quyidagi shakldagi test statistikasini qurardik:

$$\frac{\text{nuqta bahosi} - \text{nol qiymat}}{\text{nuqta bahosi uchun SX}} .$$

Ushbu konstruktsiya ikkita asosiy g'oyaga asoslangan edi: (1) nol gipoteza to'g'ri bo'lsa, nuqta bahosi va kutilayotgan qiymat o'rtasidagi farqni aniqlash va (2) bu farqni nuqta bahosining standart xatoligi yordamida normallashtirish. Ushbu ikkita g'oya sanash ma'lumotlari uchun mos test statistikasini qurishda yordam beradi.

Bizning strategiyamiz avvalo kuzatilgan sonlar va nol gipoteza to'g'ri bo'lsa kutiladigan sonlar o'rtasidagi farqni hisoblashdan boshlanadi, so'ngra bu farqni normallashtiramiz:

$$Z_1 = \frac{\text{kuzatilgan oq tanli soni} - \text{nol oq tanli soni}}{\text{kuzatilgan oq tanli soni uchun SX}} .$$

Guruhlarga bo'lingan ma'lumotlardagi son uchun nuqta bahosining standart xatoligi nol ostidagi sonning kvadrat ildiziga teng.[32] Shunday qilib:

$$Z_1 = \frac{205 - 198}{\sqrt{198}} = 0{,}50 .$$

Fraksiya oldingi test statistikalariga juda o'xshash avval farqni hisoblaymiz, keyin uni normallashtiramiz. Bu hisoblashlar qora tanlilar, ispaniklar va boshqa guruhlar uchun ham bajarilishi kerak:

Qoratanlilar
$$Z_2 = \frac{26 - 19{,}25}{\sqrt{19{,}25}} = 1{,}54$$

Ispaniklar
$$Z_3 = \frac{25 - 33}{\sqrt{33}} = -1{,}39$$

Boshqalar
$$Z_4 = \frac{19 - 24{,}75}{\sqrt{24{,}75}} = -1{,}16 .$$

Ushbu to'rtta normallashtirilgan farqning nolga nisbatan qanchalik uzoqligini aniqlash uchun bitta test statistikasidan foydalanishni xohlaymiz. Ya'ni, Z_1, Z_2, Z_3 va Z_4 birgalikda nolga nisbatan g'ayritabiiy uzoqmi yoki yo'qligini aniqlash uchun qandaydir tarzda birlashtirilishi kerak. Birinchi fikr ushbu to'rtta normallashtirilgan farqning absolyut qiymatlarini olib, ularni qo'shish bo'lishi

[32] Oldingi boblarda o'rgangan ba'zi qoidalardan foydalanib, $np(1-p)$ deb o'ylashimiz mumkin, bu yerda n tanlanmalar soni va p bosh to'plam nisbatsi. Agar biz faqat bitta sonni ko'rayotgan bo'lsak, bu to'g'ri bo'lar edi. Ammo, biz ko'plab normallashtirilgan farqlarni hisoblaymiz va ularni qo'shamiz. Ko'rsatiladiki – garchi bu yerda ko'rsatilmasa ham – sonlar farqini normallashtirishning yaxshiroq usuli kvadrat ildizdan foydalanishdir.

mumkin:

$$|Z_1| + |Z_2| + |Z_3| + |Z_4| = 4{,}58 \ .$$

Darhaqiqat, bu haqiqiy sonlarning kutilayotgan sonlardan qanchalik uzoq ekanligini umumlashtiruvchi bitta raqamni beradi. Ammo, kvadrat qiymatlarni qo‘shish ko‘proq keng tarqalgan:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = 5{,}89 \ .$$

Normallashtirilgan farqni kvadratlash quyidagi ikki narsani ta’minlaydi:

- Har qanday kvadratlangan normallashtirilgan farq endi ijobiy bo‘ladi.
- Avvaldan g‘ayritabiiy ko‘rinadigan farqlar – masalan, 2,5 normallashtirilgan farq – kvadratlanganda yanada kattaroq bo‘ladi.

X^2 test statistikasi, ya’ni Z^2 qiymatlarining yig‘indisi, ushbu sabablarga ko‘ra odatda ishlatiladi. Biz kuzatilgan sonlar va nol sonlar yordamida X^2 uchun tenglama yozishimiz mumkin:

$$X^2 = \frac{(\text{kuzatilgan son}_1 - \text{nol son}_1)^2}{\text{nol son}_1} + \cdots + \frac{(\text{kuzatilgan son}_4 - \text{nol son}_4)^2}{\text{nol son}_4} \ .$$

Yakuniy X^2 raqami kuzatilgan sonlarning nol sonlardan qanchalik uzoqligini umumlashtiradi. 6.3.4-bo‘limda ko‘ramizki, agar nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa, X^2 yangi taqsimot – *xi-kvadrat taqsimoti* deb ataladigan taqsimotga amal qiladi. Ushbu taqsimotdan foydalanib, gipotezalarni baholash uchun p-qiymatni topa olamiz.

6.3.3 Xi-kvadrat taqsimoti va sohalarni topish

Xi-kvadrat taqsimoti ba’zan faqat ijobiy va odatda o‘ng tomonga egilgan ma’lumotlar to‘plamlari va statistikani tavsiflash uchun ishlatiladi. Eslab qoling, normal taqsimotning ikkita parametri – o‘rtacha va standart chetlanish – uning aniq xususiyatlarini tavsiflash uchun ishlatilgan. Xi-kvadrat taqsimotida bitta parametr bor – **erkinlik darajasi (ed)**, bu taqsimotning shakli, markazi va tarqalishiga ta’sir qiladi.

Y **6.24-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

6.7-rasmda uchta Xi-kvadrat taqsimotini ko‘rsatadi.
(a) Erkinlik darajasi oshganda taqsimotning markazi qanday o‘zgaradi?
(b) Tarqalish (o‘zgaruvchanlik) haqida nima deyishingiz mumkin?
(c) Shakl qanday o‘zgaradi?[33]

6.7-rasmda va 6.24-yo‘naltirilgan mashqda Xi-kvadrat taqsimotlarining erkinlik darajasi oshishi bilan uchta umumiy xususiyatini ko‘rsatadi. Taqsimot ko‘proq simmetrik bo‘ladi, markaz o‘ngga siljiydi va o‘zgaruvchanlik (tarqalish) oshadi.

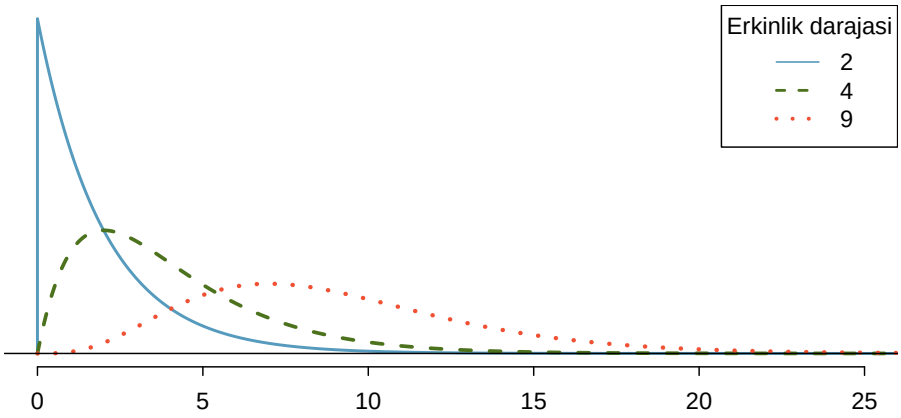
Bizning asosiy qiziqishimiz Xi-kvadrat taqsimotida p-qiymatlarni hisoblashdir. Bu, ilgari ko‘rganimizdek, taqsimot quyruqlaridagi tegishli sohalarni topishga bog‘liq. Buni amalga oshirishning eng keng tarqalgan usullari quyidagilardir: kompyuter dasturlaridan foydalanish, grafik kalkulyatordan foydalanish yoki jadvaldan foydalanish. Jadval opsiyasidan foydalanmoqchi bo‘lganlar uchun Xi-kvadrat jadvalini qanday o‘qishni Appendix C.3 da taqdim etamiz, u yerdan jadvalning o‘zini ham topishingiz mumkin. Quyidagi misollar uchun o‘zingizga qulay usuldan foydalanib, bir xil javoblarni olishingizni tasdiqlang.

M **6.25-MISOL**

6.8(a)- rasmda Xi-kvadrat taqsimotini 3 erkinlik darajasi bilan ko‘rsatadi va yuqori soyali quyruq 6,25 dan boshlanadi. Soyali maydonni toping.

Statistik dastur yoki grafik kalkulyatordan foydalangan holda, 3 erkinlik darajasiga ega (*ed*) Xi-kvadrat taqsimoti va 6,25 chegara qiymati uchun yuqori quyruq maydoni 0,1001 ga teng ekanligini

[33] (a) Markaz kattalashadi. Agar diqqat bilan qarasak, har bir taqsimotning o‘rtachasi uning erkinlik darajasiga teng ekanligini ko‘rishimiz mumkin. (b) Erkinlik darajasi oshgani sari o‘zgaruvchanlik ham oshadi. (c) Taqsimot $ed = 2$ uchun juda kuchli egilgan, $ed = 4$ va $ed = 9$ uchun taqsimotlar yanada simmetrik bo‘ladi. Agar erkinlik darajasi yanada oshirilgan taqsimotlarni ko‘rib chiqsak, bu tendensiyaning davom etishini ko‘ramiz.



6.7-rasm. Erkinlik darajalari turlicha bo'lgan uchta Xi-kvadrat taqsimoti.

topamiz. Ya'ni, 6.8(a)-rasmda soyali yuqori quyruq maydoni 0,1 ga teng.

6.26-MISOL

6.8(b)- rasmda 2 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti yuqori quyruqni ko'rsatadi. Ushbu yuqori quyruq chegarasi 4,3 da joylashgan. Quyruq maydonini toping.

Dasturiy ta'minot yordamida 6.8(b)-rasmdagi soyali quyruq maydonini 0,1165 deb topamiz. Agar jadvaldan foydalansak, quyruq maydoni uchun faqat qiymatlar oralig'ini topishimiz mumkin bo'lardi: 0,1 va 0,2 orasida.

6.27-MISOL

6.8(c)- rasmda 5 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti yuqori quyruqni ko'rsatadi, uning chegara qiymati 5,1. Quyruq maydonini toping.

Dasturiy ta'minot yordamida yuqori quyruq maydonini 0,4038 deb topamiz. Agar Appendix C.3 dagi jadvaldan foydalansak, quyruq maydonining 0,3 dan katta ekanligini aniqlashimiz mumkin, lekin aniq qiymatni topa olmaymiz.

6.28-YO'NALTIRILGAN MASHQ

6.8(d)-rasmda 7 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti uchun 11,7 chegara qiymatini ko'rsatadi. Yuqori quyruq maydonini toping.[34]

6.29-YO'NALTIRILGAN MASHQ

6.8(e)-rasmda 4 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti uchun 10 chegara qiymatini ko'rsatadi. Yuqori quyruq maydonini toping.[35]

6.30-YO'NALTIRILGAN MASHQ

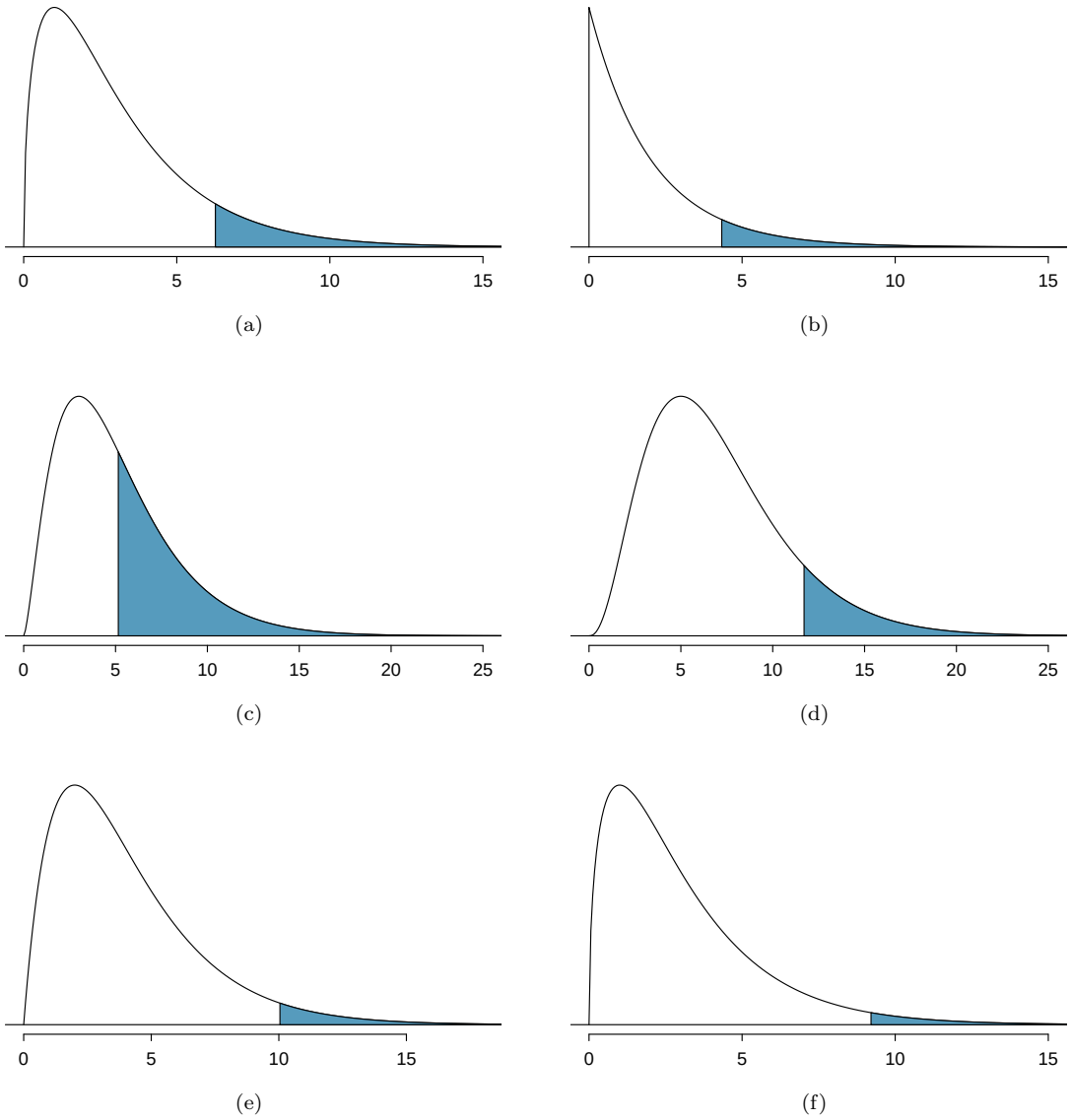
6.8(f)-rasmda 3 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti uchun 9,21 chegara qiymatini ko'rsatadi. Yuqori quyruq maydonini toping.[36]

6.3.4 Xi-kvadrat taqsimoti uchun p-qiymatni topish

6.3.2-bo'limda biz yangi test statistikasi (X^2) ni jurorlarning tanlanishida irqiy tarafkashlik mavjudmi yoki yo'qmi haqida dalillar mavjudligini baholash kontekstida aniqladik. Nol gipoteza jurorlar tasodifiy tanlangan va irqiy tarafkashlik mavjud emas degan da'voni ifodaladi. Muqobil gipoteza esa jurorlarni tanlashda irqiy tarafkashlik bor edi.

Biz katta X^2 qiymati muqobil gipotezani quvvatlaydigan kuchli dalillarni ko'rsatishini aniqladik:

[34] Maydon 0,1109 ga teng. Agar jadvaldan foydalansak, uning qiymati 0,1 va 0,2 orasida ekanligini aniqlashimiz mumkin.
[35] Aniq qiymati: 0,0404. Agar jadvaldan foydalansak: 0,02 va 0,05 orasida.
[36] Aniq qiymati: 0,0266. Agar jadvaldan foydalansak: 0,02 va 0,05 orasida.



6.8-rasm. (a) 3 erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti, 6,25 dan yuqori maydon soyali. (b) 2 erkinlik darajasi, 4,3 dan yuqori maydon soyali. (c) 5 erkinlik darajasi, 5,1 dan yuqori maydon soyali. (d) 7 erkinlik darajasi, 11,7 dan yuqori maydon soyali. (e) 4 erkinlik darajasi, 10 dan yuqori maydon soyali. (f) 3 erkinlik darajasi, 9,21 dan yuqori maydon soyali.

ya'ni, irqiy tarafkashlik mavjud edi. Ammo, agar nol gipoteza aslida to'g'ri bo'lsa, bunday katta test statistikasi ($X^2 = 5{,}89$) kuzatilish imkoniyati qanday ekanligini aniqlay olmadik. Bu yerda Xi-kvadrat taqsimoti foydali bo'ladi. Agar nol gipoteza to'g'ri bo'lsa va irqiy tarafkashlik mavjud bo'lmasa, X^2 Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi, bu holatda uchta erkinlik darajasiga ega. Ma'lum shartlar ostida, X^2 statistikasi $k-1$ erkinlik darajasi bilan Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi, bu yerda k guruhlar sonini ifodalaydi.

6.31-MISOL

Juror misolida nechta kategoriya bor edi? X^2 uchun ishlatilgan Xi-kvadrat taqsimotiga nechta erkinlik darajasi bog'lanishi kerak?

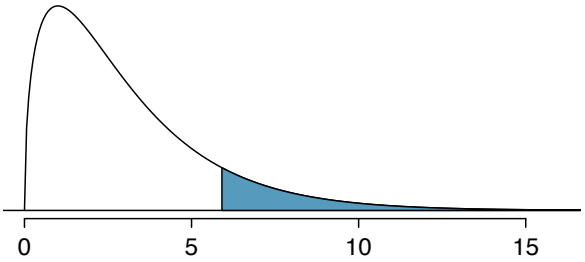
Juror misolida $k = 4$ kategoriya bor edi. Oq tanli, qora tanli, ispanik va boshqa. Yuqoridagi qoida bo'yicha, agar H_0 to'g'ri bo'lsa, X^2 test statistikasi $k - 1 = 3$ erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi.

Xuddi oldingi bo'limlarda normal taqsimotdan foydalanish uchun tanlanmaviy shartlarni tekshirganimizdek, X^2 uchun Xi-kvadrat taqsimotini xavfsiz qo'llash uchun ham tanlanma shartlarini tekshirishimiz kerak. Har bir kutilayotgan son kamida 5 bo'lishi kerak. Juror misolida kutilayotgan sonlar 198; 19,25; 33 va 24,75 bo'lib, barchasi 5 dan katta, shuning uchun Xi-kvadrat modelini $X^2 = 5{,}89$ uchun qo'llashimiz mumkin.

6.32-MISOL

Agar nol gipoteza to'g'ri bo'lsa, $X^2 = 5{,}89$ test statistikasi uchta erkinlik darajasiga ega Xi-kvadrat taqsimoti bilan bog'liq bo'ladi. Ushbu taqsimot va test statistikasi yordamida p-qiymatni aniqlang.

Xi-kvadrat taqsimoti va p-qiymat 6.9-rasmda ko'rsatilgan. Katta Xi-kvadrat qiymatlar nol gipotezaga qarshi kuchli dalillarni ko'rsatgani uchun yuqori quyruqni soyalaymiz, bu p-qiymatni ifodalaydi. Statistik dasturiy ta'minotdan foydalangan holda (yoki Appendix C.3 dagi jadval yordamida) ushbu maydonning 0,1171 ga teng ekanligini aniqlashimiz mumkin. Umuman olganda, bunday katta p-qiymat bilan nol gipotezani rad etmaymiz. Boshqacha aytganda, ma'lumotlar jurorlarni tanlashda irqiy tarafkashlik borligini ko'rsatuvchi ishonchli dalillarni taqdim etmaydi.



6.9-rasm. Juror gipoteza testi uchun p-qiymat Xi-kvadrat taqsimotida $ed = 3$ bilan soyalangan.

BIR YO‘NALISHLI JADVAL UCHUN XI-KVADRAT TESTI

Faraz qilaylik, kuzatilgan qiymatlar O_1, O_2, ..., O_k k toifadagi sonlar orasida nol gipoteza asosida kutilgan natijalardan sezilarli farq qilishi mumkinligi haqida ishonarli dalillar bor-yo‘qligini baholashimiz kerak. Nol gipoteza asosida *kutilgan qiymatlar* E_1, E_2, ..., E_k deb ataladi.
Agar har bir kutilgan qiymat kamida 5 bo‘lsa va nol gipoteza to‘g‘ri deb hisoblanadigan bo‘lsa, quyidagi test statistikasi Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi, bunda erkinlik darajasi $k-1$ ga teng:

$$X^2 = \frac{(O_1 - E_1)^2}{E_1} + \frac{(O_2 - E_2)^2}{E_2} + \cdots + \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} .$$

Ushbu test statistikasi uchun p-qiymat Xi-kvadrat taqsimotining yuqori dumiga qarab aniqlanadi. Biz yuqori dumni hisoblaymiz, chunki X^2 ning kattaroq qiymatlari nol gipotezaga qarshi kuchliroq dalil beradi.

XI-KVADRAT TESTI SHARTLARI

Xi-kvadrat testini o‘tkazishdan oldin ikki shartni tekshirish kerak:

Mustaqillik. Jadvalga qo‘shilgan har bir holat boshqa barcha holatlardan mustaqil bo‘lishi kerak.

Tanlanma hajmi / taqsimot. Har bir maxsus holat (ya’ni, katakdagi qiymat) kamida 5 kutilgan holatlarga ega bo‘lishi kerak.

Shartlarni tekshirmaslik testning natijalari xato bo‘lishiga sabab bo‘lishi mumkin.

Agar jadval faqat ikki bo‘linmadan iborat bo‘lsa, bitta bo‘linmani tanlab, 6.1-bo‘limda kiritilgan bitta ulush usullaridan foydalaning.

6.3.5 Taqsimotga moslikni baholash

Ushbu misol uchun 4.2-bo‘limni o‘qish foydali bo‘lishi mumkin, lekin bu shart emas.

Xi-kvadrat testlari doirasini ushbu bo‘limning ikkinchi muammosiga qo‘llashimiz mumkin. Ma’lum bir statistik modelning ma’lumotlar to‘plamiga mos kelishini baholash. 10 davomida S&P500 kundalik aksiyalar daromadlari har bir kunning aksiyalar faoliyati oldingi kunlarning xatti-harakatidan mustaqil bo‘lishini baholash uchun ishlatilishi mumkin. Bu juda murakkab savolga o‘xshaydi va bu haqiqatda ham murakkab ammo ushbu muammoni o‘rganish uchun Xi-kvadrat testi ishlatilishi mumkin. Biz har bir kunni bozorning o‘sha kuni yuqoriga yoki pastga harakat qilganligiga qarab `Up` yoki `Down` (`D`) deb belgilaymiz. Masalan, quyidagi narx o‘zgarishlarini, ular asosida yangi ”yuqori” va ”past” belgilanishlarini va har bir `Up` kunni kuzatish uchun qancha kun kerakligini ko‘rib chiqing:

Narx o‘zgarishi	2,52	-1,46	0,51	-4,07	3,36	1,10	-5,46	-1,03	-2,99	1,71
Natija	Up	D	Up	D	Up	Up	D	D	D	Up
”Up” kunga qadar kunlar	1	-	2	-	2	1	-	-	-	4

Agar kunlar haqiqatan ham mustaqil bo‘lsa, ijobiy savdo kuniga qadar bo‘lgan kunlar soni geometrik taqsimotga amal qilishi kerak. Geometrik taqsimot birinchi muvaffaqiyatni kuzatish uchun k-chi urinishni kutish ehtimolini tasvirlaydi. Bu yerda har bir yuqori kun (Up) muvaffaqiyatni, past kunlar (D) esa muvaffaqiyatsizlikni anglatadi. Yuqoridagi ma’lumotlarga ko‘ra, bozor yuqoriga ko‘tarilgunga qadar atigi bir kun kerak bo‘ldi. Shuning uchun birinchi kutish vaqti 1 kun edi. Keyingi `Up` savdo kunini kuzatishimiz uchun yana ikki kun kerak bo‘ldi va uchinchi `Up` kun uchun yana ikki kun ketdi. Biz ushbu sonlar (1, 2, 2, 1, 4 va hokazo) geometrik taqsimotga mos kelishini aniqlashni istaymiz. 6.10-rasm 10 davomida S&P500 uchun ijobiy savdo kunini kutish kunlari sonini ko‘rsatadi.

S&P500 aksiyalar indeksida `Up` kunni kuzatish uchun qancha kutish kerakligini ko‘rib chiqamiz. Agar aksiyalar faoliyati kunlar o‘rtasida mustaqil bo‘lsa va ijobiy savdo kunining ehtimoli doimiy bo‘lsa, kutish vaqti *geometrik taqsimot*ga amal qilishi kerak. Buni gipotezalar doirasiga tashkil qilamiz:

Kunlar	1	2	3	4	5	6	7+	Jami
Kuzatilgan	717	369	155	69	28	14	10	1362

6.10-rasm. S&P500 uchun ijobiy savdo kunigacha kutish vaqti kuzatilgan taqsimoti.

Kunlar	1	2	3	4	5	6	7+	Jami
Kuzatilgan	717	369	155	69	28	14	10	1362
Geometrik Model	743	338	154	70	32	14	12	1362

6.11-rasm. Ijobiy savdo kunigacha kutish vaqtining taqsimoti. Geometrik model asosidagi kutilgan qiymatlar oxirgi qatorda ko'rsatilgan. Har bir kutilgan qiymatni topish uchun geometrik model asosida D kun kutish ehtimolini aniqlaymiz ($P(D) = (1-0{,}545)^{D-1}(0{,}545)$) va umumiy kuzatuvlar soniga, 1362, ko'paytiramiz. Masalan, uch kun kutish geometrik modelda taxminan $0{,}455^2 \times 0{,}545 = 11{,}28\%$ hollarda yuz beradi, bu esa $0{,}1128 \times 1362 = 154$ kuzatuvga to'g'ri keladi.

H_0: Berilgan kunning aksiyalar bozori yuqori yoki past bo'lishi boshqa kunlardan mustaqil. Biz `Up` kun kuzatilguncha o'tgan kunlar sonini ko'rib chiqamiz. Ushbu gipoteza ostida `Up` kunigacha bo'lgan kunlar soni geometrik taqsimotga amal qilishi kerak.

H_A: Berilgan kunning aksiyalar bozori yuqori yoki past bo'lishi boshqa kunlardan mustaqil emas. Nol gipoteza ostida `Up` kunigacha bo'lgan kunlar soni geometrik taqsimotga amal qilishi kerakligini bilgan holda, biz geometrik taqsimotdan og'ishlarni qidiramiz, bu esa muqobil gipotezani qo'llab-quvvatlaydi.

Ushbu natijalarning aksiyalar savdogarlari uchun muhim oqibatlari bor: agar o'tgan savdo kunlari haqidagi ma'lumotlar bugungi kunning nima bo'lishini aniqlashda foydali bo'lsa, bu ma'lumot boshqa savdogarlarga nisbatan ustunlik berishi mumkin.

Biz S&P500 uchun ma'lumotlarni ko'rib chiqamiz va kutish vaqtlarini 6.11- va 6.12-rasmlarda umumlashtiramiz. S&P500 kunlarning 54,5% qismida ijobiy edi.

Xi-kvadrat doirasini qo'llash uchun kutilgan qiymatlar kamida 5 bo'lishi kerakligi sababli, biz kutish vaqti 7 kundan ko'p bo'lgan barcha holatlarni *birlashtirdik*, bu esa har bir kutilgan qiymat ushbu minimumdan ancha yuqori bo'lishini ta'minladi. Haqiqiy ma'lumotlar, *Kuzatilgan* qatorida 6.11-rasmda ko'rsatilgan, *Geometrik Model* qatoridagi kutilgan qiymatlar bilan taqqoslanishi mumkin. Kutilgan qiymatlarni hisoblash usuli 6.11-rasmda muhokama qilingan. Umuman olganda, kutilgan qiymatlar quyidagicha aniqlanadi: (1) har bir bo'linma bilan bog'liq nol ulushni aniqlash va (2) har bir nol ulushni umumiy sonlar soniga ko'paytirib, kutilgan qiymatlarni olish. Bu strategiya umumiy sonlarning qaysi ulushi har bir bo'linmaga tushishini aniqlaydi.

Ⓜ **6.33-MISOL**

Grafiga qarab hech qanday noodatiy katta og'ishlarni sezayapsizmi? Ushbu og'ishlar faqat tasodifiylik natijasida sodir bo'lganmi, buni faqat ko'rib aniqlay olasizmi?

Kuzatilgan qiymatlar va geometrik taqsimot asosidagi kutilgan qiymatlar orasidagi farqlar sezilarli darajada farq qiladimi, bu aniq emas. Ya'ni, ushbu og'ishlar tasodifiylik natijasi bo'lishi mumkinmi yoki ular shunchalik kuchlimi, ma'lumotlar nol gipotezaga qarshi ishonarli dalil beradi, bu ma'lum emas. Ammo biz 6.11-rasmdagi qiymatlardan foydalangan holda Xi-kvadrat testi o'tkazishimiz mumkin.

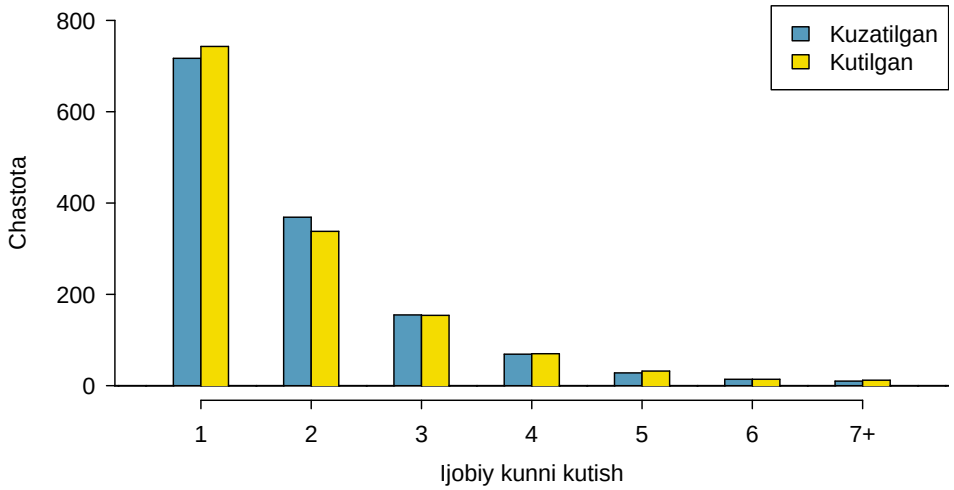
Ⓨ **6.34-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

6.11-rasm kutish vaqtlari uchun kuzatilgan ma'lumotlar to'plamini taqdim etadi ($O_1 = 717$, $O_2 = 369$, ...) va geometrik taqsimot ostidagi kutilgan qiymatlarni ($E_1 = 743$, $E_2 = 338$, ...). Xi-kvadrat test statistikasi X^2 ni hisoblang.[37]

Ⓨ **6.35-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Kutilgan qiymatlarning barchasi kamida 5 bo'lgani uchun, biz Xi-kvadrat taqsimotini X^2 ga xavfsiz qo'llashimiz mumkin. Ammo, biz nechta erkinlik darajasidan foydalanishimiz kerak?[38]

[37] $X^2 = \frac{(717-743)^2}{743} + \frac{(369-338)^2}{338} + \cdots + \frac{(10-12)^2}{12} = 4{,}61$

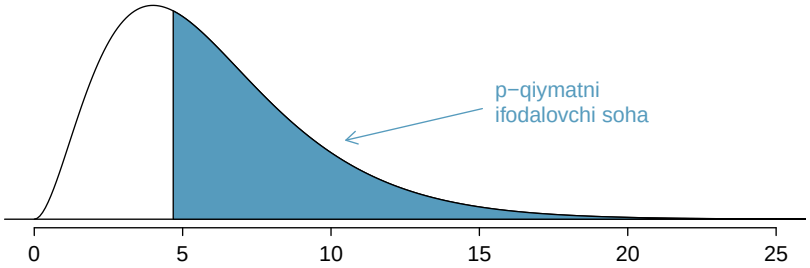


6.12-rasm. Kuzatilgan va kutilgan qiymatlar bo‘yicha har bir kutish vaqtining yonma-yon ustun diagrammasi.

6.36-MISOL

Agar kuzatilgan qiymatlar geometrik modelga amal qilsa, Xi-kvadrat test statistikasi $X^2 = 4{,}61$ $ed = 6$ bilan Xi-kvadrat taqsimotiga yaqin bo‘ladi. Ushbu ma’lumotlardan foydalanib, p-qiymatni hisoblang.

6.13-rasmda Xi-kvadrat taqsimoti, chegara qiymati va soyali p-qiymat ko‘rsatilgan. Dasturiy ta’minotdan foydalanib, biz p-qiymatni topamiz: 0,5951. Oxir-oqibat, bizda S&P500 uchun so‘nggi 10 yil ma’lumotlarida kutish vaqtlari geometrik taqsimotga amal qilishiga oid taxminni rad etish uchun yetarli dalil yo‘q, ya’ni savdo kunlari mustaqil degan fikrni rad eta olmaymiz.



6.13-rasm. Chi-square taqsimoti 6 erkinlik darajasi bilan. Aksiyalar tahlili uchun p-qiymat soyalanadi.

6.37-MISOL

6.36-misolda, biz savdo kunlari oxirgi 10 yil ma’lumotlarida mustaqil ekanligi haqidagi nol gipotezani rad etmadik. Nega bu juda muhim?

Bozor bir necha kun ketma-ket past bo‘lganida, uni “yuqoriga ko‘tarilishi kerak” deb o‘ylash qiziqarli bo‘lishi mumkin. Ammo bizda bozor “to‘g‘rilanishi kerak” bo‘lgan xususiyat mavjudligini ko‘rsatadigan kuchli dalillarni topmadik. Hech bo‘lmaganda, tahlil kunlar orasidagi har qanday bog‘liqlik juda zaif ekanligini ko‘rsatadi.

Mashqlar

[38] Bu yerda $k = 7$ guruh mavjud, shuning uchun $ed = k - 1 = 6$ dan foydalanamiz.

6.31 To'g'ri yoki noto'g'ri, 1-qism. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang. Har bir noto'g'ri bayonot uchun uni to'g'ri qilish uchun muqobil so'zlashni taklif qiling.

(a) Xi-kvadrat taqsimot, normal taqsimot kabi, ikkita parametrga ega: o'rtacha qiymat va standart chetlanish.

(b) Xi-kvadrat taqsimoti, daraja erkinlik parametri qiymatidan qat'i nazar, doim o'ngga egilgan.

(c) Xi-kvadrat statistikasi har doim musbat.

(d) Daraja erkinlik oshgani sayin, Xi-kvadrat taqsimotining shakli ko'proq egiladi.

6.32 To'g'ri yoki noto'g'ri, 2-qism. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang. Har bir noto'g'ri bayonot uchun uni to'g'ri qilish uchun muqobil so'zlashni taklif qiling.

(a) Daraja erkinlik oshgani sayin, Xi-kvadrat taqsimotining o'rtacha qiymati oshadi.

(b) Agar $\chi^2 = 10$ va $ed = 5$ bo'lsa, siz H_0 ni 5% ahamiyat darajasida rad qilolmaysiz.

(c) Xi-kvadrat testi p-qiymatini topishda har doim ikkala quyruq sohalarini soyali qilamiz.

(d) Daraja erkinlik oshgani sayin, Xi-kvadrat taqsimotining o'zgaruvchanligi kamayadi.

6.33 Ochiq manbali darslik. Ochiq manbali kirish darajasidagi statistika darsligini ishlatadigan bir professor talabalarning 60% kitobning qattiq nusxasini sotib olishini, 25% uni veb-saytdan chop etishini va 15% uni onlayn o'qishini taxmin qildi. Semestr oxirida u talabalariga so'rovnoma to'ldirishni so'radi, bu yerda ular kitobni qanday formatda ishlatganlarini ko'rsatadilar. 126 talabaning 71 tasi kitobning qattiq nusxasini sotib olgan, 30 tasi veb-saytdan chop etgan va 25 tasi uni onlayn o'qigan.

(a) Professorning taxminlari noto'g'ri ekanligini sinash uchun gipotezalarni yozing.

(b) Professor qancha talaba kitobni sotib olishini, chop etishini va faqat onlayn o'qishini kutgan?

(c) Bu Xi-kvadrat testi uchun mos keladigan holat. Test uchun zarur bo'lgan shartlarni sanab o'ting va ularning bajarilganligini tasdiqlang.

(d) Xi-kvadrat statistikasini, unga bog'liq daraja erkinlikni va p-qiymatini hisoblang.

(e) (d)-qismda hisoblangan p-qiymatga asoslanib, gipoteza testining xulosasi nima? Ushbu xulosani kontekstda talqin qiling.

6.34 Barking bug'ular. Xitoyning Xaynan orolidagi barking bug'ularning yemak va dam olish joylari bilan bog'liq mikrohabitat omillari o'rganildi. Ushbu hududda o'rmonlar yerning 4,8% qismini, madaniy o'tloqlar 14,7% qismini va bargli o'rmonlar 39,6% qismini tashkil etadi. Bug'ular yemlayotgan 426 joyning 4 tasi o'rmonlar, 16 tasi madaniy o'tloqlar va 61 tasi bargli o'rmonlar sifatida tasniflangan. Quyidagi jadval ushbu ma'lumotlarni umumlashtiradi.[39]

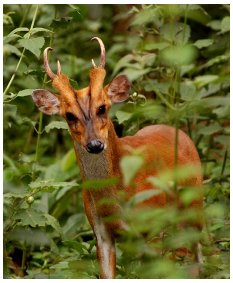
O'rmonlar	Madaniy o'tloqlar	Bargli o'rmonlar	Boshqa	Jami
4	16	61	345	426

(a) Barking bug'ular ma'lum bir yashash joyida yemlashni boshqalardan afzal ko'radi degan gipotezalarni yozing.

(b) Ushbu tadqiqot savoliga javob berish uchun qanday testni ishlatishimiz mumkin?

(c) Ushbu test uchun zarur bo'lgan taxminlar va shartlarning bajarilganligini tekshiring.

(d) Ushbu ma'lumotlar barking bug'ular ma'lum yashash joylarida yemlashni afzal ko'rishlarini isbotlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi? Ushbu tadqiqot savoliga javob berish uchun mos gipoteza testini bajaring.



Shrikant Rao tomonidan olingan foto (http://flic.kr/p/4Xjdkk) CC BY 2.0 license

6.4 Ikki yo'nalishli jadvallarda bog'liqsizlikni tekshirish

Biz hammamiz foydalanilgan mahsulotlarni sotib olamiz — avtomobillar, kompyuterlar, darsliklar va boshqalar — va ba'zan ushbu mahsulotlarni sotayotgan sotuvchilar ularning muammolari

[39] Liwei Teng et al. "Forage and bed sites characteristics of Indian muntjac (Muntiacus muntjak) in Hainan Island, China". In: *Ecological Research* 19.6 (2004), pp. 675–681.

haqida halol bo‘lishadi, deb taxmin qilamiz. Ammo bu har doim ham o‘z-o‘zidan tushunarli emas. Tadqiqotchilar 219 nafar ishtirokchini jalb qilgan tadqiqotda ular oldindan ikki marta muzlab qolgan foydalanilgan iPodni sotishlari kerak edi.[40] Ishtirokchilarga iPod uchun iloji boricha ko‘proq pul olish uchun rag‘bat berilgan, chunki ular sotuvdan 5% ulush va ishtirok etish uchun qo‘shimcha 10 dollar olishlari kerak edi. Tadqiqotchilar sotuvchilardan muzlash muammosini oshkor qilishlariga qaysi turdagi savollar ta’sir qilishi mumkinligini tushunishni istashdi.

Tadqiqotda sotuvchi sifatida qatnashgan ishtirokchilarga noma’lum tarzda xaridorlar tadqiqotchilar bilan hamkorlik qilib, turli savollar sotuvchilarning iPodning oldingi muammolarini oshkor qilish ehtimoliga qanday ta’sir qilishini baholashdi. Skript bo‘yicha xaridorlar savolni quyidagicha boshlashdi: “Yaxshi, men birinchi bo‘lib boshlashim kerak shekilli. Demak, siz bu iPodni 2 yildan beri ishlatyapsiz ...” va uchta savoldan biri bilan tugatishdi:

- Umumiy: Bu haqda menga nima deyishingiz mumkin?
- Ijobiy taxmin: Unda hech qanday muammo yo‘q, to‘g‘rimi?
- Salbiy taxmin: Uning qanday muammolari bor?

Savol sotuvchilarga berilgan muolaja sifatida qabul qilinadi, va javob esa savolning sotuvchilarni iPodning muzlash muammosini oshkor qilishga undagan-unda olmaganini anglatadi. Natijalar 6.14-rasmda ko‘rsatilgan bo‘lib, ma’lumotlar *“Unda qanday muammolar bor?”* savolining sotuvchini o‘tgan muzlash muammolarini oshkor qilishga undashda eng samarali bo‘lganini ko‘rsatadi. Ammo o‘zingizdan shuni ham so‘rashingiz kerak: bu natijalarni tasodifan kuzatgan bo‘lishimiz mumkinmi yoki bu savollar ba’zi holatlarda haqiqatni aniqlashda samaraliroq ekanligining dalilimi?

	Umumiy	Ijobiy Taxmin	Salbiy Taxmin	Jami
Muammoni oshkor qilish	2	23	36	61
Muammoni yashirish	71	50	37	158
Jami	73	73	73	219

6.14-rasm. iPod tadqiqotining qisqacha natijalari, unda tadqiqot ishtirokchisiga savol berildi

BIR YO‘NALISHLI JADVALLAR VA IKKI YO‘NALISHLI JADVALLAR FARQI

Bir yo‘nalishli jadval bitta o‘zgaruvchi uchun har bir natija sonini tasvirlaydi. Ikki yo‘nalishli jadval esa ikki o‘zgaruvchi uchun natijalar *kombinatsiyalari* sonini tasvirlaydi. Ikki yo‘nalishli jadvalni ko‘rib chiqqanimizda, ko‘pincha bu o‘zgaruvchilar qandaydir tarzda bog‘liqmi yoki yo‘qmi bilishni xohlaymiz. Ya’ni, ular bog‘liqmi (mustaqilga qarshi)?

iPod eksperimenti uchun gipoteza testi, aslida, har bir savolning ishtirokchini iPoddagi muammoni oshkor qilishga undashda statistik jihatdan ahamiyatli dalillarga ega ekanligini baholash haqida. Boshqacha aytganda, maqsad, xaridorning savoli sotuvchining muammoni oshkor qilishi bilan bog‘liqmi yoki yo‘qligini tekshirishdir.

6.4.1 Ikki yo‘nalishli jadvallarda kutilgan qiymatlarni hisoblash

Bir yo‘nalishli jadvallarda bo‘lgani kabi, ikki yo‘nalishli jadvalning har bir katagi uchun ham kutilgan qiymatlarni hisoblashimiz kerak.

M **6.38-MISOL**

Eksperimentdan foydalanib, muzlash muammosini oshkor qilgan barcha sotuvchilarning ulushini $61/219 = 0{,}2785$ sifatida hisoblashimiz mumkin. Agar savollar orasida hech qanday farq bo‘lmasa va sotuvchilarning 27,85% savol berilishidan qat’i nazar muzlash muammosini oshkor qiladigan bo‘lsa, `Umumiy` guruhdagi 73 odamdan nechtasi muzlash muammosini oshkor qilishini kutgan bo‘lardik?

[40] Mualliflar kabi keksa bo‘lmagan o‘quvchilar uchun iPod asosan mobil aloqa xizmatisiz iPhone bo‘lib, keyingi avlod modellar shunday edi. Oldingi avlodlari esa ancha sodda edi.

Biz taxmin qilamizki, 0,2785 × 73 = 20,33 sotuvchi muammoni oshkor qiladi. Albatta, biz bundan kam kuzatdik, ammo bu tasodifiy farq tufaylimi yoki savollar haqiqatni aniqlashda turlicha samaradorlikka ega bo'lgani uchundir, bu hali aniq emas.

Y **6.39-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Agar savollar aslida teng samarali bo'lsa, ya'ni respondentlarning taxminan 27,85% ulushi berilgan savoldan qat'i nazar muzlash muammosini oshkor qilgan bo'lardi, `Ijobiy Taxmin` guruhidagi sotuvchilardan qancha kishi muzlash muammosini *yashirishini* kutgan bo'lar edik?[41]

Savollar ular oshkor qilgan narsalarga ta'sir qilmagan holatda, barcha guruhlar uchun muzlash muammosini oshkor qilish yoki yashirishni kutgan sotuvchilar sonini 6.38-mashqda va 6.39-yo'naltirilgan mashqda qo'llangan strategiya yordamida hisoblashimiz mumkin. Ushbu kutilgan qiymatlar 6.15-rasmni yaratishda ishlatilgan bo'lib, bu rasm 6.14-rasm bilan bir xil, faqat endi kutilgan qiymatlar qavslar ichida qo'shilgan.

	Umumiy	Ijobiy Taxmin	Salbiy Taxmin	Jami
Muammoni oshkor qilish	2 (20,33)	23 (20,33)	36 (20,33)	61
Muammoni yashirish	71 (52,67)	50 (52,67)	37 (52,67)	158
Jami	73	73	73	219

6.15-rasm. Kuzatilgan qiymatlar va **(kutilgan qiymatlar)**.

Yuqoridagi misollar va mashqlar kutilgan qiymatlarni hisoblashda yordam berdi. Umuman olganda, ikki yo'nalishli jadval uchun kutilgan qiymatlarni qator jami, ustun jami va jadvalning umumiy soniga asoslanib hisoblash mumkin. Masalan, agar guruhlar o'rtasida farq bo'lmasa, har bir ustunning taxminan 27,85% birinchi qatorga to'g'ri keladi:

$$0{,}2785 \times (\text{1-ustun jami}) = 20{,}33$$
$$0{,}2785 \times (\text{2-ustun jami}) = 20{,}33$$
$$0{,}2785 \times (\text{3-ustun jami}) = 20{,}33$$

0,2785 qanday hisoblanganiga qaytsak – muzlash muammosini oshkor qilgan sotuvchilarning ulushi sifatida (158/219) – ushbu uchta kutilgan qiymatni quyidagicha hisoblash mumkin edi:

$$\left(\frac{\text{1-qator jami}}{\text{jadval jami}}\right)(\text{1-ustun jami}) = 20{,}33$$
$$\left(\frac{\text{1-qator jami}}{\text{jadval jami}}\right)(\text{2-ustun jami}) = 20{,}33$$
$$\left(\frac{\text{1-qator jami}}{\text{jadval jami}}\right)(\text{3-ustun jami}) = 20{,}33$$

Bu bizni ustun o'zgaruvchi va qator o'zgaruvchilar o'rtasida bog'liqlik borligi haqidagi kuchli dalillarni sinashni istaganimizda ikki yo'nalishli jadval uchun kutilgan qiymatlarni hisoblashning umumiy formulasiga olib keladi.

IKKI YO'NALISHLI JADVALDA KUTILGAN QIYMATLARNI HISOBLASH

i-qator va j-ustun uchun kutilgan qiymatni aniqlash uchun quyidagini hisoblang:

$$\text{Kutilgan Qiymat}_{i\text{-qator, }j\text{-ustun}} = \frac{(i\text{-qator jami}) \times (j\text{-ustun jami})}{\text{jadval jami}}$$

[41] Biz taxmin qilamizki, $(1 - 0{,}2785) \times 73 = 52{,}67$. Bu natija, 6.38-mashqdagi natija kabi, kasr bo'lishi normal holat.

6.4.2 Ikki yo‘nalishli jadvallar uchun Xi-kvadrat testi

Ikki yo‘nalishli jadval uchun Xi-kvadrat test statistikasi bir yo‘nalishli jadval uchun bo‘lgani kabi topiladi. Har bir jadval katagi uchun quyidagini hisoblang:

Umumiy formula	$\dfrac{(\text{kuzatilgan qiymat} - \text{kutilgan qiymat})^2}{\text{kutilgan qiymat}}$
1-qator, 1-ustun	$\dfrac{(2-20{,}33)^2}{20{,}33} = 16{,}53$
1-qator, 2-ustun	$\dfrac{(23-20{,}33)^2}{20{,}33} = 0{,}35$
⋮	⋮
2-qator, 3-ustun	$\dfrac{(37-52{,}67)^2}{52{,}67} = 4{,}66$

Har bir katak uchun hisoblangan qiymatlarni qo‘shish orqali Xi-kvadrat test statistikasi X^2 ni topamiz:

$$X^2 = 16{,}53 + 0{,}35 + \cdots + 4{,}66 = 40{,}13 \ .$$

Oldingidek, ushbu test statistikasi Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi. Ammo, ikki yo‘nalishli jadval uchun erkinlik darajalari biroz boshqacha hisoblanadi.[42] Ikki yo‘nalishli jadvalda erkinlik darajalari quyidagiga teng:

$$ed = (\text{qatorlar soni minus } 1) \times (\text{ustunlar soni minus } 1) \ .$$

Bizning misolimizda, erkinlik darajasi quyidagicha:

$$ed = (2-1) \times (3-1) = 2 \ .$$

Agar Nol gipoteza to‘g‘ri bo‘lsa (ya’ni, eksperimentda savollar sotuvchilarga ta’sir qilmagan bo‘lsa), test statistikasi $X^2 = 40{,}13$ 2 erkinlik darajasi bilan Xi-kvadrat taqsimotiga amal qiladi. Ushbu ma’lumotlardan foydalanib, test uchun p-qiymatni hisoblashimiz mumkin, bu 6.16-rasmda tasvirlangan.

IKKI YO‘NALISHLI JADVAL UCHUN ERKINLIK DARAJALARINI HISOBLASH

Xi-kvadrat testini ikki yo‘nalishli jadvalga qo‘llaganingizda, quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$ed = (R-1) \times (C-1)$$

bu yerda R jadvaldagi qatorlar soni, C esa ustunlar sonini anglatadi.

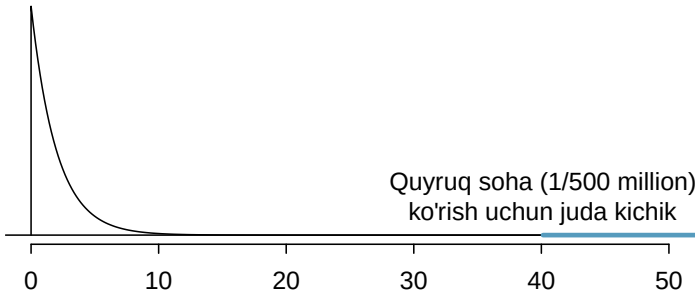
2x2 kontingensiya jadvallarini tahlil qilayotganda, 1-qismda kiritilgan ikki ulush usullaridan foydalanish tavsiya etiladi (6.2-bo‘limga qarang).

6.40-MISOL

Savol sotuvchilarning muzlash muammosini oshkor qilish ehtimoliga ta’sir qiladimi, yo‘qmi, degan xulosaga kelish uchun p-qiymatni toping.

Kompyuter yordamida, 2 erkinlik darajali Xi-kvadrat taqsimoti uchun $X^2 = 40{,}13$ dan yuqori bo‘lgan dum maydoni aniq p-qiymatini hisoblaymiz: 0,000000002. (Agar C.3-ilovadagi jadvaldan foydalansak, p-qiymatning 0,001 dan kichik ekanligini aniqlagan bo‘lardik.) $\alpha = 0{,}05$ ahamiyatlilik darajasidan foydalanib, p-qiymat kichik bo‘lganligi sababli nol gipotezani rad etamiz. Ya’ni, ma’lumotlar sotuvchining iPoddagi muammolar haqida haqiqatni aytish ehtimoliga savolning ta’sir qilganligi haqida ishonarli dalillarni taqdim etadi.

[42] Eslatib o‘tamiz: bir yo‘nalishli jadvalda erkinlik darajalari kataklar sonidan 1 kam edi.



6.16-rasm. $ed = 2$ bo'lganda $X^2 = 40.13$ uchun p-qiymatning vizualizatsiyasi.

6.41-MISOL

6.17-rasm 10-17 yoshdagi va metformin bilan davolanayotgan bemorlarda 2-turdagi diabet uchun uch xil davolash usulini baholash eksperimentining natijalarini umumlashtiradi. Ko'rib chiqilgan uchta davolash usuli quyidagilar edi: metformin bilan davomiy davolash (`met`), metformin va rosiglitazon bilan birgalikda davolash (`rosi`), yoki turmush tarzini o'zgartirish dasturi (`lifestyle`). Har bir bemor uchun asosiy natija glyukemik nazoratning yo'qligi (muvaffaqiyatsizlik) yoki bu nazoratning mavjudligi (muvaffaqiyat) bo'ldi. Ushbu test uchun tegishli gipotezalar qanday?

H_0: Uchta davolash usulining samaradorligida hech qanday farq yo'q.

H_A: Uchta davolash usulining samaradorligi orasida qandaydir farq mavjud, masalan, `rosi` davolash `lifestyle` ga qaraganda yaxshiroq ishlagan bo'lishi mumkin.

	Muvaffaqiyatsizlik	Muvaffaqiyat	Jami
`lifestyle`	109	125	234
`met`	120	112	232
`rosi`	90	143	233
Jami	319	380	699

6.17-rasm. 2-turdagi diabet tadqiqoti uchun natijalar.

6.42-YO'NALTIRILGAN MASHQ

6.41-misolda keltirilgan gipotezalarni sinash uchun ikki yo'nalishli jadvalga Xi-kvadrat testi qo'llanadi. Birinchi qadam sifatida jadvalning har bir olti katagi uchun kutilgan qiymatlarni hisoblang.[43]

6.43-YO'NALTIRILGAN MASHQ

6.17-rasmdagi ma'lumotlar uchun Xi-kvadrat test statistikasini hisoblang.[44]

6.44-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Uchta qator va ikkita ustun mavjud bo'lgani sababli, test uchun erkinlik darajalari quyidagiga teng: $ed = (3-1) \times (2-1) = 2$. $X^2 = 8{,}16$, $ed = 2$ qiymatlari yordamida va ahamiyatlilik darajasi 0.05 bo'lganda Nol gipotezani rad etish yoki qabul qilishni baholang.[45]

[43] Birinchi qator / birinchi ustun uchun kutilgan qiymat birinchi qator jami (234) va birinchi ustun jami (319) ni ko'paytirib, so'ngra jadval jami (699) ga bo'lish orqali topiladi: $\frac{234 \times 319}{699} = 106{,}8$. Xuddi shunday, ikkinchi ustun va birinchi qator uchun: $\frac{234 \times 380}{699} = 127{,}2$. 2-qator: 105,9 va 126,1. 3-qator: 106,3 va 126,7.

[44] Har bir katak uchun quyidagini hisoblang: $\frac{(\text{kuzatilgan} - \text{kutilgan})^2}{\text{kutilgan}}$. Masalan, birinchi qator va birinchi ustun uchun: $\frac{(109-106{,}8)^2}{106{,}8} = 0{,}05$. Har bir katakning natijalarini qo'shish orqali Xi-kvadrat test statistikasi topiladi: $X^2 = 0{,}05 + \cdots + 2{,}11 = 8{,}16$.

Mashqlar

6.35 Tashlovchilar. Qo’llab-quvvatlash guruhi tarkibida bo’lish chekishni tashlash qobiliyatiga ta’sir qiladimi? Bir okrug sog’liqni saqlash bo’limi 300 nafar chekuvchini tasodifiy tajribaga jalb qildi. 150 ishtirokchi nikotin patchidan foydalangan va har hafta qo’llab-quvvatlash guruhiga qatnashgan, qolgan 150 esa patchdan foydalangan, lekin qo’llab-quvvatlash guruhiga qatnashmagan. Tadqiqot yakunida, patch va qo’llab-quvvatlash guruhi a’zolaridan 40 nafari chekishni tashlagan, faqat patchdan foydalangan guruhda esa 30 nafar chekuvchi chekishni tashlagan edi.

(a) Ushbu tadqiqot natijalarini taqdim etuvchi ikki tomonlama jadvalni tuzing.

(b) Quyidagi har bir savolga null gipoteza sharoitida javob bering, ya’ni qo’llab-quvvatlash guruhiga a’zo bo’lish chekishni tashlash qobiliyatiga ta’sir qilmaydi, va kutilgan qiymatlar kuzatilgan qiymatlarga nisbatan yuqori yoki pastroq ekanligini ko’rsating.

i. “Patch + qo’llab-quvvatlash” guruhida nechta ishtirokchi chekishni tashlashi kutilgan?

ii. “Faqat patch” guruhida nechta ishtirokchi chekishni tashlamasligi kutilgan?

6.36 To’liq tana skaneri, 2-qism. Quyidagi jadvalga 6.26-mashqda tanishgan to’liq tana skanerlari haqidagi fikrlar va siyosiy qarashlar ma’lumotlari summasi kiritilgan. Har bir siyosiy guruhdagi farqlar tasodifga bog’liq bo’lishi mumkin. Quyidagi hisob-kitoblarni bajarishda, to’liq tana skaneri foydalanishiga partiyaviy qarashlar va javoblar o’rtasida mustaqillik null gipotezasini nazarda tuting. Hisob-kitoblarga kirishdan oldin satr summalari uchun qo’shimcha ustun qo’shish foydali bo’lishi mumkin.

		Partiyaviy Qarashlar		
		Respublikachi	Demokrat	Mustaqil
Javob	Qatnashadi	264	299	351
	Qatnashmaydi	38	55	77
	Bilmaydi/Javob bermaydi	16	15	22
	Jami	318	369	450

(a) Respublikachilardan nechta kishi to’liq tana skanerlarini qo’llab-quvvatlamasligi kutilmoqda?

(b) Demokratlardan nechta kishi to’liq tana skanerlarini qo’llab-quvvatlashi kutilmoqda?

(c) Mustaqillardan nechta kishi bilmasligi yoki javob bermasligi kutilmoqda?

6.37 Offshore burg’ulash, 3-qism. Quyidagi jadvalga 6.23-mashqda tanishgan kollej bitiruvchilari va bitiruvchilari bo’lmaganlar orasida neft burg’ulashga munosabatlar bo’yicha ma’lumotlar summasi kiritilgan. Ushbu ma’lumotlarga asoslanib, kollej bitiruvchilari va bitiruvchilari bo’lmaganlar orasidagi javoblarning statistika bo’yicha sezilarli farqini tekshirish uchun chi-kvadrat testi bajaring.

	Kollej bitiruvchisi	
	Ha	Yo’q
Qo’llab-quvvatlaydi	154	132
Qarshilik ko’rsatadi	180	126
Bilmaydi	104	131
Jami	438	389

6.38 Parazitar qurt. Linfatik filariasis — parazitar qurt sababli kelib chiqadigan kasallikdir. Kasallikning murakkabliklari haddan tashqari shish va boshqa muammolarga olib kelishi mumkin. Ushbu yerda uchta turli dori davolash variantlarini taqqoslash bo’yicha tasodifiy tajribaning natijalari ko’rib chiqiladi. Tajribaning ikkinchi yilidagi natijalar quyida berilgan:[46]

	2-yilda aniqlangan	2-yilda aniqlanmagan
Uchta dori	52	2
Ikki dori	31	24
Yillik ikki dori	42	14

(a) Davolashning samaradorligini baholash bo’yicha gipotezalarni tuzing, shuningdek, sharoitlarni tekshiring.

[45] Agar kompyuterdan foydalansak, p-qiymatni 0,017 deb aniqlashimiz mumkin. Ya’ni, Nol gipotezani rad etamiz, chunki p-qiymat 0,05 dan kichik, va shunday xulosaga kelamizki, uchta davolash usulidan kamida biri glyukemik nazoratda 2-turdagi diabetni davolashda boshqalarga qaraganda samaraliroq yoki kamroq samaralidir.

[46] Christopher King et al. “A Trial of a Triple-Drug Treatment for Lymphatic Filariasis”. In: *New England Journal of Medicine* 379 (2018), pp. 1801–1810.

(b) Statistik dasturiy ta'minotdan foydalanib chi-kvadrat testi bajarildi va quyidagi natijalar olindi:

$$X^2 = 23{,}7 \qquad ed = 2 \qquad \text{p-value} = 7{,}2\text{e-}6$$

Ushbu natijalardan foydalanib (a) bo'limidagi gipotezalarni baholang va muammo kontekstida xulosa bering.

Bob bo'yicha mashqlar

6.39 Faol o'qitish. O'z kursidagi faol o'qitish komponentini oshirmoqchi bo'lgan o'qituvchi rejalashtirayotgan o'zgarishlarga talabalar munosabati haqida qayg'uradi. U semestr boshida va oxirida o'z sinfida talabalar bilan so'rovnoma o'tkazib, darslarda faol o'qitish (amaliy mashg'ulotlar) an'anaviy ma'ruzalarga nisbatan ularning o'rganishini yaxshilashga yordam beradimi, deb so'raydi. U talabalar fikri semestr davomida o'zgarib qolganini baholashni xohlaydi. Ushbu tahlil uchun ushbu bo'limda o'rganilgan usullardan foydalanish mumkinmi? Fikringizni tushuntiring.

6.40 Veb-sayt tajribasi. OpenIntro veb-sayti ba'zida dizayn va havolalar joylashuvini sinovdan o'tkazadi. Biz ushbu darslikning asosiy sahifasida yuklab olish havolasi joylashuvining uch xil variantini sinab ko'rish uchun tajriba o'tkazdik va qaysi joylashuv yuklab olishlar sonini ko'paytirganini aniqlashni xohladik. Tajribada ishtirok etgan sayt tashrif buyuruvchilar soni 701 bo'lib, quyidagi jadvalda javob kombinatsiyalarining biri sifatida keltirilgan:

	Yuklab olindi	Yuklab olinmadi
1-joylashuv	13,8%	18,3%
2-joylashuv	14,6%	18,5%
3-joylashuv	12,1%	22,7%

(a) Har bir oltita javob kategoriya uchun sayt tashrif buyuruvchilarining haqiqiy sonini hisoblang.

(b) Tajribadagi har bir shaxs uchta tajriba guruhidan biriga teng imkoniyat bilan tushishi kerak edi. Ammo guruhlar uchun umumiy sonlar biroz farq qilayotganini ko'ramiz. Guruhlar aslida noteng ekanligi haqida biron-bir dalil bormi? Gipotezalarni aniq aytib o'ting, shartlarni tekshiring, mos test statistikasi va p-qiymatini hisoblang, va ma'lumotlar kontekstida xulosa qiling.

(c) Uchta guruhdan birida sayt tashrif buyuruvchilarining darslik havolasini bosish darajasi yuqori ekanligi haqida dalillar bormi, buni tekshirish uchun mos gipoteza testini bajaring.

6.41 Bayram sovg'alarini yetkazib berish. Mahalliy yangiliklar so'rovnomasi 500 ta tasodifiy tanlangan Los-Anjeles aholisi orasida qaysi yetkazib berish xizmatini bayram sovg'alarini yetkazib berish uchun afzal ko'rishlarini so'radi. Quyidagi jadvalda javoblarning yosh guruhi bo'yicha taqsimoti va har bir katakcha uchun kutilgan qiymatlar (qavs ichida ko'rsatilgan) keltirilgan.

		Yosh						
		18-34		35-54		55+		Jami
Yetkazib berish usuli	USPS	72	(81)	97	(102)	76	(62)	245
	UPS	52	(53)	76	(68)	34	(41)	162
	FedEx	31	(21)	24	(27)	9	(16)	64
	Boshqa	7	(5)	6	(7)	3	(4)	16
	Aniq emas	3	(5)	6	(5)	4	(3)	13
	Jami	165		209		126		500

(a) Los-Anjeles aholisi orasida yosh va bayram sovg'alarini yetkazib berish xizmati afzalligi o'rtasidagi mustaqillikni sinash uchun nol va muqobil gipotezalarni yozing.

(b) Chi-kvadrat testidan foydalanish uchun inference shartlari bajarilganmi?

6.42 Fuqarolar urushi. Tasodifiy tanlangan 1,507 kattalar orasida o'tkazilgan milliy so'rov natijalariga ko'ra, amerikaliklarning 56% Fuqarolar urushi Amerika siyosati va siyosiy hayoti uchun hali ham dolzarb deb hisoblaydi.[47]

(a) Ushbu ma'lumotlar amerikaliklarning ko'pchiligi Fuqarolar urushi hali ham dolzarb deb hisoblayotganini isbotlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi? Gipoteza testini bajaring.

[47] Pew Research Center Publications, Civil War at 150: Still Relevant, Still Divisive, data collected between March 30 - April 3, 2011.

(b) Ushbu kontekstda p-qiymatini talqin qiling.

(c) Amerikaliklarning Fuqarolar urushi hali ham dolzarb deb hisoblayotgan proporsiyasi uchun 90% ishonch oralig‘ini hisoblang. Ushbu oralig‘ni kontekstda talqin qiling va ishonch oralig‘i gipoteza testi xulosasiga mos keladimi yoki yo‘qmi, izoh bering.

6.43 Kollej chekuvchilari. Universitet talabalarining chekish proporsiyasini baholashni xohlaymiz. Ushbu universitetdan tasodifiy tanlangan 200 talaba orasida 40 talaba chekishni qabul qilgan.

(a) Universitetda chekishni qabul qilgan talabalar proporsiyasi uchun 95% ishonch oralig‘ini hisoblang va ushbu oralig‘ni kontekstda talqin qiling. (Eslatma: Shartlarni tekshiring.)

(b) Agar chekishni qabul qilgan talabalar proporsiyasi uchun xatolik marjasi 95% ishonch darajasida 2% dan katta bo‘lmasligini istasak, qanday hajmda namuna olish kerak?

6.44 Atsetaminofen va jigar zararlanishi. Atsetaminofenning katta dozalari (masalan, Tylenol kabi dorilarning faol moddasi) jigar zararlanishiga sabab bo‘lishi mumkin deb hisoblanadi. Tadqiqotchi atsetaminofen iste’mol qilganlarning jigar zararlanishiga ega bo‘lgan proporsiyasini baholash uchun tadqiqot o‘tkazmoqchi. Tadqiqotda qatnashish uchun har bir subyektga $20 to‘lanadi va agar bemorda jigar zararlanishi aniqlansa, bepul tibbiy maslahat beriladi.

(a) Agar tadqiqotchi 98% ishonch oralig‘idagi xatolik marjasini 2% bilan cheklashni istasa, subyektlarga to‘lash uchun minimal qancha mablag‘ni ajratishi kerak?

(b) (a) qismda hisoblangan summa uning byudjetidan ancha oshib ketadi, shuning uchun u kamroq subyektlardan foydalanishga qaror qiladi. Bu uning ishonch oralig‘ining kengligiga qanday ta’sir qiladi?

6.45 Kollejdan keyingi hayot. Biz o‘rta kattalikdagi universitetda bakalavr darajasini tugatgandan so‘ng bir yil ichida ish topgan bitiruvchilarning proporsiyasini baholashni xohlaymiz. Tasodifiy tanlangan 400 bitiruvchidan 348 tasi ish topganligi aniqlangan. Ushbu bitiruvchilar sinfi 4500 dan ortiq talabani o‘z ichiga oladi.

(a) Populyatsiya parametrini tavsiflang. Ushbu parametrning nuqtali bahosi qanday qiymatda?

(b) Ushbu ma’lumotlar asosida ishonch oralig‘ini tuzish uchun zarur bo‘lgan shartlar bajarilganmi, tekshiring.

(c) Ushbu universitetda bakalavr darajasini tugatgandan so‘ng bir yil ichida ish topgan bitiruvchilar proporsiyasi uchun 95% ishonch oralig‘ini hisoblang va ushbu oralig‘ni ma’lumotlar kontekstida talqin qiling.

(d) “95% ishonch” nimani anglatadi?

(e) Xuddi shu parametr uchun endi 99% ishonch oralig‘ini hisoblang va uni ma’lumotlar kontekstida talqin qiling.

(f) 95% va 99% ishonch oralig‘larining kengliklarini taqqoslang. Qaysi biri kengroq? Tushuntiring.

6.46 Qandli diabet va ishsizlik. Gallup so‘rovi amerikaliklardan ularning bandlik holati va qandli diabetga ega ekanliklarini so‘radi. So‘rov natijalari shuni ko‘rsatadiki, to‘liq yoki qisman band bo‘lgan 47774 kishining 1,5% va ishsiz bo‘lgan 18-29 yoshdagi 5855 kishining 2,5% qandli diabetga ega.[48]

(a) Ushbu tadqiqot natijalarini ko‘rsatadigan ikki tomonlama jadvalni tuzing.

(b) Band va ishsiz amerikaliklar orasida qandli diabetga ega bo‘lganlar proporsiyasi o‘rtasidagi farqni sinash uchun tegishli gipotezalarni yozing.

(c) Namuna farqi taxminan 1%. Agar gipoteza testi yakunlansa, p-qiymati juda kichik bo‘ladi (taxminan 0), ya’ni farq statistik jihatdan ahamiyatlidir. Ushbu natijadan foydalanib, statistik jihatdan ahamiyatli va amaliy jihatdan ahamiyatli natijalar o‘rtasidagi farqni tushuntiring.

6.47 Tosh-qog‘oz-qaychi. Tosh-qog‘oz-qaychi – bu ikkita yoki undan ortiq odam tomonidan o‘ynaladigan o‘yin bo‘lib, ishtirokchilar qo‘llari yordamida tosh, qog‘oz yoki qaychini tanlashadi. Siz statistik kursingiz loyihasi uchun ishtirokchilar ushbu uchta tanlovni tasodifiy tanlaydilarmi yoki ular ma’lum bir tanlovni boshqalardan ko‘proq afzal ko‘radilarmi, deb baholashni xohlaysiz. Ikki do‘stingizdan tosh-qog‘oz-qaychi o‘ynashlarini so‘raysiz va har bir tanlov necha marta tanlanganini hisoblaysiz. Quyidagi jadval ma’lumotlarni umumlashtiradi:

Tosh	Qog‘oz	Qaychi
43	21	35

Ushbu ma’lumotlardan foydalanib, ishtirokchilar ushbu uchta tanlovni tasodifiy tanlayaptimi yoki ma’lum tanlovlar boshqalaridan afzal ko‘rilayotganini baholang. Tahlilingizning har bir bosqichini aniq tasvirlang va natijalarni ma’lumotlar va tadqiqot savoli kontekstida talqin qiling.

[48] Gallup Wellbeing, Employed Americans in Better Health Than the Unemployed, data collected Jan. 2, 2011 - May 21, 2012.

6.48 2010-yil sog'liqni saqlash qonuni. 2012-yil 28-iyun kuni AQSh Oliy sudi ko'p muhokama qilingan 2010-yilgi sog'liqni saqlash qonunini konstitutsion deb e'lon qildi. Ushbu qarordan bir kun o'tib e'lon qilingan Gallup so'rovnomasi natijalariga ko'ra, 1012 amerikaliklarning 46% ushbu qarorni qo'llab-quvvatlagan. 95% ishonch darajasida, ushbu namunada 3% xatolik marjasi mavjud. Ushbu ma'lumotga asoslanib, quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.[49]

(a) Biz 95% ishonch bilan ushbu namunadagi amerikaliklarning 43% dan 49% gacha bo'lgan qismi AQSh Oliy sudining 2010-yilgi sog'liqni saqlash qonuni bo'yicha qarorini qo'llab-quvvatlaydi, deb ayta olamiz.

(b) Biz 95% ishonch bilan amerikaliklarning 43% dan 49% gacha bo'lgan qismi AQSh Oliy sudining 2010-yilgi sog'liqni saqlash qonuni bo'yicha qarorini qo'llab-quvvatlaydi, deb ayta olamiz.

(c) Agar biz 1012 amerikaliklardan ko'plab tasodifiy namunalar olsak va ularning AQSh Oliy sudining qarorini qo'llab-quvvatlagan proporsiyalarini hisoblasak, ushbu proporsiyalarning 95% i 43% dan 49% gacha bo'ladi.

(d) 90% ishonch darajasida xatolik marjasi 3% dan yuqori bo'ladi.

6.49 Mobil qurilmada brauzer orqali ishlash. Tasodifiy tanlangan 2254 amerikalik kattalar orasida o'tkazilgan so'rovnomaga ko'ra, mobil telefon egalarining 17% faqat mobil telefon orqali, kompyuter yoki boshqa qurilmadan foydalanmay internetga kiradi.[50]

(a) Onlayn maqolaga ko'ra, bir mobil tadqiqot kompaniyasining hisobotida Xitoy mobil veb foydalanuvchilarining 38% faqat mobil telefon orqali internetga kirishi aytilgan.[51] Ushbu ma'lumotlar amerikaliklarning faqat mobil telefon orqali internetga kiradiganlar proporsiyasi Xitoydagi 38% proporsiyadan farq qilishini isbotlash uchun kuchli dalillarni taqdim etadimi? Gipoteza testini bajaring.

(b) Ushbu kontekstda p-qiymatini talqin qiling.

(c) Faqat mobil telefon orqali internetga kiradigan amerikaliklarning proporsiyasi uchun 95% ishonch oralig'ini hisoblang va ushbu oralig'ni kontekstda talqin qiling.

6.50 Kofe va depressiya. Tadqiqotchilar kofeinli kofe iste'moli va ayollarda depressiya xavfi o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganish bo'yicha tadqiqot o'tkazdilar. Tadqiqot 1996-yilda boshlanganda depressiya simptomlaridan xoli bo'lgan 50739 ayol bo'yicha ma'lumotlar to'plangan va 2006-yilgacha kuzatilgan. Tadqiqotchilar kofeinli kofe iste'moli haqida so'rovnomalar o'tkazdilar, har bir shaxsdan shifokor tomonidan tashxis qo'yilgan depressiya haqida so'rashdi va antidepressantlardan foydalanish bo'yicha ma'lumotlar to'plashdi. Quyidagi jadval kofeinli kofe iste'mol qilish miqdori bo'yicha depressiya holatlarining taqsimotini ko'rsatadi.[52]

		Kofeinli kofe iste'moli					
		≤ 1 chashka/hafta	2-6 chashka/hafta	1 chashka/kun	2-3 chashka/kun	≥ 4 chashka/kun	Jami
Klinik depressiya	Ha	670	373	905	564	95	2607
	Yo'q	11545	6244	16329	11726	2288	48132
	Jami	12215	6617	17234	12290	2383	50739

(a) Kofe iste'moli va depressiya o'rtasidagi bog'liqlikni baholash uchun qaysi turdagi test mos keladi?

(b) (a)-qismda aniqlangan test uchun gipotezalarni yozing.

(c) Depressiyadan aziyat chekayotgan va chekmaydigan ayollar uchun umumiy proporsiyalarni hisoblang.

(d) Belgilangan katakcha uchun kutilgan qiymatni aniqlang va ushbu katakcha uchun test statistikasi hissasini hisoblang, ya'ni $(Kuzatilgan - Kutilgan)^2/Kutilgan$.

(e) Test statistikasi $\chi^2 = 20{,}93$. P-qiymati nima?

(f) Gipoteza testi xulosasi nima?

(g) Ushbu tadqiqotning mualliflaridan biri NYTimes gazetasida "faqat ushbu tadqiqotga asoslanib, ayollarni qo'shimcha kofe iste'mol qilishga undash hali erta" deb aytgan.[53] Ushbu bayonot bilan rozi bo'lasizmi? Fikringizni tushuntiring.

[49] Gallup, Americans Issue Split Decision on Healthcare Ruling, data collected June 28, 2012.
[50] Pew Internet, Cell Internet Use 2012, data collected between March 15 - April 13, 2012.
[51] S. Chang. "The Chinese Love to Use Feature Phone to Access the Internet". In: *M.I.C Gadget* (Mar. 2012). March 23.
[52] M. Lucas et al. "Coffee, caffeine, and risk of depression among women". In: *Archives of internal medicine* 171.17 (2011), p. 1571.
[53] A. O'Connor. "Coffee Drinking Linked to Less Depression in Women". In: *New York Times* (Sept. 26, 2011).

7-BOB

Miqdoriy ma’lumotlar uchun xulosalar chiqarish

7.1 t-taqsimot yordamida bir tanlanmali o‘rtachalar

7.2 Juft ma’lumotlar

7.3 Ikkita o‘rtacha qiymatlarning farqi

7.4 O‘rtacha qiymatlar farqi uchun quvvatni hisoblash

7.5 Ko‘p o‘rtacha qiymatlarni solishtirish, ANOVA

5-bobda ishonch oraliqlari va gipotezalarni tanlanma ulushlari uchun normal taqsimotdan foydalanib statistik xulosa chiqarish uchun asos yaratdi. Ushbu bobda biz bir necha yangi nuqta baholarini va bir nechta yangi taqsimotlarni o‘rganamiz. Har bir holatda inference g‘oyalari bir xil qoladi: qaysi nuqta bahosi yoki test statistikasi foydali ekanligini aniqlash, nuqta bahosi yoki test statistikasi uchun mos taqsimotni tanlash, va inference g‘oyalarini qo‘llash.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

7.1 t-taqsimot yordamida bir tanlanmali o‘rtachalar

Tanlanmaviy nisbat $\hat{p}$ ning xossalarini normal taqsimot yordamida modellashtirish mumkin bo‘lganidek, ma’lum shartlar bajarilganda tanlanma o‘rtacha $\bar{x}$ ni ham normal taqsimot yordamida modellashtirish mumkin. Biroq, biz tez orada t-taqsimot deb nomlangan yangi taqsimot, tanlanma o‘rtachalar bilan ishlashda ko‘proq foydali ekanligini bilib olamiz. Avval ushbu yangi taqsimotni o‘rganamiz, so‘ngra undan foydalanib ishonch oraliqlarini quramiz va o‘rtachalar uchun gipoteza testlarini tekshiramiz.

7.1.1 Tanlanma o‘rtacha $\bar{x}$ ning taqsimoti

Tanlanma o‘rtacha $\bar{x}$ ma’lum shartlar bajarilganda, bosh to‘plam o‘rtachasi μ atrofida markazlashgan normal taqsimotga yaqinlashadi. Bundan tashqari, tanlanma o‘rtacha uchun standart xatolikni bosh to‘plamning standart chetlanishi σ va tanlanma hajmi n yordamida hisoblash mumkin.

TANLANMA O‘RTACHA UCHUN MARKAZIY LIMIT TEOREMASI

Agar biz o‘rtachasi μ va standart chetlanishi σ bo‘lgan bosh to‘plamdan n ta o‘zaro bog‘liqsiz kuzatuvdan iborat yetarlicha katta tanlanma olsak, unda $\bar{x}$ ning tanlanma taqsimoti deyarli normal bo‘ladi:

$$\text{O‘rtacha} = \mu; \qquad \text{Standart xato } (SX) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\bar{x}$ yordamida ishonch intervallari va gipoteza testlariga kirishishdan oldin, biz quyidagi ikkita mavzuni muhokama qilishimiz kerak:

- $\hat{p}$ ni normal taqsimot bilan modellashtirganda ma’lum shartlar bajarilishi kerak edi. Ammo $\bar{x}$ bilan ishlash shartlari biroz murakkabroq va biz 7.1.2-bo‘limda xulosalar uchun shartlarni qanday tekshirishni muhokama qilamiz.
- Standart xato bosh to‘plam standart chetlanishi σ ga bog‘liq. Biroq, σ ni kamdan-kam hollarda bilamiz va buning o‘rniga uni baholashimiz kerak bo‘ladi. Ushbu baholashning o‘zi mukammal emasligi sababli, bu muammoni hal qilish uchun t-taqsimotdan foydalanamiz. Bu esa 7.1.3-bo‘limda muhokama qilinadi.

7.1.2 $\bar{x}$ ni modellashtirish uchun talab qilinadigan ikkita shartni baholash

Markaziy limit teoremani tanlanma o‘rtacha $\bar{x}$ uchun qo‘llashda ikkita shart bajarilishi kerak:

Bog‘liqsizlik. Tanlanma kuzatuvlari bog‘liqsiz bo‘lishi kerak. Ushbu shartni bajarishning eng keng tarqalgan usuli — tanlanmani bosh to‘plamning oddiy tasodifiy tanlanmasidan olishdir. Agar ma’lumotlar tasodifiy jarayon, masalan, zar tashlashga o‘xshash jarayondan olingan bo‘lsa, bu ham bog‘liqsizlik shartini qanoatlantiradi.

Normal taqsimot. Agar tanlanma kichik bo‘lsa, tanlanmadagi kuzatuvlar normal taqsimotga ega bosh to‘plamdan olingan bo‘lishi talab etiladi. Tanlanma hajmi kattalashgani sayin, ushbu shartni yumshatishimiz mumkin. Ushbu shart, albatta, mavhum bo‘lib, uni baholashni qiyinlashtiradi, shuning uchun bu shartni tekshirishni osonlashtirish uchun bir nechta qo‘pol qoidalarni kiritamiz.

QOIDA: NORMAL TAQSIMOTNI QANDAY TEKSHIRISH KERAK

Normal taqsimot shartini tekshirishning mukammal usuli yo'q, shuning uchun biz ikkita qo'pol qoidadan foydalanamiz:

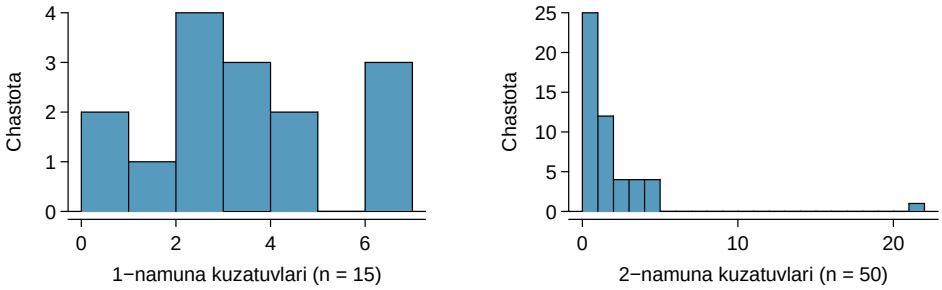
n < 30: Agar tanlanma hajmi n 30 dan kichik bo'lsa va ma'lumotlarda aniq ko'rinadigan chetlanganlar bo'lmasa, odatda ma'lumotlar ushbu shartni qanoatlantirishi uchun deyarli normal taqsimotga ega deb faraz qilamiz.

n ≥ 30: Agar tanlanma hajmi n kamida 30 bo'lsa va juda keskin chetlanganlar bo'lmasa, odatda $\bar{x}$ ning tanlanma taqsimoti deyarli normal, hatto individual kuzatuvlarning asosiy taqsimoti normal bo'lmasa ham, deb faraz qilamiz.

Ushbu statistikani birinchi kursda sizdan normal taqsimot sharti bo'yicha mukammal hukm chiqarish kutilmaydi. Ammo, siz aniq holatlarni qoida asosida hal qila olishingiz kerak.[1]

M **7.1-MISOL**

Quyidagi ikkita grafikni ko'rib chiqing, ular turli bosh to'plamlardan olingan oddiy tasodifiy tanlanmalar asosida tuzilgan. Ularning tanlanma hajmlari $n_1 = 15$ va $n_2 = 50$.



Har bir holatda bog'liqsizlik va normal taqsimot shartlari bajarilganmi?

Har bir tanlanma tegishli bosh to'plamdan oddiy tasodifiy tanlanma sifatida olingan, shuning uchun bog'liqsizlik sharti bajarilgan. Keyingi bosqichda har bir holatda qoida asosida normal taqsimot shartini tekshiramiz.

Birinchi tanlanma 30 dan kam kuzatuvga ega, shuning uchun biz aniq chetlanganlarni izlaymiz. Bunday chetlanganlar mavjud emas; gistogrammada 5 va 6 orasida kichik bir bo'shliq bor, ammo bu bo'shliq kichik va kuzatuvlarning 20% i gistogrammaning o'ngdagi eng oxirgi qutisida joylashgan, shuning uchun buni aniq chetlangan deb atash qiyin. Aniq chetlanganlar bo'lmaganligi sababli, normal taqsimot sharti bajarilgan deb hisoblanadi.

Ikkinchi tanlanma hajmi 30 dan katta va taqsimot markazidan eng uzoq kuzatuvdan taxminan 5 marta uzoqroq joylashgan chetlangan nuqtalarni o'z ichiga oladi. Bu juda keskin chetlangandir, shuning uchun normal taqsimot sharti bajarilmagan bo'ladi.

Amaliyotda, odatda yana "aqlli tekshiruv" ham qilinadi: ya'ni (agar $n < 30$ bo'lsa) bosh to'plam taqsimoti o'rtacha darajada qiyshiq bo'lishi mumkinmi yoki (agar $n \geq 30$ bo'lsa) biz ma'lumotlarda ko'rganimizdan ham tashqarida, ayniqsa juda keskin chetlanganlar bo'lishi ehtimoli bormi — shuni baholab ko'riladi. Masalan, "Twitter"dagi har bir alohida hisobning (akkaunt) obunachilari sonini ko'rib chiqing va ushbu taqsimotni tasavvur qiling. Ko'pgina akkauntlar bir necha ming yoki undan kam obunachilarga ega bo'ladi. Shu bilan birga nisbatan ozgina foizda akkauntlar o'n millionlab obunachilarni to'plagan, bu esa taqsimotning juda qiyshaygan ekanligini anglatadi. Agar ma'lumotlar shunday keskin qiyshaygan taqsimotdan olinganligini bilsak, normal taqsimot sharti bajarilishi uchun kerakli tanlanma hajmini tushunish uchun ma'lum darajada mehnat talab qilinadi.

[1] Ko'proq nozik qoidalar tanlanma hajmi juda katta bo'lgan holatlarda keskin chetlanganlar tekshiruvini yana yumshatishni ko'rib chiqadi. Biroq, biz bu muhokamani kelgusidagi kursga qoldiramiz.

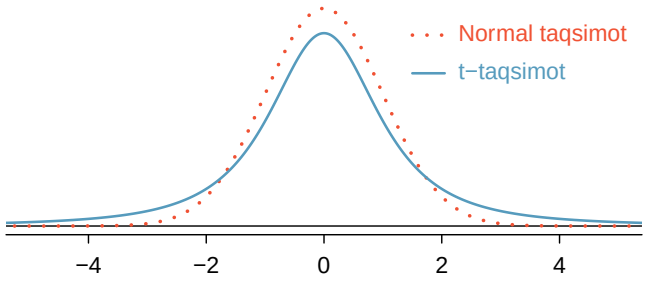
7.1.3 t-taqsimot bilan tanishish

Amalda, biz $\bar{x}$ uchun standart xatolikni to‘g‘ridan-to‘g‘ri hisoblay olmaymiz, chunki biz bosh to‘plam standart chetlanishi σ ni bilmaymiz. Xuddi shunday muammoga biz tanlanma ulushi uchun standart xatolikni hisoblashda duch kelgan edik. Bu bosh to‘plam ulushi p ga bog‘liq edi. Ulush kontekstida standart xatolikni hisoblashda bosh to‘plam ulushi o‘rniga tanlanma ulushdan foydalangan edik. $\bar{x}$ uchun standart xatolikni hisoblashda xuddi shunday yondashuvdan foydalanamiz. Bu holda σ o‘rniga tanlanma standart chetlanish s ishlatiladi:

$$SX = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{s}{\sqrt{n}} .$$

Ushbu yondashuv ko‘p ma’lumotga ega bo‘lganimizda va σ ni s yordamida aniq baholashimiz mumkin bo‘lganda yaxshi ishlaydi. Ammo kichik tanlanmalar bilan bu baho kamroq aniq bo‘lib, $\bar{x}$ ni modellashtirish uchun normal taqsimotdan foydalanishda muammolar keltirib chiqaradi.

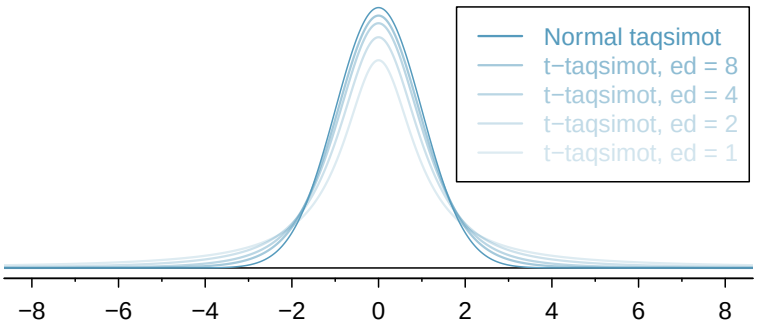
Yangi taqsimotdan foydalanish xulosa hisob-kitoblarida foydali bo‘ladi. Bu taqsimot ***t*-taqsimot** deb ataladi. t-taqsimot 7.1-rasmda uzluksiz chiziq bilan ko‘rsatilgan bo‘lib, qo‘ng‘iroq shakliga ega. Ammo uning quyruqlari normal taqsimotnikiga qaraganda qalinroq. Ya’ni, kuzatuvlarning o‘rtachadan ikki standart chetlanishdan uzoqqa tushish ehtimoli normal taqsimotga qaraganda yuqoriroqdir. t-taqsimotning qo‘shimcha qalin quyruqlari SX ni hisoblashda σ ni o‘rniga s ni ishlatilishi muammosini hal qilish uchun zarur bo‘lgan tuzatishni ta’minlaydi.



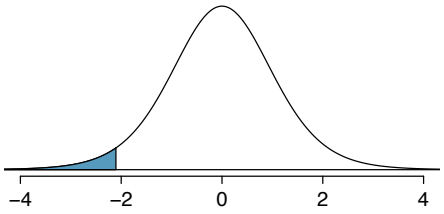
7.1-rasm. t-taqsimot va normal taqsimotning taqqoslanishi.

t-taqsimot har doim nolga markazlashgan bo‘lib, bitta erkinlik darajasi deb nomlanuvchi parametrga ega. **Erkinlik darajalari (*ed*)** qo‘ng‘iroq shaklidagi t-taqsimotning aniq shaklini belgilaydi. Bir nechta t-taqsimotlar 7.2-rasmda normal taqsimot bilan taqqoslangan holda ko‘rsatilgan.

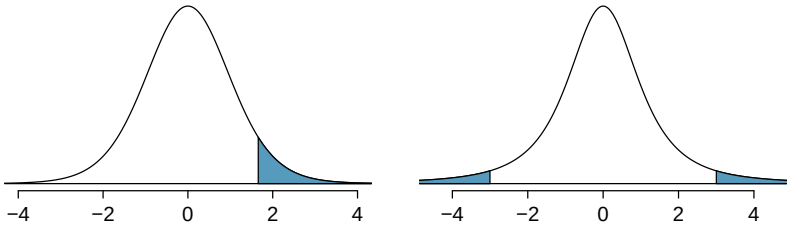
Umuman olganda, biz tanlanma hajmi n bo‘lganda tanlanma o‘rtachani modellashtirish uchun $ed = n - 1$ bo‘lgan t-taqsimotdan foydalanamiz. Ya’ni, kuzatuvlar soni ko‘paygan sari, erkinlik darajasi kattalashadi va t-taqsimot standard normal taqsimotga o‘xshab boradi. Erkinlik darajasi taxminan 30 yoki undan yuqori bo‘lganda, t-taqsimot normal taqsimotdan deyarli farqlanmaydi.



7.2-rasm. Erkinlik darajalari (ed) kattalashgan sari, t-taqsimot standard normal taqsimotga tobora o‘xshaydi.



7.3-rasm. 18 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot. $-2{,}10$ dan past bo'lgan maydon soyali qilib belgilangan.



7.4-rasm. Chap: 20 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot, 1,65 dan yuqori bo'lgan maydon soyali qilib belgilangan. O'ng: 2 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot, 0 dan 3 birlikdan uzoqda bo'lgan maydon soyali qilib belgilangan.

ERKINLIK DARAJALARI (*ed*)

Erkinlik darajasi t-taqsimotning shaklini tavsiflaydi. Erkinlik darajasi qanchalik katta bo'lsa, taqsimot shunchalik normal modelga yaqinlashadi.

$\bar{x}$ ni t-taqsimot yordamida modellashtirganda, $ed = n - 1$ dan foydalaniladi.

t-taqsimot raqamli ma'lumotlarni tahlil qilishda normal taqsimotga nisbatan katta moslashuvchanlikni ta'minlaydi. Amaliyotda **R**, `Python` yoki `SAS` kabi statistik dasturlardan foydalanish odatiy holatdir. Shuningdek, grafik kalkulyator yoki ***t*-jadvali**dan foydalanish mumkin. t-jadval normal taqsimot jadvaliga o'xshaydi va Appendix C.2 dan topilishi mumkin. Unda ushbu variantdan foydalanish bo'yicha yo'riqnomalar va misollar keltirilgan. Qaysi usulni tanlasangiz ham, t-taqsimot bo'yicha ishlayotganligingizni tasdiqlash uchun quyidagi misollarni qo'llang.

7.2-MISOL

t-taqsimotning 18 erkinlik darajasi bilan $-2{,}10$ dan past qismi qanday ulushni tashkil etadi?

Xuddi normal ehtimollik masalasi kabi, avval 7.3-rasmda tasvirni chizib, $-2{,}10$ dan past bo'lgan maydonni soyali qilib belgilaymiz. Statistik dasturiy ta'minotdan foydalanib, aniq qiymatni olamiz: 0,0250.

7.3-MISOL

20 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot 7.4-rasmning chap qismida ko'rsatilgan 1,65 dan yuqoriga tushadigan taqsimot ulushini baholang.

Normal taqsimotda bu taxminan 0,05 ga to'g'ri keladi. Shuning uchun t-taqsimot ham shunga yaqin qiymatni beradi deb kutishimiz mumkin. Statistik dastur yordamida aniq qiymat 0,0573 ga teng.

7.4-MISOL

7.4-rasmning o'ng qismida 2 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot ko'rsatilgan. Taqsimot markazidan 3 birlikdan uzoqroq bo'lgan (yuqorida yoki pastda) taqsimot ulushini baholang.

Juda oz erkinlik darajalariga ega bo'lgani uchun, t-taqsimot normal taqsimotga qaraganda sezilarli darajada boshqacha qiymat beradi. Normal taqsimotda, 68-95-99,7 qoidasi yordamida, bu maydon taxminan 0,003 bo'ladi. Ammo $ed = 2$ bo'lgan t-taqsimotda, ikkala quyruqda ham 3 birlik-

dan uzoqroqda joylashgan maydonning umumiy qiymati 0,0955. Bu maydon normal taqsimotdan olingan qiymatdan keskin farq qiladi.

Y **7.5-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

19 erkinlik darajasiga ega t-taqsimotning qaysi qismi $-1{,}79$ birlikdan yuqorida joylashgan? Quyruq maydonlarini topish uchun o‘zingizga qulay usuldan foydalaning.[2]

7.1.4 Bitta tanlanmali t-ishonch intervali

Keling, t-taqsimotdan foydalanishni ilk bor delfin mushaklaridagi simob miqdori misolida ko‘rib chiqamiz. Simobning yuqori konsentratsiyalari delfinlar uchun ham, ularni vaqti-vaqti bilan iste’mol qiladigan boshqa jonzotlar (masalan, insonlar) uchun ham muhim muammo hisoblanadi.



7.5-rasm. Risso delfini.

Foto muallifi Mayk Beyrd (Mike Baird) (www.bairdphotos.com).
CC BY 2.0 litsenziyasi.

Biz Risso delfinlarining mushagidagi simob miqdorining o‘rtacha qiymati uchun ishonch intervalini Yaponiyadagi Taiji hududidan olingan 19 ta delfindan iborat tanlanma asosida aniqlaymiz. Ma’lumotlar 7.6-rasmda jamlangan. Kuzatilgan eng kichik va eng katta qiymatlar aniq chetlanganlar bor-yo‘qligini baholash uchun ishlatilishi mumkin.

n	$\bar{x}$	s	minimum	maksimum
19	4,4	2,3	1,7	9,2

7.6-rasm. Taiji hududidan 19 ta Risso delfinining mushaklaridagi simob miqdori bo‘yicha ma’lumotlarning qisqacha tavsifi. O‘lchov birligi: mushakning bir grammidagi simobning mikrogrammi (μg/g).

M **7.6-MISOL**

Ushbu ma’lumotlar to‘plami uchun bog‘liqsizlik va normallik shartlari bajariladimi?

Kuzatuvlar oddiy tasodifiy tanlanmadir, shuning uchun bog‘liqsizlik asosli hisoblanadi. 7.6-rasmdagi qisqacha statistika aniq chetlanganlarni ko‘rsatmaydi. Chunki barcha kuzatuvlar o‘rtachadan 2,5 standart chetlanish ichida joylashgan. Ushbu dalillarga asoslanib, normallik sharti asosli ko‘rinadi.

[2]Biz $-1{,}79$ dan *yuqorida* bo‘lgan soyali maydonni topmoqchimiz (rasmni siz chizing). Pastki quyruq maydonining qiymati 0,0447 ga teng, shuning uchun yuqori maydonning qiymati $1 - 0{,}0447 = 0{,}9553$ bo‘ladi.

Normal modelda biz ishonch intervalining kengligini aniqlash uchun $z^\star$ va standart xatolikdan foydalagan edik. t-taqsimotdan foydalanganda, ishonch intervali formulasini biroz o'zgartiramiz:

$$\text{nuqta bahosi } \pm\ t^\star_{ed} \times SX \qquad \rightarrow \qquad \bar{x} \pm t^\star_{ed} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

7.7-MISOL

7.6-rasmdagi qisqacha statistikadan foydalanib, $n = 19$ delfinlar uchun simobning o'rtacha miqdori uchun standart xatolikni hisoblang.

---

s va n ni formula ichiga kiritamiz: $SX = s/\sqrt{n} = 2.3/\sqrt{19} = 0{,}528$.

$t^\star_{ed}$ qiymati ishonchlilik va erkinlik darajasiga asoslangan holda olinadigan chegara hisoblanadi. Bu chegara normal taqsimotda bo'lgani kabi topiladi. $t^\star_{ed}$ shunday topiladiki, t-taqsimotning ed erkinlik darajasiga ega bo'lgan qismi, 0 dan $t^\star_{ed}$ masofada joylashgan ulush bizni qiziqtirgan ishonch darajasiga mos keladi.

7.8-MISOL

$n = 19$ bo'lganda, tegishli erkinlik darajasi qancha? Ushbu erkinlik darajasi uchun va 95% ishonch darajasi uchun $t^\star_{ed}$ ni toping.

Erkinlik darajasini hisoblash oson: $ed = n - 1 = 18$.

Statistik dasturiy ta'minot yordamida yuqori quyruq 2,5% ga teng bo'lgan joyni topamiz: $t^\star_{18} = 2{,}10$. $-2{,}10$ dan past bo'lgan maydon ham 2,5% ga teng bo'ladi. Ya'ni, $ed = 18$ bo'lgan t-taqsimotning 95% qismi 0 dan 2,10 birlik ichida joylashgan.

7.9-MISOL

Risso delfinlaridagi simobning o'rtacha miqdori uchun 95% ishonch intervalini hisoblang va sharhlang.

Ishonch intervalini quyidagicha tuzamiz:

$$\bar{x} \pm t^\star_{18} \times SX \quad \rightarrow \quad 4{,}4 \pm 2{,}10 \times 0{,}528 \quad \rightarrow \quad (3{,}29;\ 5{,}51)$$

Risso delfinlari mushaklaridagi simobning o'rtacha miqdori 3,29 va 5,51 μg/g orasida ekaniga 95% ishonchimiz bor. Bu miqdor juda yuqori darajada hisoblanadi.

t-ISHONCH INTERVALINI O'RTACHA QIYMAT UCHUN TOPISH

n ta bog'liqsiz va deyarli normal kuzatuvlarga asoslangan holda, bosh to'plam o'rtachasi uchun ishonch intervali quyidagicha aniqlanadi:

$$\text{nuqta bahosi } \pm\ t^\star_{ed} \times SX \qquad \rightarrow \qquad \bar{x} \pm t^\star_{ed} \times \frac{s}{\sqrt{n}}$$

bu yerda $\bar{x}$ tanlanma o'rtacha, $t^\star_{ed}$ ishonch darajasi va erkinlik darajalariga (ed) mos keladi, va SX tanlanma bo'yicha hisoblangan standart xatolikdir.

7.10-YO'NALTIRILGAN MASHQ

FDA veb-sayti baliqlardagi simob miqdori haqida ma'lumotlar taqdim etadi. Tinch okeani kroaker oq baliqlarining 15 ta tanlanmasi asosida o'rtacha qiymat va standart chetlanish mos ravishda 0,287 va 0,069 ppm (millionga nisbatan ulushlar) sifatida hisoblandi. 15 ta kuzatuvning qiymatlari 0,18 dan 0,41 ppm intervalida. Ushbu kuzatuvlar bog'liqsiz ekanini faraz qilamiz. Ma'lumotlarning qisqacha statistikasi asosida, individual kuzatuvlarning normallik sharti bo'yicha biron-bir e'tirozlaringiz bormi?[3]

7.11-MISOL

7.10-yo'natirilgan mashqdagi ma'lumotlardan foydalangan holda $\bar{x} = 0{,}287$ ppm uchun standart

[3]Tanlanma hajmi 30 dan kam bo'lgani uchun, aniq chetlanganlarni tekshiramiz. Barcha kuzatuvlar o'rtachadan 2 standart chetlanish ichida joylashganligi sababli, bunday aniq chetlanganlar mavjud emas.

xatolikni baholang. Agar biz simob miqdorining haqiqiy o‘rtacha qiymati uchun 90% ishonch intervalini yaratishda t-taqsimotdan foydalanmoqchi bo‘lsak, erkinlik darajasini va $t^\star_{ed}$ ning qiymatini aniqlang.

Standart xato: $SX = \frac{0{,}069}{\sqrt{15}} = 0{,}0178$.

Erkinlik darajasi: $ed = n - 1 = 14$.

Maqsad 90% ishonch intervalini hisoblash bo‘lganligi sababli, ikkala quyruq maydoni 0,1 bo‘ladigan $t^\star_{14}$ ni tanlaymiz: $t^\star_{14} = 1{,}76$.

YAGONA O‘RTACHA QIYMAT UCHUN ISHONCH INTERVALI

Agar sizga bir o‘rtacha qiymat uchun ishonch intervali amaliyot uchun foydali bo‘lishi aniqlansa, interval qurish uchun to‘rtta qadam mavjud:

Tayyorlash. $\bar{x}$, s, n ni aniqlang va qanday ishonch darajasidan foydalanmoqchi ekaningizni belgilang.

Tekshirish. $\bar{x}$ ning deyarli normal ekanligini ta’minlash uchun shartlarni tekshiring.

Hisoblash. Agar shartlar bajarilgan bo‘lsa, SX ni hisoblang, $t^\star_{ed}$ ni toping va intervalni qurib chiqing.

Xulosa. Ishonch intervalini masala mazmunida talqin qiling.

Y **7.12-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

7.10-yo‘natirilgan mashqdagi va 7.11-misoldagi ma’lumotlar va natijalardan foydalanib, Tinch okeani kroaker oq baliqlarining o‘rtacha simob miqdori uchun 90% ishonch intervalini hisoblang.[4]

Y **7.13-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

7.12-yo‘natirilgan mashqdan olingan 90% ishonch intervali 0,256 ppm dan 0,318 ppm gacha. Tinch okeani kroaker oq baliqlarining 90% qismi simob miqdori 0,256 dan 0,318 ppm intervalida ekanini ayta olamizmi?[5]

7.1.5 Yagona tanlanmali t-testlar

AQShda odatdagi yuguruvchilar vaqti yillar davomida yaxshilanmoqdami yoki sekinlashmoqdami? Bu savolni har bahorda Vashington shahrida o‘tkaziladigan Cherry Blossom Race (Gilos gullari poygasi) poygasi misolida ko‘rib chiqamiz.

2006-yilda Cherry Blossom Race poygasida marraga yetib kelgan barcha yuguruvchilarning o‘rtacha vaqti 93,29 minut (93 daqiqa va taxminan 17 soniya) edi. Biz 100 nafar ishtirokchining 2017-yildagi Cherry Blossom Race poygasi ma’lumotlaridan foydalanib, yuguruvchilar bu poygada tezlashayotganmi yoki sekinlashayotganmi yoki hech qanday o‘zgarish bo‘lmaganligini aniqlashimiz zarur.

Y **7.14-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ushbu olingan misol uchun mos gipotezalar qanday bo‘lishi kerak?[6]

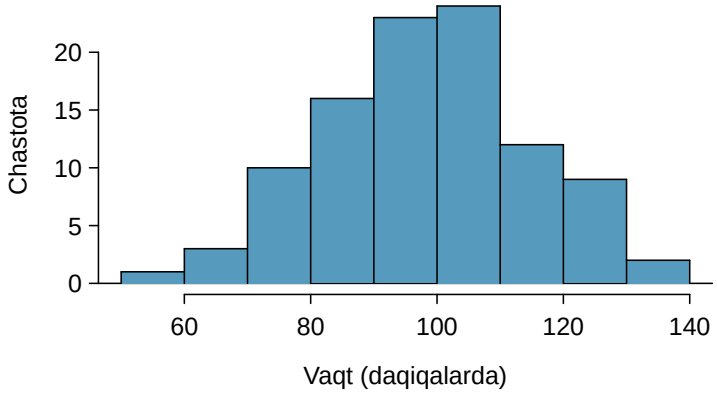
Y **7.15-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ma’lumotlar barcha ishtirokchilarning oddiy tasodifiy tanlanmalaridan olingan, shuning uchun kuzatuvlar bog‘liqsizdir. Ammo, normallik sharti haqida xavotirlanishimiz kerakmi? 7.7-rasmda farqlar (ayirmalar) taqsimotining gistogrammasi keltirilgan. Uni ko‘rib chiqib, keyingi bosqichga o‘tishimiz mumkinmi yoki yo‘qligini baholang.[7]

[4] $\bar{x} \pm t^\star_{14} \times SX \rightarrow 0{,}287 \pm 1{,}76 \times 0{,}0178 \rightarrow (0{,}256;\ 0{,}318)$. Biz 90% ishonch bilan ayta olamizki, Tinch okeani croaker oq baliqlarining o‘rtacha simob miqdori 0,256 va 0,318 ppm intervalida joylashgan.

[5] Yo‘q, ishonch intervali faqat bosh to‘plam parametri uchun ehtimoliy qiymatlar diapazonini beradi, bu holda bosh to‘plam o‘rtachasi. Bu individual kuzatuvlar uchun ko‘rib chiqilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarni ifodalamaydi.

[6] H_0: 2006- va 2017-yillar uchun 10 milya poyga o‘rtacha vaqti bir xil bo‘lgan. $\mu = 93{,}29$ daqiqa. H_A: 2017-yildagi 10 milya poyga o‘rtacha vaqti 2006-yildagidan farq qiladi. $\mu \neq 93{,}29$ daqiqa.



7.7-rasm. Cherry Blossom Race poygasi tanlanmasi uchun `vaqt` (time) ma'lumotlari gistogrammasi.

Yagona tanlanmali o'rtacha qiymat uchun gipoteza testini tekshirish jarayoni yagona ulush uchun gipoteza testini bajarishga juda o'xshash. Birinchidan, kuzatilgan qiymat, nol gipoteza qiymati va standart xatolikdan foydalanib Z-ballni topamiz. Ammo, bu yerda biz t-taqsimotdan foydalanamiz, shuning uchun uni **T-ball** deb ataymiz. Keyin biz avvalgidek p-qiymatni topamiz. Ya'ni tanlanma taqsimoti ostidagi bir tomonli quyruq sohasini yuzini topamiz va uni ikki marta oshiramiz.

M **7.16-MISOL**

Bog'liqsizlik va normallik shartlari bajarilgan holda, biz t-taqsimot yordamida gipoteza testini davom ettirishimiz mumkin. 2017-yildagi Cherry Blossom Race ishtirokchilari tanlanmasining o'rtacha qiymati va standart chetlanishi mos ravishda 97,32 va 16,98 daqiqani tashkil qiladi. Eslatib o'tamiz, tanlanma hajmi 100 ta va 2006-yildagi o'rtacha yugurish vaqti 93,29 daqiqa edi. Test statistikasi va p-qiymatini toping. Xulosa qanday bo'ladi?

Test statistikasi (T-ball)ni topish uchun, avval standart xatolikni hisoblashimiz kerak:

$$SX = 16{,}98/\sqrt{100} = 1{,}70 \ .$$

Endi biz tanlanma o'rtachasi (97,32), nol qiymati (93,29) va SX dan foydalangan holda T-ballni hisoblaymiz:

$$T = \frac{97{,}32 - 93{,}29}{1{,}70} = 2{,}37 \ .$$

$ed = 100 - 1 = 99$ bo'lgan holda, statistik dasturiy ta'minotdan (yoki t-jadvaldan) foydalanib bir tomonli quyruq maydoni 0,01 ekanini aniqlashimiz mumkin, bu qiymatni ikki marta oshirib 0,02 ga ega bo'lamiz.

p-qiymat 0,05 dan kichik bo'lgani uchun, nol gipotezani rad qilamiz. Ya'ni, ma'lumotlar Cherry Blossom Race poygasida 2017-yildagi o'rtacha yugurish vaqti 2006-yildagi o'rtachadan farq qilishini ishonchli ravishda tasdiqlaydi. Kuzatilgan qiymat nol gipoteza qiymatidan yuqoriroq bo'lgani uchun va nol gipotezani rad qilganimiz uchun, biz xulosa qilamizki, 2017-yilda ishtirokchilar poygada 2006-yildagidan sekinroq yugurishgan.

[7] 100 ta tanlanmada, biz faqat juda ekstremal chetlanganlar mavjud bo'lsa xavotirlanishimiz kerak. Ma'lumotlar gistogrammasida hech qanday chiqindilar yo'q (va, ehtimol, umuman chetlanganlar yo'q).

BITTA O‘RTACHA QIYMAT UCHUN GIPOTEZANI TEKSHIRISH

Bitta o‘rtacha qiymat uchun gipoteza testini ishlatish kerakligini aniqlagandan so‘ng, testni bajarish uchun to‘rt bosqich mavjud:

Tayyorlaning. O‘rganilayotgan parametrni aniqlang, gipotezalarni ro‘yxatini tuzing. Ahamiyatlilik darajasini aniqlang va $\bar{x}$, s hamda n ni aniqlang.

Tekshiring. $\bar{x}$ deyarli normal ekanligini tasdiqlash uchun shartlarni tekshiring.

Hisoblang. Agar shartlar bajarilgan bo‘lsa, SX ni hisoblang, T-ballni hisoblang va p-qiymatni aniqlang.

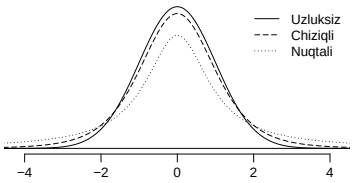
Xulosa qiling. p-qiymatni α bilan solishtirish orqali gipotezani baholang va masala mazmunidan kelib chiqib xulosa chiqaring.

Mashqlar

7.1 Kritik t ni aniqlang. Taxminan normal bosh to‘plamdan bog‘liqsiz tasodifiy tanlanma olingan va standart chetlanish noma’lum. Quyidagi tanlanma hajmi va ishonch darajalari uchun erkinlik darajasini va kritik t qiymatni ($t^\star$) aniqlang.

(a) $n = 6$, CL $= 90\%$
(b) $n = 21$, CL $= 98\%$
(c) $n = 29$, CL $= 95\%$
(d) $n = 12$, CL $= 99\%$

7.2 t-taqsimot. Rasmda uchta simmetrik va bitta cho‘qqili egri chiziqlar ko‘rsatilgan. Ular standart normal (z) taqsimot, 5 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot, va 1 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot. Qaysi biri qaysi ekanligini aniqlang va sababini tushuntiring.



7.3 p-qiymatini toping, 1-qism. Taxminan normal bosh to‘plamdan bog‘liqsiz tasodifiy tanlanma olingan va standart chetlanish noma’lum. Quyidagi tanlanma hajmi va test statistikasi uchun p-qiymatini toping. Shuningdek, $\alpha = 0{,}05$ bo‘lganda nol gipoteza rad etilishini aniqlang.

(a) $n = 11$, $T = 1{,}91$
(b) $n = 17$, $T = -3{,}45$
(c) $n = 7$, $T = 0{,}83$
(d) $n = 28$, $T = 2{,}13$

7.4 p-qiymatini toping, 2-qism. Taxminan normal bosh to‘plamdan bog‘liqsiz tasodifiy tanlanma olingan va standart chetlanish noma’lum. Quyidagi tanlanma hajmi va test statistikasi uchun p-qiymatini toping. Shuningdek, $\alpha = 0{,}01$ bo‘lganda nol gipoteza rad etilishini aniqlang.

(a) $n = 26$, $T = 2{,}485$
(b) $n = 18$, $T = 0{,}5$

7.5 Teskari yo’nalishda hisoblash, 1-qism. Bosh to‘plamning o‘rtachasi μ uchun 95% ishonch intervali (18,985; 21,015) sifatida berilgan. Ushbu ishonch intervali 36 ta kuzatuvdan iborat oddiy tasodifiy tanlanma asosida qurilgan. Tanlanmaning o‘rtacha qiymati va standart chetlanishini hisoblang. Xulosa chiqarish uchun zarur barcha shartlar bajarilgan deb hisoblang. Hisob-kitoblarda t-taqsimotdan foydalaning.

7.6 Teskari yo’nalishda hisoblash, 2-qism. Bosh to‘plam o‘rtachasi uchun 90% ishonch intervali (65; 77) sifatida berilgan. Bosh to‘plam taqsimoti taxminan normal va bosh to‘plam standart chetlanishi noma’lum.

Ushbu ishonch intervali 25 ta kuzatuvdan iborat oddiy tasodifiy tanlanma asosida qurilgan. Tanlanma o'rtachasini, xatolik chegarasini (margin of error) va tanlanmaning standart chetlanishini hisoblang.

7.7 Nyu-Yorkliklarning uyqu odatlari. Nyu-York "uxlamaydigan shahar" sifatida mashhur. 25 nafar nyu-yorkliklardan har kuni tunda qancha vaqt uxlayotganliklari so'raldi. Ushbu ma'lumotlarning statistik xulosalari quyida ko'rsatilgan. Nuqtaviy baho nyu-yorkliklarning o'rtacha tungi uyqu vaqti 8 soatdan kamligini ko'rsatmoqda. Bu natija statistik jihatdan ahamiyatlimi?

n	$\bar{x}$	s	min	maks
25	7,73	0,77	6,17	9,78

(a) Gipotezalarni belgilab, ularni so'zlar va belgilar bilan yozing.

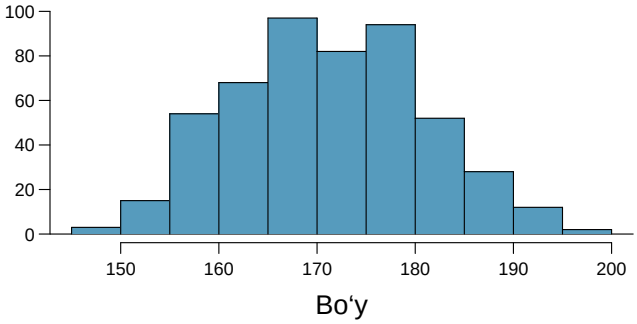
(b) Shartlarni tekshirib chiqing, so'ngra test statistikasi (T) va unga tegishli erkinlik darajasini hisoblang.

(c) p-qiymatini toping va uni ushbu masala mazmunida izohlang. Chizma yordamida tasvirlash foydali bo'lishi mumkin.

(d) Gipoteza testining xulosasi qanday?

(e) Agar ushbu gipoteza testiga mos keluvchi 90% ishonch intervalini tuzsangiz, siz 8 soatni oraliq ichida bo'lishini kutasizmi?

7.8 Kattalarning bo'yi. Antropometriya bo'yicha tadqiqotchilar tana ko'rsatkichlari va suyak diametrlari bilan bir qatorda yosh, vazn, bo'y va jinsga oid ma'lumotlarini yig'ishdi. 507 nafar jismonan faol shaxslar ishtirok etdi. Quyida bo'ylarning santimetrda taqsimot gistogrammasi keltirilgan.[8]



Min	147,2
Q1	163,8
Mediana	170,3
O'rtacha	171,1
SCH	9,4
Q3	177,8
Maks	198,1

(a) Jismonan faol shaxslarning o'rtacha bo'yining nuqtaviy bahosi qanday? Mediana-chi?

(b) Faol shaxslar bo'yi uchun standart chetlanishning nuqtaviy bahosi qanday? IQR-chi?

(c) 1m 80sm (180 sm) bo'yli odam odatdagidan baland bo'yli hisoblanadimi? 1m 55sm (155 sm) bo'yli odam-chi? Tushuntiring.

(d) Tadqiqotchilar boshqa bir tasodifiy tanlanma olsalar, ushbu yangi tanlanmada o'rtacha va standart chetlanish yuqoridagi qiymatlarga teng bo'lishini kutasizmi? Tushuntiring.

(e) Agar tanlanma tasodifiy tanlangan bo'lsa, tanlanmadan olingan o'rtacha qiymatlar barcha faol shaxslarning o'rtacha bo'yining nuqtaviy baholari hisoblanadi. Ushbu bahoning o'zgaruvchanligini o'lchash uchun qanday o'lchovdan foydalanamiz? Ushbu ma'lumotlardan foydalanib so'ralgan miqdorni hisoblang.

7.9 O'rtacha qiymatni toping. Quyidagi gipotezalar berilgan:

$$H_0 : \mu = 60;$$
$$H_A : \mu \neq 60.$$

Tanlanma standart chetlanish 8 va tanlanma hajmi 20 ga teng. Tanlanma o'rtachaning qanday qiymatida p-qiymat 0,05 ga teng bo'ladi? Xulosa chiqarish uchun zarur bo'lgan barcha shartlar bajarilgan deb hisoblang.

7.10 $t^\star$ va $z^\star$. Berilgan ishonch darajasida $t^\star_{df}$ ning qiymati $z^\star$ dan katta bo'ladi. $t^\star_{df}$ ning z^* dan biroz kattaroq bo'lishi ishonch oralig'ining kengligiga qanday ta'sir qiladi? Tushuntiring.

7.11 Pianino chalish. Jorjianna (Georgianna) o'zining musiqiy maktabi bilan mashhur kichik shaharida o'rtacha bola pianino darslariga 5 yildan kam vaqt davomida qatnashishini da'vo qilmoqda. Ushbu shahardan tasodifiy tanlangan 20 ta boladan iborat tanlanma o'rtacha 4,6 yil pianino darslariga qatnashgan va standart chetlanishi 2,2 yilga teng.

(a) Jorjiannaning da'vosini (yoki unga qarama-qarshi da'voni) gipoteza testi yordamida baholang.

(b) Ushbu shahardagi talabalar pianino darslariga qatnashadigan yillar soni uchun 95% lik ishonch intervalini tuzing va natijalarni ma'lumotlar mazmunidan kelib chiqib izohlang.

[8] G. Heinz et al. "Exploring relationships in body dimensions". In: *Journal of Statistics Education* 11.2 (2003).

(c) Gipoteza testi va ishonch intervali natijalari bir-biriga mos keladimi? Tushuntiring.

7.12 Avtomobil chiqindilari va qo'rg'oshin ta'siri. Avtomobil chiqindilari natijasida yuzaga keladigan qo'rg'oshin ta'siriga qiziqqan tadqiqotchilar shaharning markaziy hududida tirbandlik nazorati bilan shug'ullanadigan 52 nafar politsiya xodimining qonini tahlil qilishdi. Ushbu xodimlar qonidagi qo'rg'oshin konsentratsiyasi o'rtacha 124,32 $\mu g/l$ va standart chetlanishi 37,74 $\mu g/l$ edi. Avvalroq yaqin atrofdagi chekka hududda yashovchi, qo'rg'oshin ta'siriga uchramagan shaxslarning o'rtacha qon konsentratsiyasi 35 μg/l bo'lganligi haqida ma'lumot berilgan.[9]

(a) Politsiya xodimlari turli darajadagi qo'rg'oshin konsentratsiyasiga uchraganligini tekshirish uchun mos gipotezalarni yozing.

(b) Ushbu ma'lumotlar uchun xulosa chiqarish shartlarini aniq bayon qiling va tekshiring.

(c) (b) bo'limidagi javoblardan qat'i nazar, markaziy hududdagi politsiya xodimlari avvalgi tadqiqotdagi guruhga nisbatan yuqori qo'rg'oshin ta'siriga uchraganligini test qiling. Natijalarni masala mazmunidan kelib chiqib izohlang.

7.13 Avtomobil sug'urtasi bo'yicha tejash. Bir bozor tadqiqotchisi avtomobil sug'urtasi bo'yicha tejashni raqobatdosh kompaniyada baholamoqchi. O'tgan tadqiqotlar asosida, u tejashning standart chetlanishi $100 ekanini taxmin qilmoqda. U 95% lik ishonch darajasida xato chegarasi $10 dan oshmasligini xohlaydi. U qancha katta hajmli tanlanmani yig'ishi kerak?

7.14 SAT ballari. "Ivy League" kolleji talabalarining SAT ballari uchun standart chetlanish 250 balldan iborat. Ikki nafar statistika talabasi, Reyna (Raina) va Lyuk (Luke), ushbu kolleji talabalarining o'rtacha SAT ballini sinflar loyihasi uchun baholamoqchi. Ular xato chegarasi 25 balldan oshmasligini xohlaydi.

(a) Reyna 90% lik ishonch intervalidan foydalanmoqchi. U qanday katta hajmli tanlanmani yig'ishi kerak?

(b) Lyuk 99% lik ishonch intervalidan foydalanmoqchi. Hisob-kitob qilmasdan, uning tanlanmasi Reynanikidan katta yoki kichikroq bo'lishini aniqlang va sababini tushuntiring.

(c) Lyuk uchun minimal talab etiladigan tanlanma hajmini hisoblang.

7.2 Juft ma'lumotlar

Ushbu darslikning oldingi nashrida 2010-yilda Amazon narxlari, o'rtacha, UCLA kitob do'koni narxlaridan pastroq ekanligini aniqlagan edik. Ko'p yillar o'tdi va ko'plab do'konlar onlayn bozorlarga moslashdi. Shuning uchun UCLA kitob do'koni bugun qanday ahvolda ekanligini bilmoqchi bo'ldik.

Biz 201 ta UCLA kurslarini tanlab oldik. Shulardan, 68 ta kurs uchun zarur bo'lgan kitoblarni Amazon'da topish mumkin edi. Ushbu kurslardan olingan ma'lumotlar to'plamining bir qismi 7.8-rasmda ko'rsatilgan, bu yerda narxlar AQSh dollarida berilgan.

	fan	kurs_raqami	kitob_do'koni	amazon	narx_farqi
1	Amerika tub aholisini o'rganish	M10	47,97	47,45	0,52
2	Antropologiya	2	14,26	13,55	0,71
3	San'at va arxitektura	10	13,50	12,53	0,97
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
68	Yahudiyshunoslik	M10	35,96	32,40	3,56

7.8-rasm. O'quv materiallari narxlari haqidagi ma'lumotlar to'plamidan to'rtta holat.

7.2.1 Juft kuzatuvlar

Har bir o'quv materialining ma'lumotlar to'plamida ikkita mos keluvchi narxi bor: biri UCLA kitob do'koni uchun, ikkinchisi esa Amazon uchun. Agar ikki kuzatuv to'plami o'zaro maxsus

[9] WI Mortada et al. "Study of lead exposure from automobile exhaust as a risk for nephrotoxicity among traffic policemen." In: *American journal of nephrology* 21.4 (2000), pp. 274–279.

moslikka ega bo'lsa, bunday kuzatuvlar **juft kuzatuvlar** deb ataladi.

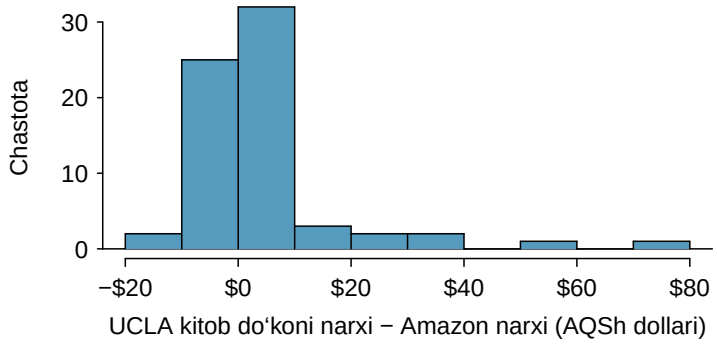
JUFT MA'LUMOTLAR

Agar bir to'plamdagi har bir kuzatuv boshqa to'plamdagi yagona kuzatuv bilan maxsus moslikka yoki bog'lanishga ega bo'lsa, bunday ikkita kuzatuvlar to'plami *juft kuzatuvlar* deb hisoblanadi.

Juft ma'lumotlarni tahlil qilish uchun, har bir juft kuzatuvlar orasidagi natijalar farqini ko'rib chiqish foydali bo'lishi mumkin. O'quv materiallari ma'lumotlarida biz narxlar farqlariga e'tibor qaratamiz, bu `narx_farqi` o'zgaruvchisi ko'rinishida ifodalanadi. Bu yerda farqlar quyidagicha hisoblanadi:

UCLA kitob do'koni narxi − Amazon narxi

Bu har bir kitob uchun amalga oshiriladi. Muhimi shundaki, har doim bir xil tartibda ayirishimiz kerak; bu yerda Amazon narxlari har doim UCLA narxlaridan ayiriladi. 7.8-rasmda ko'rsatilgan birinchi farq $47{,}97 - 47{,}45 = 0{,}52$ ko'rinishida hisoblangan. Shuningdek, ikkinchi farq $14{,}26 - 13{,}55 = 0{,}71$ va uchinchi farq $13{,}50 - 12{,}53 = 0{,}97$ deb hisoblangan. Farqlarning gistogrammasi 7.9-rasmda ko'rsatilgan. Juft kuzatuvlar o'rtasidagi farqlardan foydalanish juft ma'lumotlarni tahlil qilishning keng tarqalgan va foydali usulidir.



7.9-rasm. Har bir kitob uchun tanlangan narx farqlarining gistogrammasi.

7.2.2 Juft ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish

Juft ma'lumotlar to'plamini tahlil qilish uchun, biz faqat farqlarni (ayirmalar) tahlil qilamiz. Biz 7.1-bo'limida qo'llagan t-taqsimot usullaridan foydalanishimiz mumkin.

n_{farq}	$\bar{x}_{farq}$	s_{farq}
68	3,58	13,42

7.10-rasm. 68 ta narx farqlari uchun umumiy statistikalar.

7.17-MISOL

Gipoteza testini tuzing va o'rtacha qiymatda Amazon va UCLA kitob do'koni narxlari o'rtasida farq bor yoki yo'qligini aniqlang. Shuningdek, t-taqsimotdan foydalanib testni davom ettirish mumkinligi shartlarini tekshiring.

Biz ikkita holatni ko'rib chiqamiz: o'rtacha narxlarda farq yo'q yoki o'rtacha narxlarda qandaydir farq mavjud.

H_0: $\mu_{farq} = 0$. O'rtacha o'quv materiallari narxida farq yo'q.

H_A: $\mu_{farq} \neq 0$. O'rtacha narxlarda farq bor.

Keyingi qadamda bog'liqsizlik va normal taqsimot shartlarini tekshiramiz. Kuzatuvlar oddiy tasodifiy tanlovga asoslangan, shuning uchun bog'liqsizlik bajarilgan. Ba'zi chetlangan qiymatlar mavjud, $n = 68$, lekin hech biri juda ekstremal emas. Shuning uchun $\bar{x}$ ning normal taqsimot ekanligi bajrilgan deyish mumkin. Ushbu shartlar bajarilganda, biz t-taqsimotdan foydalanishni davom etishimiz mumkin.

M **7.18-MISOL**

7.17-misolda boshlangan gipoteza testini yakunlang.

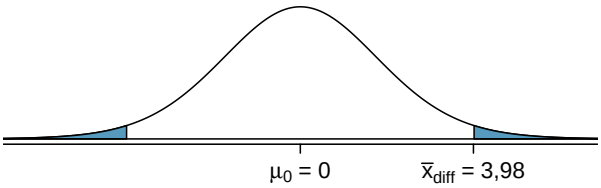
Testni hisoblash uchun $\bar{x}_{farq}$ bilan bog'liq standart xatolikni farqlar standart chetlanishidan ($s_{farq} = 13{,}42$) va farqlar sonidan ($n_{farq} = 68$) foydalanib hisoblang:

$$SX_{\bar{x}_{farq}} = \frac{s_{farq}}{\sqrt{n_{farq}}} = \frac{13{,}42}{\sqrt{68}} = 1{,}63 \ .$$

Test statistikasi $\bar{x}_{farq}$ uchun H_0 o'rinliligida haqiqiy o'rtacha farq 0 bo'lsa, T-ball quyidagicha hisoblanadi:

$$T = \frac{\bar{x}_{farq} - 0}{SX_{\bar{x}_{farq}}} = \frac{3{,}58 - 0}{1{,}63} = 2{,}20.$$

p-qiymatni tasavvur qilish uchun, $\bar{x}_{farq}$ ning tanlama taqsimoti H_0 o'rinlili bo'lsa, $\mu = 0$ o'rtacha qiymat bilan chiziladi, va p-qiymat ikkita soyali quyruq bilan ifodalanadi.



Erkinlik darajasi quyidagicha $ed = 68 - 1 = 67$ ga teng. Statistik dasturiy ta'minot yordamida bitta quyruq maydoni 0,0156 ga tengligini topamiz. Ushbu maydonni ikki baravar oshirish p-qiymatni 0,0312 ekanligini beradi.

p-qiymat 0,05 dan kichik bo'lgani uchun, nol gipotezani rad qilamiz. UCLA kurslari uchun o'rtacha Amazon narxlari UCLA kitob do'koni narxlaridan pastroq.

Y **7.19-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

UCLA kitob do'koni va Amazondagi kitoblar o'rtasidagi o'rtacha narx farqi uchun 95% lik ishonch intervalini yarating.[10]

Y **7.20-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Bizda Amazonning o'rtacha narxi pastroq ekanligi haqida kuchli dalillar bor. Ushbu xulosa UCLA talabalarining xarid qilish odatlariga qanday ta'sir qilishi kerak? UCLA talabalari har doim kitoblarini Amazondan sotib olishlari kerakmi?[11]

[10] Shartlar allaqachon tekshirilgan va standart xatolik 7.17-misolda hisoblangan. Intervalni topish uchun statistik dasturiy ta'minot yoki t-jadvaldan ($t^\star_{67} = 2{,}00$) foydalangan holda $t^\star_{67}$ qiymatini aniqlang, keyin uni nuqtaviy bahosini va standart xatolikni ishonch intervallari formulasiga joylang:

$$\text{nuqta bahosi} \ \pm \ z^\star \times SX \quad \rightarrow \quad 3{,}58 \ \pm \ 2{,}00 \times 1{,}63 \quad \rightarrow \quad (0{,}32; 6{,}84)$$

Biz 95% lik ishonch bilan ayta olamizki, UCLA kurslari uchun kitoblar bo'yicha Amazondagi kitoblarning narxi UCLA kitob do'koniga qaraganda \$0,32 dan \$6,84 gacha arzonroq.

Mashqlar

7.15 Havo sifati. 2013-yilda 25 ta mamlakat poytaxtlarida tasodifiy tanlangan havo sifati o'lchovlari to'plandi, so'ngra shu shaharlarda 2014-yilda yana o'lchovlar o'tkazildi. Ushbu ma'lumotlardan ikki yil orasidagi o'rtacha havo sifatini taqqoslash uchun foydalanmoqchimiz. Juftlangan yoki juftlanmagan testdan foydalanish kerakmi? Sababini tushuntiring.

7.16 To'g'ri / Noto'g'ri: juftlangan. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang. Agar noto'g'ri bo'lsa, tushuntiring.

(a) Juftlangan tahlilda dastlab har bir juft kuzatuvlarning farqi olinadi, so'ngra ushbu farqlarga statistik xulosalar qo'llanadi.

(b) Turli o'lchamdagi ikkita ma'lumotlar to'plami juftlangan ma'lumotlar sifatida tahlil qilinishi mumkin emas.

(c) Bir-biri bilan juftlangan ikkita ma'lumotlar to'plamini ko'rib chiqing. Bir ma'lumotlar to'plamidagi har bir kuzatuv boshqa ma'lumotlar to'plamidan faqat bitta kuzatuv bilan tabiiy moslikka ega.

(d) Bir-biri bilan juftlangan ikkita ma'lumotlar to'plamini ko'rib chiqing. Bir ma'lumotlar to'plamidagi har bir kuzatuv boshqa ma'lumotlar to'plamining kuzatuvlarining o'rtacha qiymatidan ayiriladi.

7.17 Juftlangan yoki yo'q. 1-qism. Quyidagi holatlarning har birida ma'lumotlar juftlanganmi yoki yo'q ekanligini aniqlang.

(a) Talabalarning semestr boshidagi va oxiridagi test natijalarini taqqoslash.

(b) Tasodifiy tanlangan erkaklar va ayollarning maoshlarini solishtirish orqali jins bo'yicha maosh tafovutini baholash.

(c) Xuddi shu guruhdagi bemorlar uchun tadqiqot boshida va 2 yil davomida Vitamin E iste'mol qilgandan so'ng arteriya qalinligini taqqoslash.

(d) Tadqiqot rejasining samaradorligini subyektlarning oldingi va keyingi vaznlarini taqqoslash orqali baholash.

7.18 Juftlangan yoki yo'q? 2-qism. Quyidagi holatlarning har birida ma'lumotlar juftlanganmi yoki yo'q ekanligini aniqlang.

(a) "Intel" va "Southwest Airlines" aksiyalarining o'zgarish darajasi o'xshashligini aniqlashni xohlaymiz. Buni aniqlash uchun 50 kunlik tasodifiy tanlanma olamiz va aynan o'sha kunlarda Intel va Southwest aksiyalarining qiymatlarini qayd etamiz.

(b) Target do'konlaridan 50 ta mahsulotni tasodifiy tanlab, ularning narxlarini qayd etamiz. Keyin "Walmart"ga tashrif buyurib, aynan o'sha 50 ta mahsulot uchun narxlarni to'playmiz.

(c) Maktab kengashi tuman ichidagi ikkita o'rta maktab o'quvchilari uchun SAT ballarining o'rtacha qiymati orasidagi farqni aniqlamoqchi. Tekshirish uchun har bir maktabdan 100 ta o'quvchini oddiy tasodifiy tanlashadi.

7.19 Global isish, 1-qism. Cheklangan iqlim ma'lumotlarini ko'rib chiqamiz, 1948 va 2018-yillardagi harorat farqlarini tahlil qilamiz. Milliy Okeanik va Atmosferik Administratsiyaning tarixiy ma'lumotlar bazasidan 197 ta joydan ma'lumotlar olingan bo'lib, ushbu joylar uchun har ikki yilda ham ma'lumotlar mavjud. Savol quyidagicha: 2018-yilda 1948-yilga qaraganda 90°F dan yuqori haroratli kunlar ko'proq bo'lganmi?[12] Har bir joy uchun 90°F dan yuqori bo'lgan kunlar sonining farqi (2018-yildagi kunlar – 1948-yildagi kunlar) hisoblangan. Ushbu farqlar o'rtacha 2,9 kun va standart chetlanish 17,2 kunni tashkil qiladi. Ushbu ma'lumotlar ob-havo stansiyalarida 2018-yilda 90°F dan yuqori haroratli kunlar ko'proq bo'lganligini ko'rsatadigan kuchli dalillar beradimi?

[11] O'rtacha narx farqi ushbu savol uchun biroz foydali. 7.9-rasmda ko'rsatilgan taqsimotni tekshiring. Ba'zi holatlarda Amazon narxlari UCLA kitob do'koniga nisbatan ancha pastroq. Bu esa Amazon (va ehtimol boshqa onlayn saytlarni) tekshirib ko'rishga arziydi degan xulosaga olib keladi. Ammo ko'p hollarda Amazon narxlari UCLA kitob do'koni narxidan yuqori va ko'pincha narxlar o'rtasidagi farq katta emas. Oxir-oqibat, agar kitobni darhol kitob do'konidan olish qulayroq bo'lsa, masalan, o'qish yoki uy vazifasini boshlash uchun, UCLA kitob do'konidan xarid qilish yaxshi fikr bo'lishi mumkin. Agar aynan bir kitob bo'yicha narx farqi juda katta bo'lmasa.

Ma'lumot uchun, bu 2010-yildagi shunga o'xshash ma'lumotlar to'plamidan olingan natijadan butunlay boshqacha natija. O'sha paytda Amazon narxlari deyarli har doim UCLA kitob do'koni narxlaridan katta farq bilan pastroq bo'lgan. Bu esa Amazondan foydalanishni UCLA kitob do'koniga qaraganda jozibaliroq qilgan. Hozir esa biz ko'pincha eng yaxshi narxni topish uchun bir nechta veb-saytlarni tekshiramiz.

[12] NOAA, www.ncdc.noaa.gov/cdo-web/datasets, April 24, 2019.

(a) 1948- va 2018-yillarda olingan kuzatuvlar orasida bog'liqlik bormi? Yoki ikkala guruhdagi kuzatuvlar mustaqilmi? Tushuntiring.

(b) Ushbu tadqiqot uchun gipotezalarni belgilar va so'zlarda yozing.

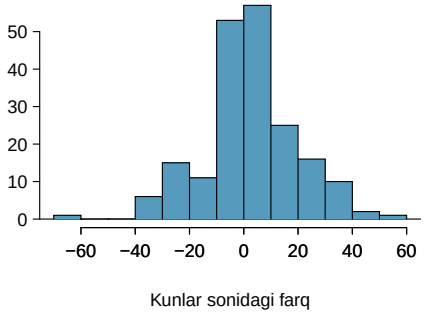
(c) Ushbu testni bajarish uchun zarur bo'lgan shartlarni tekshiring. Farqlarning gistogrammasi o'ngda keltirilgan.

(d) Test statistikasi va p-qiymatini hisoblang.

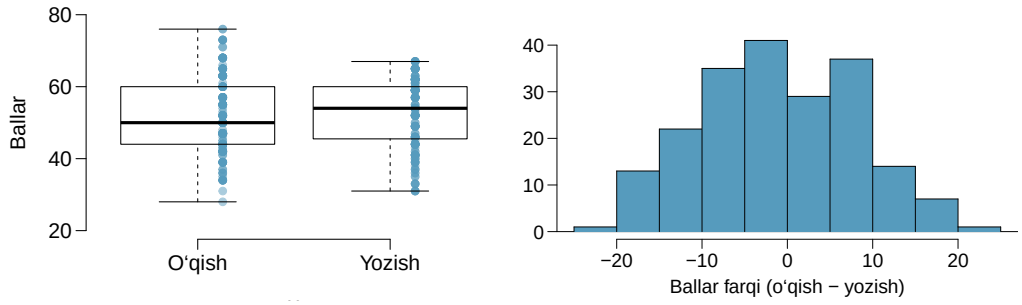
(e) $\alpha = 0.05$ yordamida testni baholang va natijalarni masla mazmunidan kelib chiqib izohlang.

(f) Qanday xato turi sodir bo'lgan bo'lishi mumkin? Ushbu xato nimani anglatishini tushuntiring.

(g) Ushbu gipoteza testi natijalariga asoslanib, 1948- va 2018-yillardagi 90°F dan yuqori haroratli kunlar o'rtasidagi o'rtacha farq uchun ishonch intervali 0 ni o'z ichiga olishini kutasizmi? Tushuntiring.



7.20 O'rta maktab va undan keyingi ta'lim, 1-qism. Ta'lim Statistikasi Milliy Markazi o'rta maktab bitiruvchilari bo'yicha so'rov o'tkazib, o'qish, yozish va boshqa fanlar bo'yicha test ma'lumotlarini to'pladi. Quyida ushbu so'rovdan tasodifiy tanlangan 200 nafar talabaning o'qish va yozish bo'yicha natijalarining yonma-yon quti diagrammasi hamda ballar farqining gistogrammasi keltirilgan.



(a) O'qish va yozish bo'yicha o'rtacha ballar orasida aniq farq bormi?

(b) Har bir talabaning o'qish va yozish bo'yicha ballari bir-biridan mustaqilmi?

(c) Quyidagi tadqiqot savoliga mos gipotezalarni yarating: talabalarning o'qish va yozish bo'yicha imtihonlarda o'rtacha natijalarida aniq farq bormi?

(d) Ushbu testni bajarish uchun zarur bo'lgan shartlarni tekshiring.

(e) Ballar farqi uchun kuzatilgan o'rtacha qiymat $\bar{x}_{o'qish-yozish} = -0{,}545$, va farqlarning standart chetlanishi 8,887 ballga teng. Ushbu ma'lumotlar ikki imtihon bo'yicha o'rtacha ballar orasida farq borligini ko'rsatuvchi dalillarni taqdim etadimi?

(f) Qanday xato turi sodir bo'lishi mumkin? Ushbu xato ushbu masala mazmunida nimani anglatishini tushuntiring.

(g) Ushbu gipoteza testi natijalariga asoslanib, o'qish va yozish bo'yicha ballar o'rtasidagi o'rtacha farq uchun ishonch oralig'i 0 ni o'z ichiga olishini kutasizmi? Tushuntiring.

7.21 Global isish, 2-qism. NOAA bazasidan tasodifiy tanlangan 197 joy uchun 1948- va 2018-yillardagi 90°F dan yuqori bo'lgan kunlar sonining o'zgarishini 7.19-mashqda ko'rib chiqdik. Farqlarning o'rtacha qiymati 2,9 kun va standart chetlanishi 17,2 kunni tashkil etadi.

(a) 1948- va 2018-yillardagi 90°F dan yuqori bo'lgan kunlar soni o'rtasidagi o'rtacha farq uchun 90% lik ishonch intervalini hisoblang. Biz siz uchun shartlarni tekshirib chiqdik.

(b) Ushbu ishonch intervalini masala mazmunidan kelib chiqib izohlang.

(c) Ushbu ishonch oralig'i NOAA stansiyalarida 2018-yilda 1948-yilga nisbatan ko'proq 90°F dan yuqori haroratli kunlar bo'lganligini ko'rsatuvchi dalillarni taqdim etadimi? Tushuntiring.

7.22 O'rta maktab va undan keyingi ta'lim, 2-qism. 7.20-mashqda "High School and Beyond Survey" dan tasodifiy tanlangan 200 nafar talabaga tegishli o'qish va yozish bo'yicha ballar farqini ko'rib chiqdik. Farqlar uchun o'rtacha qiymat va standart chetlanish $\bar{x}_{o'qish-yozish} = -0{,}545$ va 8,887 ballni tashkil qiladi.

(a) O'qish va yozish bo'yicha barcha talabalarning o'rtacha ballar farqi uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang.

(b) Ushbu ishonch intervalini masala mazmunida izohlang.
(c) Ushbu ishonch intervali o'rtacha ballar orasida haqiqiy farq mavjudligini ko'rsatuvchi dalillarni taqdim etadimi? Tushuntiring.

7.3 Ikkita o'rtacha qiymatlarning farqi

Ushbu bo'limda biz juft bo'lmagan holatlarda ikki bosh to'plam o'rtacha qiymatlarining farqini $\mu_1 - \mu_2$, ko'rib chiqamiz. Bir tanlanmadagi kabi, biz t-taqsimotdan foydalanish uchun shartlarni aniqlaymiz, farqning nuqtaviy bahosi $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ va yangi standart xatolik formulasini hisoblaymiz. Bu ikki farqdan tashqari, tafsilotlar bitta o'rtacha qiymat uchun usullarga deyarli o'xshaydi.

Ushbu usullarni uchta holatdagi savollarga qo'llaymiz: ildiz hujayralari yurak funksiyasini yaxshilashi mumkinmi, homilador ayollarning chekish odatlari va yangi tug'ilgan chaqaloqlar vazni o'rtasidagi bog'liqlikni o'rganish va imtihonning bir varianti boshqasiga nisbatan statistik jihatidan qiyinroq ekanligini aniqlash. Ushbu bo'lim "Chekuvchi onalardan tug'ilgan chaqaloqlarning o'rtacha vazni chekmaydigan onalardan tug'ilgan chaqaloqlarning o'rtacha vaznidan farq qilishiga ishonchli dalillar bormi?" kabi savollar bilan motivatsiyalanadi

7.3.1 O'rtacha qiymatlar farqi uchun ishonch intervallari

Embryonal ildiz hujayralaridan (EIH) foydalanish infarktdan so'ng yurak funksiyasini yaxshilashga yordam beradimi? 7.11-rasmda EIH ni infarktga uchragan qo'ylarda sinash uchun o'tkazilgan tajriba bo'yicha umumiy statistikalar keltirilgan. Ushbu qo'ylar tasodifiy ravishda EIH yoki nazorat guruhiga ajratilgan va ularning yurak pompalanish quvvatidagi o'zgarishi o'lchangan. 7.12-rasmda ikkita ma'lumotlar to'plamining gistogrammalari ko'rsatilgan. Musbat qiymatlar pompalanish quvvatining oshishini anglatadi, bu esa odatda kuchliroq tiklanishni bildiradi. Bizning maqsadimiz EIH ning nazorat guruhiga nisbatan yurak pompalanish quvvatiga ta'sirini baholash uchun 95% lik ishonch intervalini aniqlashdir.

	n	$\bar{x}$	s
EIH	9	3,50	5,17
nazorat	9	−4,33	2,76

7.11-rasm. Embryonal ildiz hujayralari bo'yicha tadqiqotning umumiy statistikasi.

Yurak pompalanish o'zgarishi o'zgaruvchisining nuqtaviy bahosini topish oson. Bu tanlanma o'rtacha qiymatlar farqi:

$$\bar{x}_{EIH} - \bar{x}_{nazorat} = 3{,}50 - (-4{,}33) = 7{,}83.$$

Farqni t-taqsimot yordamida modellashtirish mumkinligini aniqlash uchun yangi shartlarini tekshirish kerak bo'ladi. Ikki nisbatdagi holatlarda bo'lgani kabi, biz bog'liqsizlikning yanada barqaror versiyasini talab qilamiz. Shunda ikkala guruh ham bog'liqsiz ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shuningdek, har bir guruhda alohida normal taqsimotni tekshiramiz. Bu amalda chetlangan qiymatlarni tekshirishni anglatadi.

O‘RTACHA QIYMATLAR FARQI UCHUN t-TAQSIMOTDAN FOYDALANISH

Agar ikkita o‘rtacha qiymatlar farqining standartlashtirilgan qiymati bilan ishlayotganda, quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsa, t-taqsimotdan xulosa chiqarish uchun foydalanish mumkin:

- *Bog‘liqsizlik, kengaytirilgan.* Ma’lumotlar ikkala guruh ichida va guruhlar orasida bog‘liqsiz bo‘lishi kerak. Masalan, ma’lumotlar bog‘liqsiz tasodifiy tanlovlardan yoki tasodifiy tajribadan olingan bo‘lishi kerak.
- *Normal taqsimot.* Har bir guruh uchun alohida chetlangan qiymatlarni aniqlash qoidalarini tekshirish lozim.

Standart xatolik quyidagicha hisoblanadi:

$$SX = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Erkinlik darajasi uchun rasmiy formula juda murakkab va odatda dasturiy ta’minot yordamida hisoblanadi, shuning uchun dastur mavjud bo‘lmagan hollarda $n_1 - 1$ va $n_2 - 1$ larning kichigidan foydalanishingiz mumkin.

M

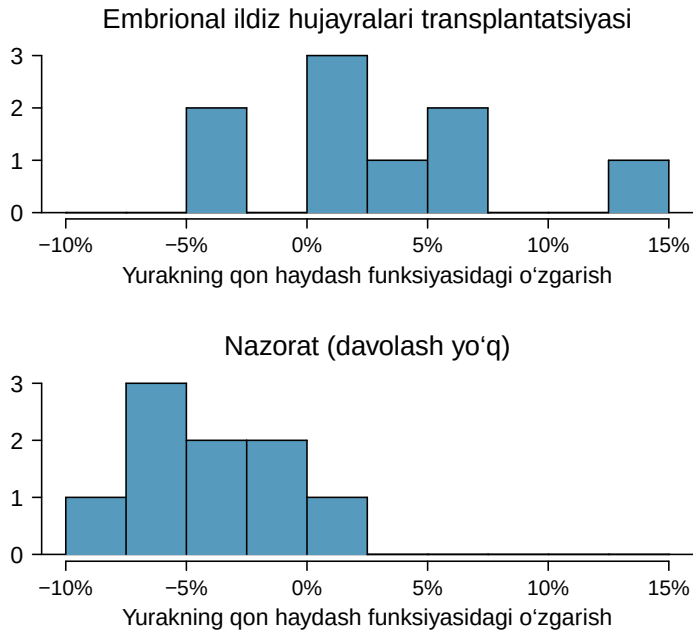
7.21-MISOL

t-taqsimotdan $\bar{x}_{EIT} - \bar{x}_{nazorat} = 7{,}83$ nuqtaviy bahosidan foydalanib xulosa qilishda foydalanish mumkinmi?

Avval bog‘liqsizlikni tekshiramiz. Qo‘ylar guruhlarga tasodifiy ajratilganligi sababli, guruh ichida va guruhlar orasidagi bog‘liqsizlik qoniqarli.

7.12-rasmda har bir guruhda hech qanday aniq chetlangan qiymat mavjud emasligi ko‘rsatilgan. (EIH guruhi biroz ko‘proq o‘zgaruvchanlikka ega ko‘rinadi. Ammo bu aniq chetlangan qiymatlarga ega bo‘lish bilan bir xil emas.)

Ikkala shart bajarilganda, biz tanlanma o‘rtacha qiymatlarining farqini modellashtirish uchun t-taqsimotdan foydalanishimiz mumkin.



7.12-rasm. Embryonal ildiz hujayralari va nazorat guruhlari uchun gistogrammalar.

Yagona tanlanma holatidagi kabi, biz doimo standart xatolikni bosh to‘plam standart chet-

lanishi o'rniga tanlanma standart chetlanish yordamida hisoblaymiz:

$$SX = \sqrt{\frac{s_{eih}^2}{n_{eih}} + \frac{s_{nazorat}^2}{n_{nazorat}}} = \sqrt{\frac{5{,}17^2}{9} + \frac{2{,}76^2}{9}} = 1{,}95.$$

Umuman olganda, biz statistik dasturlardan foydalanib, mos erkinlik darajalarini (ed) aniqlaymiz. Agar dastur mavjud bo'lmasa, biz n_1-1 va n_2-1 larning kichikroq qiymatini erkinlik darajasi sifatida ishlatishimiz mumkin. Masalan, agar t-jadval yordamida quyruq sohalarini aniqlash kerak bo'lsa. Misollar va yo'naltirilgan mashqlarda shaffoflik uchun, biz ed ni aniqlashda ushbu yondashuvni qo'llaymiz. EIH misolida erkinlik darajasi sifatida $ed = 8$ dan foydalanilish mumkin.

7.22-MISOL

EIHlarning yurak infarktidan so'ng qo'ylarning yurak nasos hajmini o'zgartirishiga ta'sirini o'lchash uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang.

Biz avvalgi hisob-kitoblardan tanlanma farqi va standart xatolik qiymatlarini ishlatamiz:

$$\bar{x}_{eih} - \bar{x}_{nazorat} = 7{,}83 \qquad SX = \sqrt{\frac{5{,}17^2}{9} + \frac{2{,}76^2}{9}} = 1{,}95\ .$$

$ed = 8$ ni ishlatgan holda, biz 95% lik ishonch intervali uchun taqribiy $t_8^\star = 2{,}31$ qiymatini aniqlaymiz. Nihoyat, ishonch intervali formulasiga qiymatlarni joylashtiramiz:

$$\text{baholash nuqtasi } \pm\ t^\star \times SX \quad \rightarrow \quad 7{,}83 \ \pm\ 2{,}31 \times 1{,}95 \quad \rightarrow \quad (3{,}32; 12{,}34)$$

Biz 95% lik ishonch bilan aytishimiz mumkinki, embrion ildiz hujayralari yurak infarktidan zarar ko'rgan qo'ylarning yurak nasos funksiyasini 3,32% dan 12,34% gacha yaxshilaydi.

Oldingi statistik xulosalar singari, bu yerda ham belgilangan jarayonlar ketma-ketligi mavjud.

Tayyorlanish. Masala mazmuni uchun muhim ma'lumotlarni yig'ib oling va agar kerak bo'lsa, gipotezalarni aniqlang.

Tekshirish. Kerakli shartlarning yetarlicha bajarilganiga ishonch hosil qiling.

Hisoblash. Standart xatolikni toping, keyin ishonch intervalini tuzing yoki gipoteza sinovini o'tkazishda test statistikasi va p-qiymatini hisoblang.

Xulosa. Natijalarni qo'llanish mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

Batafsil ma'lumotlar bir sharoitdan boshqasiga o'zgaradi, lekin umumiy yondashuv bir xil bo'lib qoladi.

7.3.2 Ikki o'rtacha qiymat farqi uchun gipoteza testlari

`ncbirths` nomli ma'lumotlar to'plami Shimoliy Karolinada bir yil davomida onalar va ularning yangi tug'ilgan chaqaloqlaridan olingan 150 ta tasodifiy holatni ifodalaydi. Ushbu ma'lumotlar to'plamidan to'rtta holat 7.13-rasmda ko'rsatilgan. Biz asosan ikkita `vazn` (weight) va `chekish` (smoke) o'zgaruvchilariga qiziqamiz. `vazn` o'zgaruvchisi chaqaloqlarning vaznlarini, `chekish` esa homiladorlik davrida onaning chekish-chekmasligini ifodalaydi. Bizni qiziqtirgan savol: homiladorlikda chekuvchi onalarning chaqaloqlari o'rtacha tug'ilish vazniga ko'ra chekmaydigan onalarnikidan farq qiladimi? Ushbu savolga javob berish uchun Shimoliy Karolina tanlanmasi ishlatiladi. Chekuvchi onalar guruhi 50 ta holatni, chekmaydiganlar guruhi esa 100 ta holatni o'z ichiga oladi.

7.23-MISOL

Onaning chekish odati va o'rtacha tug'ilish vazni o'rtasida bog'liqlik borligini baholash uchun tegishli gipotezalarni tuzing.

Nolinchi gipoteza guruhlar o'rtasida hech qanday farq yo'qligini ifodalaydi.

H_0: Chekuvchi va chekmaydigan onalarning chaqaloqlari o'rtacha tug'ilish vazni o'rtasida hech qanday farq yo'q. Statistik yozuvda: $\mu_{chm} - \mu_{ch} = 0$, bu yerda μ_{chm} chekmaydigan onalarni, μ_ch esa chekuvchi onalarni ifodalaydi.

	onaning_yoshi	otaning_yoshi	haftalar	vazn	jinsi	chekish
1	ME	13	37	5,00	ayol	chekmaydigan
2	ME	14	36	5,88	ayol	chekmaydigan
3	19	15	41	8,13	erkak	chekuvchi
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
150	45	50	36	9,25	ayol	chekmaydigan

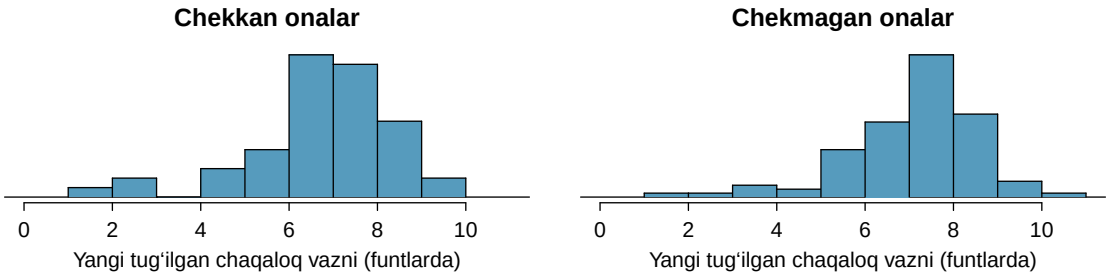
7.13-rasm. `ncbirths` ma’lumotlar to‘plamidan to‘rtta holat. Birinchi o‘zgaruvchining dastlabki ikkita qiymati uchun “ME” ko‘rsatilgan bo‘lib, bu ma’lumotlarning mavjud emasligini bildiradi.

H_A: Chekuvchi va chekmaydigan onalarning chaqaloqlari o‘rtasida o‘rtacha tug‘ilish vazni bo‘yicha ba’zi farqlar mavjud ($\mu_{chm} - \mu_{ch} \neq 0$).

Biz tanlanmalar o‘rtasidagi o‘rtacha qiymatlar farqini t-taqsimotdan foydalanib modellashtirish uchun zarur bo‘lgan ikki shartni tekshiramiz.

- Ma’lumotlar oddiy tasodifiy tanlanma sifatida olinganligi sababli, kuzatuvlar bog‘liqsiz, ham tanlanmalar ichida, ham ularning orasida.
- Har ikkala ma’lumotlar to‘plamida 30 dan ortiq kuzatuv bo‘lgani uchun biz 7.14-rasmda berilgan ma’lumotlarni tekshirib, hech qanday ekstremal qiymatlarni topmadik.

Ikkala shart bajarilganligi sababli, tanlanmalar o‘rtasidagi o‘rtacha qiymatlar farqi t-taqsimot yordamida modellashtirilishi mumkin.



7.14-rasm. Chap panel chekuvchi onalar chaqaloqlarining tug‘ilish vaznlarini ifodalaydi. O‘ng panel esa chekmaydigan onalar chaqaloqlarining tug‘ilish vaznlarini ifodalaydi.

7.24-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

7.15-rasmdagi jamlanma statistika ushbu yo‘natirilgan mashq uchun foydali bo‘lishi mumkin.[13]

(a) Bosh to‘plam farqi uchun nuqta bahosini toping, $\mu_{chm} - \mu_{ch}$.

(b) (a)-qismdan olingan nuqta bahosining standart xatoligini hisoblang.

	`chekuvchi`	`chekmaydigan`
o‘rtacha	6,78	7,18
stand. chetlanish	1,43	1,60
tanlanma hajmi	50	100

7.15-rasm. `ncbirths` ma’lumotlar to‘plamining jamlanma statistikasi.

[13](a) Tanlanma o‘rtacha qiymatlarining farqi nuqtaviy bahosi uchun mos keladi: $\bar{x}_{chm} - \bar{x}_{ch} = 0{,}40$. (b) Bahoning standart xatoligi quyidagi standart xatolik formulasidan foydalanib hisoblanishi mumkin:

$$SX = \sqrt{\frac{\sigma_n^2}{n_n} + \frac{\sigma_s^2}{n_s}} \approx \sqrt{\frac{s_n^2}{n_n} + \frac{s_s^2}{n_s}} = \sqrt{\frac{1{,}60^2}{100} + \frac{1{,}43^2}{50}} = 0{,}26 \ .$$

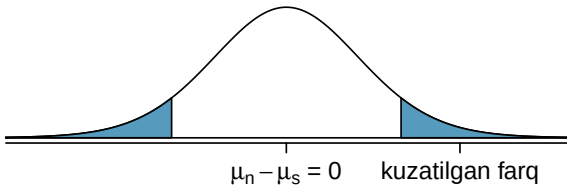
Ⓜ **7.25-MISOL**

7.23-misolda va 7.24-yo'natirilgan mashqda boshlangan gipoteza sinovini yakunlang. $\alpha = 0{,}05$ ahamiyatlilik darajasidan foydalaning. Ma'lumot uchun: $\bar{x}_{chm} - \bar{x}_{ch} = 0{,}40$, $SX = 0{,}26$ va tanlanma hajmlari $n_{chm} = 100$ va $n_{ch} = 50$.

Ushbu sinov uchun statistik qiymatni 7.24-yo'natirilgan mashqdagi qiymatlardan foydalanib hisoblashimiz mumkin:

$$T = \frac{0{,}40 - 0}{0{,}26} = 1{,}54 \ .$$

p-qiymat quyidagi chizmada ko'rsatilgan ikkita soyali quyruqlar bilan ifodalanadi:



Biz dasturdan (yoki Appendix C.2 dagi t-jadvaldan) foydalanib, bitta quyruq sohasini topamiz. Biz $n_{chm} - 1 = 99$ va $n_{ch} - 1 = 49$ kichikroq qiymatidan erkinlik darajasi sifatida foydalanamiz: $ed = 49$. Bir quyruq maydoni 0,065; ushbu qiymatni ikki barobar oshirsak, ikkita quyruq maydoni va p-qiymatni olamiz, 0,135. P-qiymat ahamiyatlilik darajasidan ($\alpha = 0{,}05$) kattaroq, shuning uchun biz nolinchi gipotezani rad eta olmaymiz. Homiladorlik davrida chekuvchi Shimoliy Karolina onalari chaqaloqlarining o'rtacha tug'ilish vazni bilan homiladorlik davrida chekmaydigan onalar chaqaloqlarining o'rtacha tug'ilish vazni o'rtasida farq mavjudligini aytish uchun yetarlicha dalil yo'q.

Ⓨ **7.26-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Ko'p tadqiqotlar homiladorlik davrida chekish zararli ekanligini ko'rsatgan, shunday bo'lsa-da, nima uchun biz 7.25-misolda nolinchi gipotezani rad eta olmadik?[14]

Ⓨ **7.27-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Agar biz II turdagi xatoga yo'l qo'ygan bo'lsak va farq mavjud bo'lsa, farqni aniqlash ehtimolini oshirish uchun ma'lumotlarni yig'ishda boshqacha qanday yondashuvni qo'llashimiz mumkin edi?[15]

Jamoat xizmatiga oid e'lon: biz bu kichik ma'lumotlar to'plamini misol sifatida ishlatgan bo'lsak-da, kattaroq ma'lumotlar to'plami homiladorlik davrida chekuvchi onalarning chaqaloqlari kichikroq vaznga ega ekanligini ko'rsatadi. Haqiqatda, tamaki sanoati vakillari bu faktni hattoki *foyda* sifatida targ'ib qilishgan:

> *Bu rost. Chekuvchi ayollardan tug'ilgan chaqaloqlar kichikroq, lekin ular chekmaydigan ayollardan tug'ilgan chaqaloqlar kabi sog'lom. Ba'zi ayollar kichikroq chaqaloqlarga ega bo'lishni afzal ko'rishi mumkin.*
>
> - Jozef Kallman, Philip Morris kompaniyasi direktorlar kengashi raisi,
> CBS telekanalining "Face the Nation" dasturida, 1971-yil 3-yanvar.

Faktlarni tekshirish: chekuvchi ayollardan tug'ilgan chaqaloqlar, aslida, chekmaydigan ayollardan tug'ilgan chaqaloqlar kabi sog'lom emas.[16]

---

[14] Farq mavjud bo'lishi mumkin, lekin biz uni aniqlay olmadik. Agar farq mavjud bo'lsa, biz II turdagi xatoga yo'l qo'yganmiz.

[15] Biz ko'proq ma'lumot to'plashimiz mumkin edi. Tanlanma hajmi kattaroq bo'lsa, farq mavjud bo'lsa uni aniqlash imkoniyati oshadi. Aslida, katta ma'lumotlar to'plamida aynan shunday natijani kuzatamiz!

[16] Tamaki sanoatining bugungi kundagi qonunbuzarliklari bilan tanishish uchun John Oliverning *Last Week Tonight* ko'rsatuvidan bir epizodni tomosha qilishingiz mumkin. Iltimos, e'tibor bering. Unda kattalar uchun mo'ljallangan ayrim so'zlar (nojo'ya iboralar) mavjud: youtu.be/6UsHHOCH4q8.

7.3.3 Amaliy misol: kurs imtihonining ikki xil varianti

O‘qituvchi bir xil imtihonning biroz farq qiladigan ikki variantini o‘tkazishga qaror qildi. Imtihonlarni tarqatishdan oldin ularni aralashtirib, har bir talaba imtihonning tasodifiy variantini olishini ta’minladi. Talabalarning ushbu ikki imtihondagi natijalari bo‘yicha jamlanma statistik ko‘rsatkichlar 7.16-rasmda keltirilgan. B variantni topshirgan talabalardan e’tirozlar bo‘lishini kutgan holda, u kuzatilgan guruhlar orasidagi farq shunchalik katta-yo‘qligini, ya’ni o‘rtacha hisobda B varianti A variantiga qaraganda murakkabroq bo‘lganini ishonchli tarzda ko‘rsatadimi-yo‘qligini baholamoqchi.

Variant	n	$\bar{x}$	s	min	maks
A	30	79,4	14	45	100
B	27	74,1	20	32	100

7.16-rasm. Har bir imtihon varianti uchun jamlanma statistikalar.

7.28-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Tanlanma o‘rtacha qiymatlari farqi $\bar{x}_A - \bar{x}_B = 5{,}3$ tasodif tufayli yuzaga kelganmi yoki yo‘qligini baholash uchun gipotezalarni tuzing. Biz ushbu gipotezalarni $\alpha = 0{,}01$ darajasida baholaymiz.[17]

7.29-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

7.28-yo‘natirilgan mashqda gipotezalarni t-taqsimot yordamida baholash uchun shartlarni tasdiqlang.[18]

(a) Natijalar bog‘liqsiz bo‘lishi mantiqiymi?

(b) Chetlangan qiymatlar bo‘yicha biror tashvish bormi?

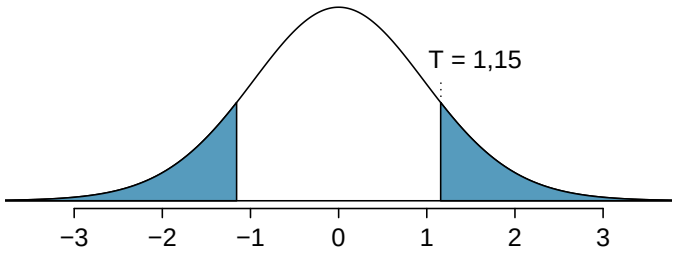
Har bir tanlanmaga oid shartlarni tasdiqlagandan so‘ng va tanlanmalarning bir-biriga bog‘liqsiz ekanligini tasdiqlagach, biz t-taqsimotdan foydalanib test o‘tkazishga tayyormiz. Ushbu holatda, biz tanlanma ma’lumotlaridan foydalanib haqiqiy o‘rtacha natijalar farqini baholayapmiz, shuning uchun nuqtaviy baho $\bar{x}_A - \bar{x}_B = 5{,}3$. Bahoning standart xatoligi quyidagicha hisoblanadi:

$$SX = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} = \sqrt{\frac{14^2}{30} + \frac{20^2}{27}} = 4{,}62 \ .$$

Nihoyat, test statistikasi quyidagicha tuziladi:

$$T = \frac{\text{nuqtaviy baho} - \text{nolinchi qiymat}}{SX} = \frac{(79{,}4 - 74{,}1) - 0}{4{,}62} = 1{,}15.$$

Agar kompyuter mavjud bo‘lsa, biz erkinlik darajasi 45,97 ekanligini aniqlaymiz. Aks holda, biz $n_1 - 1$ va $n_2 - 1$ larning kichikroq qiymatidan foydalanamiz: $ed = 26$.



7.17-rasm. 26 erkinlik darajasiga ega t-taqsimot va imtihon misolidagi p-qiymat soyali maydon sifatida ifodalangan.

[17] H_0: imtihonlar o‘rtacha teng qiyinlikda. $\mu_A - \mu_B = 0$. H_A: imtihonlardan biri boshqasiga nisbatan o‘rtacha hisobda qiyinroq. $\mu_A - \mu_B \neq 0$.

[18] (a) Imtihonlar aralashtirilganligi sababli, ushbu holatda ”davolash” tasodifiy tayinlangan, shuning uchun guruhlar ichida va o‘rtasida bog‘liqsizlik ta’minlanadi. (b) Statistik xulosa ma’lumotlarning o‘rtacha qiymatga nisbatan simmetrik ekanini ko‘rsatadi va minimal/maksimal qiymatlar tashvishli chetlanishlarni bildirmaydi.

7.30-MISOL

7.17-rasmda ko'rsatilgan p-qiymatni $ed = 26$ yordamida aniqlang va tadqiqot misoli mazmunidan kelib chiqib xulosa bering.

Dasturiy ta'minot yordamida biz bitta quyruq maydonini (0,13) ekanligini topishimiz va ushbu qiymatni ikki barobar oshirishimiz mumkin. Bu p-qiymat 0,26 ga teng. (Yoki biz Appendix C.2 dagi t-jadvaldan foydalanishimiz mumkin.) 7.28-yo'natirilgan mashqda biz $\alpha = 0{,}01$ darajasidan foydalanishni belgiladik. p-qiymat α dan kattaroq bo'lganligi sababli, biz nolinchi gipotezani rad eta olmaymiz. Ya'ni, ma'lumotlar imtihon variantlaridan birining boshqasiga nisbatan murakkabroq ekanini ishonchli tarzda ko'rsatmaydi. Shuning uchun o'qituvchi B varianti bo'yicha imtihon natijalariga qo'shimcha ball berish zarurligiga davat qilinmasligi kerak.

7.3.4 Qo'shma standart chetlanish bahosi (maxsus mavzu)

Ba'zan, ikki bosh to'plam standart chetlanishlari shunchalik o'xshash bo'ladiki, ularni bir xil deb hisoblash mumkin. Masalan, tarixiy ma'lumotlar yoki yaxshi tushunilgan biologik mexanizm ushbu kuchli farazni asoslaydi. Bunday holatlarda, biz t-taqsimot yondashuvini biroz aniqroq qilishimiz mumkin, buning uchun qo'shma standart og'ishdan foydalanamiz.

Ikki guruh uchun **qo'shma standart chetlanish** bu har ikkala tanlanma ma'lumotlaridan foydalanib standart chetlanish va standart xatolikni yaxshiroq baholash usulidir. Agar s_1 va s_2 1- va 2-guruhlar uchun standart chetlanishlari bo'lsa va bosh to'plam standart chetlanishlari teng ekaniga ishonish uchun juda yaxshi sabablar mavjud bo'lsa, u holda ularning dispersiyalarini quyidagicha umumlashtirish orqali yaxshiroq baholash mumkin:

$$s^2_{qo'shma} = \frac{s_1^2 \times (n_1 - 1) + s_2^2 \times (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}$$

bu yerda n_1 va n_2 tanlanma hajmlari avvalgidek. Ushbu yangi statistikadan foydalanish uchun, biz standart xatolik formulasida s_1^2 va s_2^2 o'rniga $s^2_{qo'shma}$ ni qo'llaymiz va erkinlik darajalari uchun yangilangan formuladan foydalanamiz:

$$ed = n_1 + n_2 - 2 \ .$$

Qo'shma standart chetlanishdan foydalanishning afzalliklari shundaki, har bir guruh uchun standart chetlanishni yaxshiroq baholashga va t-taqsimot uchun kattaroq erkinlik darajasiga ega bo'lishga imkon beradi. Agar ikki guruh standart chetlanishlari haqiqatda teng bo'lsa, ushbu o'zgarishlar $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ ning tanlanma taqsimotini aniqroq modellashtirish imkonini beradi.

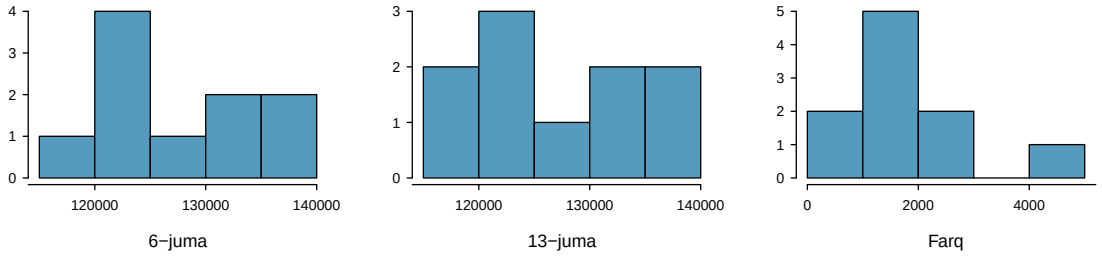
QO'SHMA STANDART CHETLANISHDAN FAQAT EHTIYOTKORLIK BILAN FOYDALANING

Qo'shma standart og'ishdan faqatgina tadqiqotlari osti tajribalari bosh to'plamlarning standart og'ishlari deyarli teng ekanini ko'rsatgandagina foydalanish maqsadga muvofiqdir. Tanlanma hajmi katta bo'lib, bu shartni ma'lumotlar asosida yetarli darajada tekshirish mumkin bo'lgan hollarda, standart og'ishlarni qo'shib hisoblashning afzalliklari sezilarli darajada kamayadi.

Mashqlar

7.23 13-juma, 1-qism. 1990-yillarning boshida Buyuk Britaniyada tadqiqotchilar 13-jumada va undan oldingi 6-jumada avtomobil oqimi, xaridorlar soni va yo'l-transport hodisalari tufayli shoshilinch yordamga murojaat qilish holatlari bo'yicha ma'lumotlarni to'plashdi. Quyidagi gistogrammalarda 6- va 13-jumada ma'lum bir chorrahadan o'tgan avtomobillar sonining taqsimoti ko'rsatilgan. Shuningdek, tanlanma statistikalar berilgan bo'lib, bu yerda farq 6-sana va 13-sana kunlarida o'tgan avtomobillar soni orasidagi farqni bildiradi.[19]

[19] T.J. Scanlon et al. "Is Friday the 13th Bad For Your Health?" In: *BMJ* 307 (1993), pp. 1584–1586.



	6-sana	13-sana	Farq
$\bar{x}$	128385	126550	1835
s	7259	7664	1176
n	10	10	10

(a) Ushbu ma’lumotlarni tahlil qilishda hisobga olinishi kerak bo‘lgan ichki tuzilmalar bormi? Tushuntiring.

(b) 6-jumada ko‘chada bo‘lgan odamlar soni 13-jumadagidan farqli ekanligini baholash uchun qanday gipotezalar kiritiladi?

(c) (b) qismdagi gipoteza testini o‘tkazish uchun shartlarni tekshiring.

(d) Test statistikasi va p-qiymatini hisoblang.

(e) Gipoteza testi natijasi qanday?

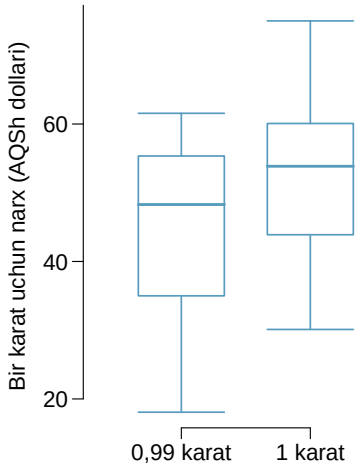
(f) Ushbu masala mazmunidan kelib chiqib p-qiymatni izohlang.

(g) Test natijasida qanday xato turi qilingan bo‘lishi mumkin? Tushuntiring.

7.24 Olmoslar, 1-qism. Olmos narxlari “4C” deb nomlangan omillar bilan belgilanadi: kesim, tiniqlik, rang va karat vazni. Olmos narxlari karat vazni oshgani sayin ortadi, ammo bu o‘sish doimiy emas. Masalan, 0,99 karatlik olmos va 1 karatlik olmos o‘lchamlari oddiy inson ko‘zi bilan farqlanmaydi, lekin 1 karatlik olmos narxi odatda 0,99 karatlik olmos narxidan ancha yuqori bo‘ladi. Ushbu savolda biz 0,99 va 1 karatlik olmoslarning ikkita tasodifiy tanlanmalarini ko‘rib chiqamiz, har bir tanlanmada 23 ta olmos bor va olmoslarning o‘rtacha narxlarini solishtiramiz. Teng birliklarda solishtirish uchun dastlab har bir olmos narxini uning karatdagi og‘irligini 100 ga ko‘paytirilganiga bo‘lamiz. Masalan, 0,99 karatlik olmos uchun narxini 99 ga bo‘lamiz, 1 karatlik olmos uchun esa narxni 100 ga bo‘lamiz. Quyida taqsimotlar va ba’zi tanlanma statistikalar keltirilgan.[20]

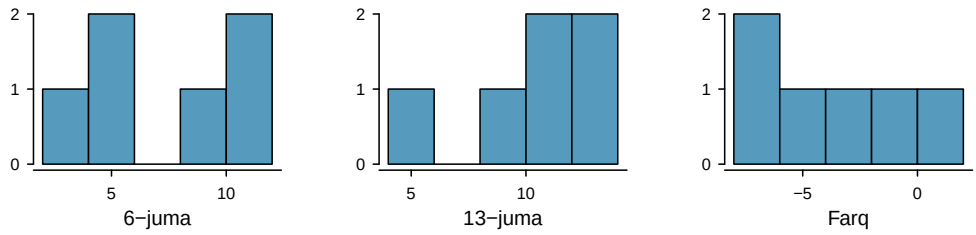
0,99 va 1 karatlik olmoslarning o‘rtacha standartlashtirilgan narxlari orasida farq bor-yo‘qligini baholash uchun gipoteza testini o‘tkazing. Gipotezalarni aniq bayon qiling, tegishli shartlarni tekshiring va natijalarni ma’lumot mazmunidan kelib chiqib izohlang.

	0,99 karat	1 karat
O‘rtacha	$44,51	$56,81
SCh	$13,32	$16,13
n	23	23



7.25 13-juma, 2-qism. 7.23-mashqda ko‘rsatilgan 13-jumaga oid tadqiqotda, shuningdek, yo‘l-transport hodisalari tufayli shoshilinch yordamga murojaat qilish holatlari bo‘yicha ma’lumotlar berilgan. Quyida 6- va 13-jumalardagi bu sonlarning taqsimotlari va statistik xulosalari keltirilgan. Ushbu ma’lumotlar uchun xulosa shartlari bajarilgan deb hisoblash mumkin.

[20] H. Wickham. *ggplot2: elegant graphics for data analysis*. Springer New York, 2009.



	6-juma	13-juma	Farq
O‘rtacha	7,5	10,83	−3,33
SCh	3,33	3,6	3,01
n	6	6	6

(a) 6- va 13-jumalardagi yo‘l-transport hodisalari tufayli shoshilinch yordamga murojaat qilishning o‘rtacha sonlari orasida farq bor-yo‘qligini baholash uchun gipoteza testini o‘tkazing.

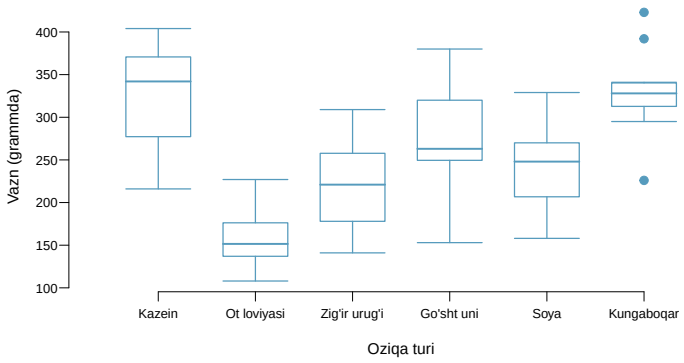
(b) 6- va 13-jumalarda shoshilinch yordamga murojaat qilish o‘rtacha sonlari orasidagi farq uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang.

(c) Asl tadqiqotda quyidagicha xulosa chiqarilgan: “13-juma ayrimlar uchun omadli emas. Transport hodisasi natijasida shifoxonaga yotqizilish xavfi 52% ga oshishi mumkin. Uyda qolish tavsiya etiladi.” Ushbu bayonotga qo‘shilasizmi? Izohlang.

7.26 Olmoslar, 2-qism. 7.24-mashqda 0,99 va 1 karatlik olmoslarning (vazn bilan standartlashtirilgan) narxlari muhokama qilindi. Quyidagi jadvalda statistik xulosalar keltirilgan va sizdan 0,99 va 1 karatlik olmoslarning standartlashtirilgan o‘rtacha narxlari orasidagi farq uchun 95% lik ishonch intervalini tuzishingiz so‘raladi. Ushbu ma'lumotlar uchun xulosa chiqarish shartlari bajarilgan deb hisoblash mumkin.

	0,99 karat	1 karat
O‘rtacha	$44,51	$56,81
SCh	$13,32	$16,13
n	23	23

7.27 Jo‘ja yemi va vazni, 1-qism. Jo‘ja boqish milliard dollarlik sanoat bo‘lib, yosh jo‘jalar o‘sish sur'atini oshirishga qaratilgan har qanday usullar iste'mol xarajatlarini kamaytirib, kompaniya foydasini millionlab dollar oshirishi mumkin. Jo‘jalar o‘sish sur'atiga turli yem qo‘shimchalarining samaradorligini o‘lchash va taqqoslash uchun eksperiment o‘tkazildi. Yangi tuxumdan chiqqan jo‘jalar tasodifiy tarzda olti guruhga bo‘linib, har bir guruhga turli yem qo‘shimchalari berildi. Quyida ushbu ma'lumotlar to‘plamidan ba'zi statistik xulosalar va yem turi bo‘yicha jo‘jalar vazni taqsimotini ko‘rsatuvchi qutili diagrammalari keltirilgan.[21]



	O‘rtacha	SCh	n
kazein	323,58	64,43	12
ot loviyasi	160,20	38,63	10
zig‘ir urug‘i	218,75	52,24	12
go‘sht uni	276,91	64,90	11
soya	246,43	54,13	14
kungaboqar	328,92	48,84	12

(a) Zig‘ir urug‘i va ot loviyasi bilan boqilgan jo‘jalarning vazn taqsimotlarini tasvirlab bering.

(b) Ushbu ma'lumotlar zig‘ir urug‘i va ot loviyasi bilan boqilgan jo‘jalarning o‘rtacha vaznlari har xil ekanligi haqida kuchli dalillar beradimi? 5% ahamiyat darajasidan foydalaning.

(c) Qanday xato turi qilingan bo‘lishi mumkin? Izohlang.

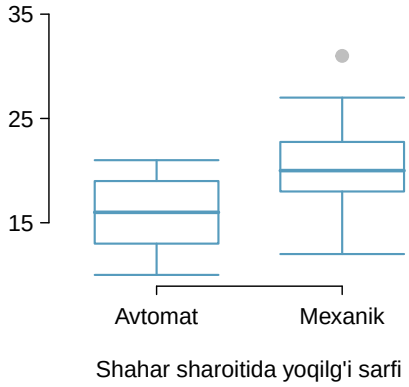
(d) Agar $\alpha = 0{,}01$ dan foydalansak, sizning xulosangiz o‘zgaradimi?

7.28 Mexanik va avtomatik uzatmali qutilarga ega avtomobillarning yonilg‘i samaradorligi, 1-qism. AQShning Atrof-muhitni muhofaza qilish agentligi (EPA) har yili ushbu yilda ishlab chiqarilgan avtomobillarning yonilg‘i samaradorligi bo‘yicha ma'lumotlarni e'lon qiladi. Quyida mexanik va avtomatik uzatmalar

[21] Chicken Weights by Feed Type, from the `datasets` package in R..

qutisiga ega avtomobillarning shahar sharoitida yonilg‘i samaradorligi (mil/gallon) bo‘yicha tasodifiy tanlangan tanlanmalarning statistik xulosalari keltirilgan. Ushbu ma’lumotlar mexanik va avtomatik uzatmalar qutilariga ega avtomobillarning o‘rtacha yonilg‘i samaradorligi orasidagi farq haqida kuchli dalillar beradimi? Xulosa chiqarish uchun zarur bo‘lgan shartlar bajarilgan deb hisoblang.[22]

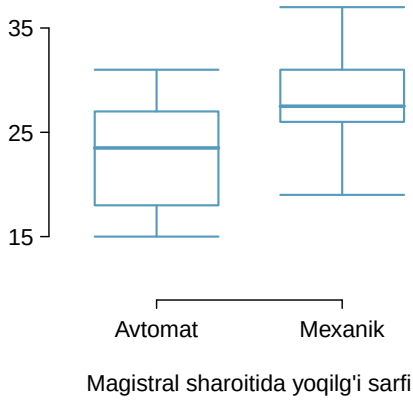
	Shahar sharoitida yoqilg‘i sarfi	
	Avtomatik	Mexanik
O‘rtacha	16,12	19,85
SCh	3,58	4,51
n	26	26



7.29 Jo‘ja yemi va vazni, 2-qism. Kazein odamlarda vaznni oshirish uchun keng tarqalgan qo‘shimcha hisoblanadi. Bu jo‘jalarga ham ta’sir qiladimi? 7.27-mashqda berilgan ma’lumotlardan foydalanib, kazein bilan boqilgan jo‘jalarning o‘rtacha vazni soya bilan boqilgan jo‘jalarning o‘rtacha vaznidan farq qilishi haqidagi gipotezani tekshiring. Agar gipoteza testi statistik jihatdan ahamiyatli natija bersa, jo‘jalarning yuqori o‘rtacha vazni kazein dietasi bilan bog‘liqmi yoki yo‘qligini muhokama qiling. Xulosa chiqarish uchun shartlar bajarilgan deb hisoblang.

7.30 Mexanik va avtomatik uzatmalar qutilariga ega avtomobillarning yonilg‘i samaradorligi, 2-qism. Quyidagi jadval 7.28-mashqdagi 52 avtomobilning avtomagistral yonilg‘i samaradorligi bo‘yicha statistik xulosalarini beradi. Ushbu statistikadan foydalanib, mexanik va avtomatik uzatmalar qutilariga ega avtomobillarning avtomagistral yonilg‘i samaradorligidagi o‘rtacha farq uchun 98% lik ishonch intervalini hisoblang va ushbu intervalni ma’lumot mazmunidan kelib chiqib izohlang.[23]

	Magistral sharoitida yoqilg‘i sarfi	
	Avtomatik	Mexanik
O‘rtacha	22,92	27,88
SCh	5,29	5,01
n	26	26



7.31 Qamoqdagi izolyatsiya eksperimenti, 1-qism.

Shimoliy Karolina shtatining Raleigh shahridagi markaziy qamoqxona mahbuslari “izolyatsiya” tajribasida ishtirok etish uchun ko‘ngilli bo‘lishdi. Eksperimentning maqsadi ishtirokchilarning psixopatik buzilgan shaxs T-ballini kamaytiruvchi muolajani aniqlash edi. Ushbu ko‘rsatkich insonning nazoratga ehtiyoji yoki nazoratga qarshi isyonini o‘lchaydi va Minnesota Ko‘p yo‘nalishli shaxsiyat inventarizatsiyasi testi deb nomlanuvchi keng qo‘llaniladigan ruhiy salomatlik testining bir qismidir. Eksperimentda uchta muolaja/tarjiba guruhi mavjud edi:

(1) To‘rt soatlik hissiy cheklov “kasbiy yordam mavjud” degan terapevtik tavsiyalarni o‘z ichiga olgan 15 daqiqalik tasma.

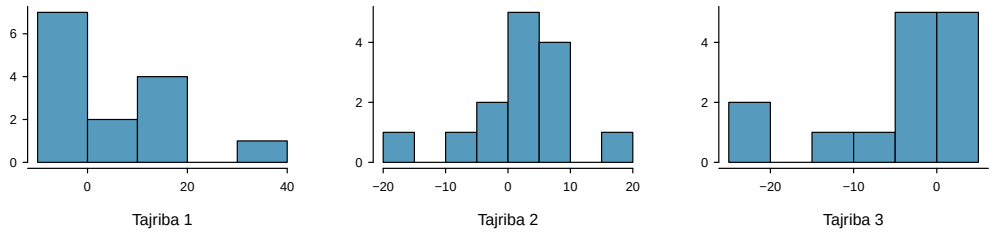
(2) To‘rt soatlik hissiy cheklov va ov itlarini o‘rgatish haqidagi “emotsional jihatdan neytral” tasma.

(3) To‘rt soatlik hissiy cheklov va hech qanday tasma yo‘q.

Qirq ikki ishtirokchi tasodifiy tarzda ushbu muolaja/tarjiba guruhlariga taqsimlandi va davolanishdan oldin va keyin test o‘tkazildi. Davolanishdan oldingi va keyingi natijalar o‘rtasidagi farqning taqsimoti quyida

[22] U.S. Department of Energy, Fuel Economy Data, 2012 Datafile.
[23] U.S. Department of Energy, Fuel Economy Data, 2012 Datafile.

ko'rsatilgan, shuningdek, tanlanma statistikalar keltirilgan. Har bir muolajani alohida samaradorligini mustaqil sinab ko'ring. Gipotezalarni aniq bayon qiling, shartlarni tekshiring va natijalarni ma'lumotlar mazmunidan kelib chiqib izohlang.[24]



	Tarjiba 1	Tarjiba 2	Tarjiba 3
O'rtacha	6,21	2,86	−3,21
SD	12,3	7,94	8,57
n	14	14	14

7.32 To'g'ri / noto'g'ri: o'rtachalarni taqqoslash. Quyidagi bayonotlarning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini aniqlang va noto'g'ri deb belgilangan bayonotlar uchun izoh bering.

(a) Agar ikkita tanlanmani taqqoslashda $n_1 = 20$ va $n_2 = 40$ bo'lsa, biz o'rtachalar farqi uchun normal modeldan foydalanishimiz mumkin, chunki $n_2 \geq 30$.

(b) Erkinlik darajasi oshgani sayin, t-taqsimot normal taqsimotga yaqinlashadi.

(c) Guruhlarning tanlanma o'lchamlari bir xil bo'lganda, o'rtachalar farqi uchun standart xatolikni hisoblashda qo'shma standart xatolikdan foydalanamiz.

7.4 O'rtacha qiymatlar farqi uchun quvvatni hisoblash

Ko'pincha tajriba rejalashtirishda ikki qarama-qarshi omil bo'ladi:

- Muhim ta'sirlarni aniqlay olishimiz uchun yetarlicha ma'lumot yig'ishni istaymiz.
- Ma'lumot yig'ish qimmatga tushishi mumkin va odamlarga oid tajribalar bo'lsa, bemorlar uchun xavf tug'ilishi mumkin.

Ushbu bo'limda biz klinik sinovlar bilan ishlashga e'tibor qaratamiz. Klinik sinov bu odamlar ishtirok etadigan sog'liq bilan bog'liq tajriba bo'lib, unda biz amaliy jihatdan muhim ta'sirlarni 80% lik ishonch bilan aniqlay olishimiz uchun mos tanlanma hajmini belgilaymiz.[25]

7.4.1 Sinov jarayonlarini tushunish

Gipotezalarni sinovdan o'tkazish jarayonlarini ko'rib chiqamiz. Bu bizga tadqiqot uchun mos tanlanma hajmini belgilash uchun hisob-kitoblar doirasini aniqlashda yordam beradi.

M **7.31-MISOL**

Faraz qilaylik, farmatsevtika kompaniyasi qon bosimini pasaytiruvchi yangi dori ishlab chiqdi va dorining samaradorligini sinovdan o'tkazish uchun klinik sinovga tayyorgarlik ko'rmoqda. Ular ma'lum standart qon bosimi dorisini qabul qilayotgan bemorlarni jalb qilishadi. Nazorat guruhi bemorlari o'zlarining joriy dorilarini ko'rinishi o'xshash bo'lgan kapsulalar shaklida davom ettiradilar, bu esa tajribani ko'r shaklida bo'lishni ta'minlaydi. Ushbu mazmundan kelib chiqib ikki tomonlama gipoteza testi uchun gipotezalarni yozing.

Odatda klinik sinovlar ikki tomonlama muqobil gipotezadan foydalanadi, shuning uchun bu mazmun uchun mos gipotezalar quyida keltirilgan:

[24] Prison isolation experiment, stat.duke.edu/resources/datasets/prison-isolation.

[25] Garchi bu yerda aniq ko'rib chiqilmasa ham, o'xshash tanlanma hajmini rejalashtirish kuzatuv tadqiqotlari uchun ham foydalidir.

H_0: Yangi dori standart dori bilan aynan bir xil ta’sirga ega.
$\mu_{davolash} - \mu_{nazorat} = 0$.

H_A: Yangi dori standart doridan farqli natijaga ega.
$\mu_{davolash} - \mu_{nazorat} \neq 0$.

7.32-MISOL

Tadqiqotchilar sistolik qon bosimi 140 mmHg va 180 mmHg intervalidagi bemorlar ustida klinik sinov o‘tkazmoqchi. Oldingi nashr qilingan tadqiqotlar bemorlarning qon bosimi standart chetlanishi taxminan 12 mmHg bo‘lishini va bemorlar qon bosimi taqsimoti taxminan simmetrik bo‘lishini ko‘rsatgan deb faraz qilamiz.[26] Agar har bir guruhda 100 ta bemor bo‘lsa, $\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat}$ uchun taxminiy standart xatolik qanday bo‘ladi?

Standart xatolik quyidagicha hisoblanadi:

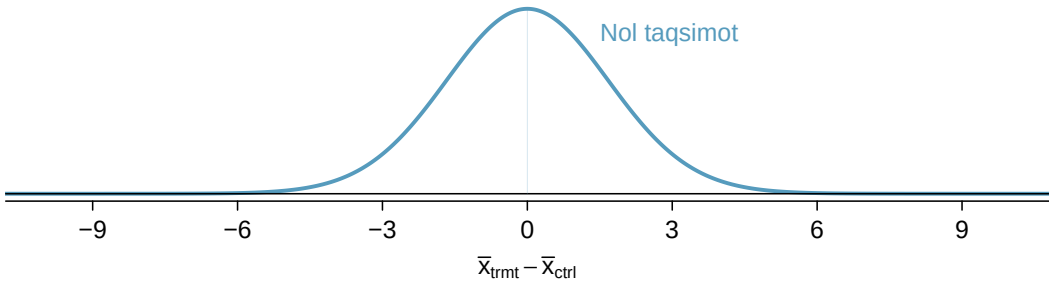
$$SX_{\bar{x}_{davolash}-\bar{x}_{nazorat}} = \sqrt{\frac{s^2_{davolash}}{n_{davolash}} + \frac{s^2_{nazorat}}{n_{nazorat}}} = \sqrt{\frac{12^2}{100} + \frac{12^2}{100}} = 1{,}70 \ .$$

Bu $SX_{\bar{x}_{davolash}-\bar{x}_{nazorat}}$ ning mukammal bo‘lmagan bahosi bo‘lishi mumkin, chunki biz ishlatgan standart chetlanish bahosi ushbu bemorlar guruhi uchun mukammal mos kelmasligi mumkin. Ammo bu bizning maqsadlarimiz uchun yetarli.

7.33-MISOL

$\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat}$ ning nolinchi taqsimoti qanday ko‘rinishga ega?

Erkinlik darajasi 30 dan kattaroq bo‘lgani uchun, $\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat}$ taqsimoti taxminan normal bo‘ladi. Ushbu taqsimotning standart chetlanishi (standart xatolik) taxminan 1,70 bo‘ladi va nolinchi gipoteza ostida uning o‘rtacha qiymati 0 ga teng bo‘ladi.



7.34-MISOL

$\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat}$ ning qanday qiymatlari uchun biz nolinchi gipotezani rad etamiz?

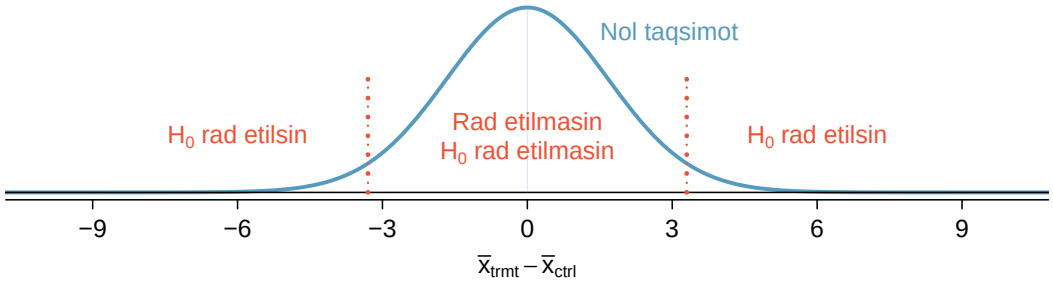
$\alpha = 0{,}05$ uchun biz H_0 ni rad etamiz, agar farq quyi 2,5% yoki yuqori 2,5% quyruqda bo‘lsa:

Quyi 2,5%: Normal model uchun bu 1,96 standart xatolik noldan past bo‘lgan qiymatdir, shuning uchun har qanday farq $-1{,}96 \times 1{,}70 = -3{,}332$ mmHg dan kichikroq bo‘lsa.

Yuqori 2,5%: Normal model uchun bu 1,96 standart xatolik noldan yuqori bo‘lgan qiymatdir, shuning uchun har qanday farq $1{,}96 \times 1{,}70 = 3{,}332$ mmHg dan kattaroq bo‘lsa.

Ushbu **rad etish sohalari**ning chegaralari quyida ko‘rsatilgan:

[26] Ushbu tadqiqotda, odatda, biz har bir bemorning qon bosimini tadqiqot boshida va oxirida o‘lchaymiz, so‘ngra tadqiqot uchun natija o‘lchovi sifatida qon bosimidagi o‘rtacha o‘zgarishni ishlatamiz. Ya’ni, $\mu_{davolash}$ va $\mu_{nazorat}$ ikkisi ham o‘rtacha o‘zgarishlarni ifodalaydi. Bu ikki tanlanma juft sinov tuzilmasiga o‘xshaydi va biz uni aynan o‘rtacha o‘zgarishlar farqi uchun gipoteza testi kabi tahlil qilamiz. Bu yerda o‘tkazayotgan hisob-kitoblarimizda biz bemorning qon bosimi o‘zgarishining 12 mmHg ekanligini faraz qilamiz.



Keyingi qadamda, muqobil gipoteza haqiqatda to'g'ri bo'lsa, nolinchi gipoteza rad etilishi ehtimolini topishning ba'zi faraziy hisob-kitoblarini amalga oshiramiz.

7.4.2 Ikki tanlanma testi uchun quvvatni hisoblash

Tadqiqotni rejalashtirayotganda bizga muhim bo'lgan ta'sirni qanchalik ehtimol bilan aniqlashimiz mumkinligini bilishni xohlaymiz. Boshqacha qilib aytganda, agar haqiqiy ta'sir mavjud bo'lsa va bu ta'sir amaliy qiymatga ega bo'lsa, biz ushbu ta'sirni aniqlashimiz ehtimoli qanday? Ushbu ehtimol **quvvat** deb ataladi. Biz uni turli tanlanma hajmlari yoki turli *ta'sir o'lchamlari* uchun hisoblashimiz mumkin.

Avval amaliy jihatdan ahamiyatli natija nima ekanligini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, kompaniya tadqiqotchilari standart doriga nisbatan qon bosimida 3 mmHg yoki undan katta har qanday ta'sirni aniqlashni xohlashadi. Bu yerda 3 mmHg qiziqish uchun minimal **ta'sir o'lchami**, va biz ushbu o'lchamdagi ta'sirni tadqiqotda aniqlash ehtimolini bilishni xohlaymiz.

M

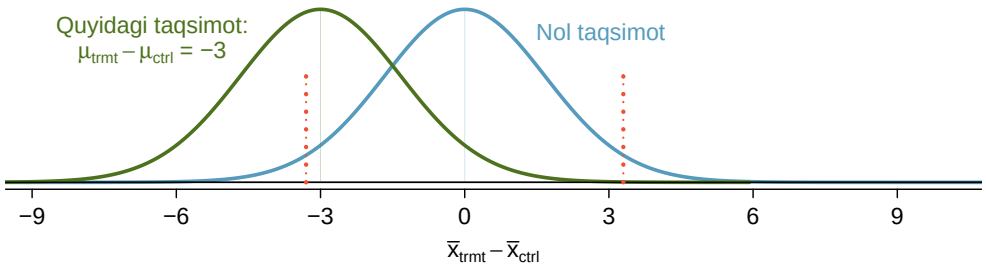
7.35-MISOL

Faraz qilaylik, biz har bir davolash guruhi uchun 100 ta bemor bilan davom etishga qaror qildik va yangi dori qon bosimini standart doriga nisbatan qo'shimcha 3 mmHg ga pasaytiradi. Biz pasayishni aniqlash ehtimolini qanday hisoblaymiz?

Hisob-kitoblarni boshlashdan oldin, agar $\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat} = -3$ mmHg bo'lsa, H_0 ni rad etish uchun yetarli dalil bo'lmasligini sezish kerak. Bu yaxshi belgi emas.

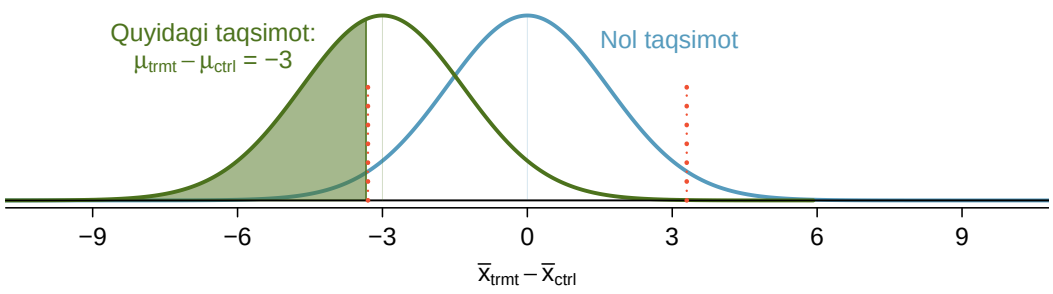
H_0 ni rad etish ehtimolini hisoblash uchun quyidagilarni aniqlashimiz kerak:

- Haqiqiy farq -3 mmHg bo'lganda $\bar{x}_{davolash} - \bar{x}_{nazorat}$ uchun tanlanma taqsimoti. Bu nolinchi taqsimotga o'xshaydi, lekin u chapga 3 ga siljigan:



- Yuqoridagi nuqtali chiziqlar tashqarisidagi rad etish sohalari.
- Taqsimotning rad etish sohasiga tushadigan qismi.

Qisqacha aytganda, biz -3 ga markazlangan normal taqsimot uchun $x < -3{,}332$ ehtimolini hisoblashimiz kerak, bu taqsimotning standart chetlanishi 1,7. Buning uchun biz hisoblashni istagan sohani soyali qilib belgilaymiz:



Biz normal yaqinlashuvdan foydalanamiz, bu erkinlik darajalari 30 yoki undan ko‘proq bo‘lganda yaxshi yaqinlashuv hisoblanadi. Hisob-kitobni Z-balni aniqlashdan boshlaymiz va statistik dastur yoki ehtimollar jadvali yordamida quyruq sohasini topamiz:

$$Z = \frac{-3{,}332 - (-3)}{1{,}7} = -0{,}20 \qquad \rightarrow \qquad 0{,}42 \ .$$

Sinovning quvvati $\mu_{davolash} - \mu_{nazorat} = -3$ bo‘lganda va har bir guruhda 100 ta tanlanma mavjud bo‘lganda taxminan 42% ga teng.

7.35-misolda biz hisob-kitobda yuqori rad etish sohasini e’tibordan chetda qoldirdik, chunki bu gipotetik haqiqat (ya’ni, -3)ga qarama-qarshi yo‘nalishda edi. Buning sababi nima? Agar aslida pasayish mavjud bo‘lsa, nolinchi gipotezani rad etib, o‘sish mavjud deb xulosa qilishning foydasi bo‘lmaydi.

Shuningdek, biz t-taqsimot o‘rniga normal taqsimotdan foydalandik. Bu qulaylik uchun qilingan va agar tanlanma hajmi juda kichik bo‘lsa, biz yana t-taqsimotdan foydalanishga qaytishimiz kerak bo‘ladi. Bu haqda ushbu bo‘lim oxirida biroz batafsil muhokama qilamiz.

7.4.3 Mos tanlanma hajmini aniqlash

Oxirgi misolda, har bir guruhda tanlanma hajmi 100 bo‘lsa, 3 mmHg o‘lchamdagi ta’sirni atigi 0,42 ehtimol bilan aniqlash mumkinligini bildik. Faraz qilaylik, tadqiqotchilar davom etishga qaror qilishdi va har bir guruh uchun faqat 100 ta bemordan foydalandilar, va ma’lumotlar muqobil gipotezani qo‘llab-quvvatlamadi, ya’ni tadqiqotchilar H_0 ni rad eta olmadilar. Bu bir necha sababga ko‘ra juda yomon holat:

- Tadqiqotchilarning fikrida, ular shunday savol berishadi: *Ehtimol, haqiqiy va mazmunli farq mavjuddir, lekin biz buni kichik tanlanma bilan aniqlay olmadik.*
- Kompaniya yangi dori ishlab chiqishga yuzlab million dollar sarmoya kiritgan bo‘lishi mumkin, lekin endi ular dorining samaradorligi haqida katta noaniqlikda qoldilar, chunki tajriba hali ham muhim bo‘lishi mumkin bo‘lgan ta’sirlarni aniqlash imkoniyatiga ega emas edi.
- Bemorlar dori ta’siriga duchor bo‘lishdi va biz dorining bemorlarga yordam bermasligi (yoki zarar qilmasligi) haqida katta ishonch bilan ayta olmaymiz.
- Dorining haqiqatan amaliy qiymatga ega ekanligini aniqlash uchun yana bir klinik sinov o‘tkazish kerak bo‘lishi mumkin va ikkinchi klinik sinovni o‘tkazish yillar davom etishi va yana millionlab dollar talab qilishi mumkin.

Biz bunday holatdan qochmoqchimiz, shuning uchun muhim ta’sirlarni aniqlash imkoniyatiga ega bo‘lishimiz uchun mos tanlanma hajmini aniqlashimiz kerak. Avval aytib o‘tganimizdek, 3 mmHg o‘zgarish amaliy jihatdan muvofiq bo‘lgan minimal farq deb topilgan. Birinchi qadam sifatida, biz turli tanlanma hajmlari uchun quvvatni hisoblashimiz mumkin. Masalan, har bir guruhda 500 ta bemordan foydalanishni sinab ko‘raylik.

Y **7.36-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tanlanma hajmi har bir guruhda 500 bo‘lganda, -3 mmHg o‘zgarishni aniqlash quvvatini hisoblang.[27]

(a) Standart xatolikni aniqlang (bemorlar uchun standart chetlanish taxminan 12 mmHg bo‘lishi kutilganini eslang).

(b) Nolinchi taqsimot va rad etish sohalarini aniqlang.

(c) $\mu_{davolash} - \mu_{nazorat} = -3$ bo'lganda muqobil taqsimotni aniqlang.

(d) Nolinchi gipotezani rad etish ehtimolini hisoblang.

Tadqiqotchilar 3 mmHg o'zgarish amaliy jihatdan muhim bo'lgan minimal farq deb qaror qilishdi va har bir guruh uchun tanlanma hajmi 500 bo'lganda, biz ushbu farqni aniqlash ehtimoli juda katta ekanligiga (97,7% yoki undan yuqori) ishonch hosil qilamiz. Endi biz boshqa bir ekstremal holatga o'tdik, bu yerda klinik sinovda yangi dorini juda ko'p sonli bemorlarga ta'sir qilishga sabab bo'lyapti. Bu nafaqat axloqiy jihatdan shubhali, balki muhim ta'sirlarni aniqlash uchun kerak bo'lgandan ancha ko'p pul talab qilmoqda.

Eng keng tarqalgan amaliyot, quvvat taxminan 80% (ba'zan 90%) atrofida bo'lgan tanlanma hajmini aniqlashdir. Ba'zi maxsus holatlar uchun boshqa qiymatlar mantiqiy bo'lishi mumkin, lekin 80% va 90% odatda yuqori quvvat va ko'p sonli bemorlarni yangi davolashga duchor qilmaslik (yoki juda ko'p mablag'ni behuda sarflamaslik) o'rtasidagi yaxshi muvozanat sifatida maqsad qilib olinadi.

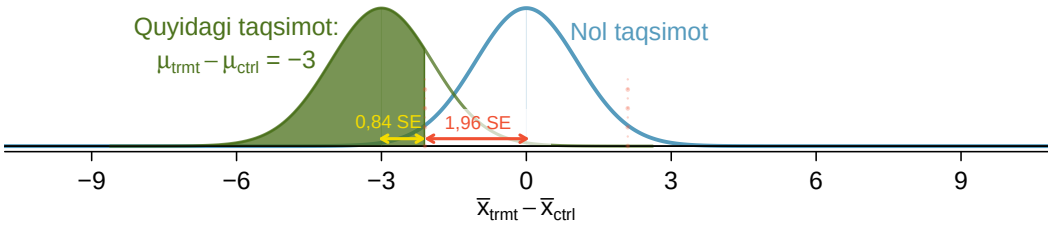
Biz testning quvvatini bir nechta boshqa tanlanma hajmlari uchun hisoblab, 80% ga yaqin birini topishimiz mumkin, lekin bu muammoni teskari yo'nalishda hal qilish yaxshiroqdir.

M **7.37-MISOL**

Qaysi tanlanma hajmi 80% quvvatga olib keladi? $\alpha = 0{,}05$ dan foydalaning.

Biz katta tanlanma hajmiga ega ekanligimizni taxmin qilamiz, shunda test statistikasi uchun normal taqsimot yaxshi yaqinlashuv bo'ladi, chunki erkinlik darajasi o'rtacha katta bo'lganda (masalan, $ed \geq 30$) normal taqsimot va t-taqsimot deyarli bir xil ko'rinishga ega. Agar bunday bo'lmasa, biz tuzatish kiritishimiz kerak bo'ladi.

Pastki quyruq uchun 80% ni ta'minlaydigan Z-ballni aniqlashdan boshlaymiz. Har bir guruh uchun o'rtacha katta tanlanma hajmi uchun pastki quyruqning 80% uchun Z-ball taxminan $Z = 0{,}84$ bo'ladi.



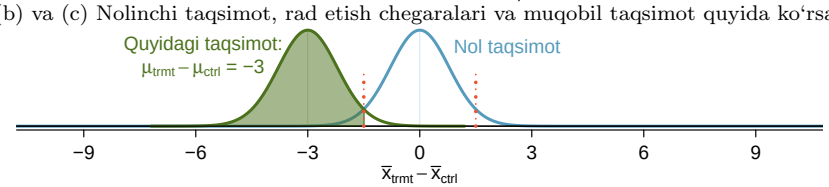
Shuningdek, $\alpha = 0{,}05$ uchun nolinchi taqsimot markazidan $1{,}96 \times SX$ gacha rad etish sohalari kengayadi. Bu nolinchi va muqobil taqsimotlar markazlari o'rtasidagi maqsadli masofani standart xatoliklar jihatidan hisoblash imkonini beradi:

$$0{,}84 \times SX + 1{,}96 \times SX = 2{,}8 \times SX \ .$$

Bizning misolimizda, biz nolinchi va muqobil taqsimotlar markazlari o'rtasidagi masofani qiziqish uchun minimal ta'sir o'lchami bo'lgan 3 mmHg ga teng qilishni xohlaymiz. Bu bizga ushbu farqni

---

[27] (a) Standart xato quyidagicha berilgan: $SX = \sqrt{\frac{12^2}{500} + \frac{12^2}{500}} = 0{,}76$.
(b) va (c) Nolinchi taqsimot, rad etish chegaralari va muqobil taqsimot quyida ko'rsatilgan:



Rad etish sohalari ikki nuqtali chiziq tashqarisidagi maydonlar bo'lib, $\pm 0{,}76 \times 1{,}96 = \pm 1{,}49$ qiymatlarda joylashgan. (d) $\mu_{davolash} - \mu_{nazorat} = -3$ bo'lganda muqobil taqsimotning soyali qismi hisoblangan. Biz Z-ballni hisoblaymiz va quyruq maydonini topamiz: $Z = \frac{-1{,}49-(-3)}{0{,}76} = 1{,}99 \rightarrow 0{,}977$. Har bir guruhda 500 ta bemor bo'lganda, biz 97,7% lik ishonch bilan (yoki undan ortiq) o'lchami kamida 3 mmHg bo'lgan har qanday ta'sirni aniqlashimiz mumkin.

standart xatolik bilan bog‘liq tenglamani tuzishga imkon beradi:

$$3 = 2{,}8 \times SX$$
$$3 = 2{,}8 \times \sqrt{\frac{12^2}{n} + \frac{12^2}{n}}$$
$$n = \frac{2{,}8^2}{3^2} \times \left(12^2 + 12^2\right) = 250{,}88 \ .$$

Ushbu masalada 0,05 ahamiyatlilik darajasida 80% quvvatga erishish uchun har bir guruhda 251 ta bemor maqsad qilib olinishi kerak.

$2{,}8 \times SX$ standart xatolikdagi farq 80% quvvat va $\alpha = 0{,}05$ ahamiyatlilik darajasiga mo‘ljallangan mazmunga xosdir. Agar maqsadli quvvat 90% bo‘lsa yoki boshqa ahamiyatlilik darajasidan foydalansak, $2{,}8 \times SX$ o‘rniga biroz boshqa qiymat ishlatamiz.

Agar tavsiya etilgan tanlanma hajmi nisbatan kichik bo‘lsa – taxminan 30 yoki undan kichikroq – bu hisob-kitoblarni boshlang‘ich tanlanma hajmi uchun erkinlik darajasidan foydalanib qayta ishlash yaxshi fikr bo‘lardi. Ya’ni, biz 0,84 va 1,96 qiymatlarini boshlang‘ich tanlanma hajmiga mos keladigan erkinlik darajalariga asoslangan holda qayta hisoblagan bo‘lardik. Qayta ko‘rib chiqilgan tanlanma hajmi maqsadi odatda bir oz kattaroq bo‘lardi.

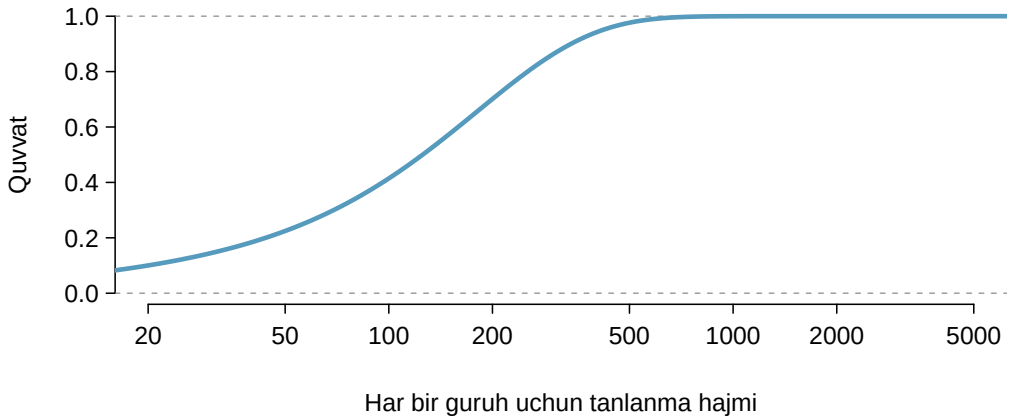
Y **7.38-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Faraz qilaylik, maqsadli quvvat 90% edi va biz $\alpha = 0{,}01$ dan foydalanyapmiz. Qiziqishning minimal ta’sir o‘lchamiga mos keladigan muqobil taqsimot markazlari va nolinchi taqsimot markazlari orasida qancha standart xatoliklar bo‘lishi kerak?[28]

Y **7.39-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Tajriba uchun quvvat darajasini aniqlashda muhim bo‘lgan ba’zi omillar nimalardan iborat?[29]

7.18-rasm tanlanma hajmlari 20 bemor va 5000 bemor intervalida quvvatni ko‘rsatadi, bu yerda $\alpha = 0{,}05$ va haqiqiy farq -3 ga teng. Ushbu egri chiziq turli tanlanma hajmlari uchun quvvatni hisoblash dasturini yozish orqali tuzilgan.



7.18-rasm. Egri chiziq qon bosimi misoli kontekstida turli tanlanma hajmlari uchun quvvatni ko‘rsatadi, bu yerda haqiqiy farq -3. $\alpha = 0{,}05$ bo‘lganda, 250 dan 350 ta kuzatuvdan ortig‘i muhim ta’sirni aniqlash uchun katta qo‘shimcha qiymat bermaydi.

Quvvat hisob-kitoblari qimmat yoki xavfli tajribalar uchun juda muhimdir. Biroq, xarajatlari arzon va axloqiy jihatdan kamdan-kam qiziqish uyg‘otadigan tajribalar haqida nima deyish

[28] Avvalo, 90% taqsimot undan past bo‘lgan Z-balni toping: $Z = 1{,}28$. Keyin, rad etish sohalari uchun chegaralarni aniqlang: $\pm 2{,}58$. Shundan so‘ng, markazlar orasidagi farq taxminan $1{,}28 \times SX + 2{,}58 \times SX = 3{,}86 \times SX$.

[29] Javoblar turlicha bo‘lishi mumkin, lekin mana ba’zi muhim omillar:

- Tadqiqotda bemorlarga xavf tug‘ilishining mavjudligi.
- Ko‘proq bemorlarni jalb qilishning narxi.
- Qiziqish ta’sirini aniqlay olmaslikning salbiy oqibatlari.

mumkin? Masalan, mashhur veb-saytning yangi funksiyasi uchun yakuniy sinovlar o'tkazilayotgan bo'lsa, tanlanma hajmini aniqlash bo'yicha qarorlarimiz qanday o'zgaradi? Avvalgidek, tanlanmaning yetarlicha katta ekanligini ta'minlashni xohlaymiz. Biroq, faraz qilaylik, ushbu funksiya bir qancha sinovlardan o'tgan va yaxshi ishlashi ma'lum (masalan, veb-sayt foydalanuvchilari funksiyadan rohatlanayotgani ko'rinadi). Shunda, funksiyaning ta'sirini yanada aniqroq baholashning foydasi bo'lsa, masalan, keyingi foydali funksiyani ishlab chiqishni yo'naltirishga yordam beradigan ma'lumotlarni olish, kattaroq tajriba o'tkazish o'rinli bo'lishi mumkin.

Mashqlar

7.33 Makkajo'xori hosildorligini oshirish. Katta bir fermer xo'jaligi yangi turdagi o'g'itni sinab ko'rmoqchi, bu esa xo'jalikning makkajo'xori hosildorligini oshirishini baholash uchun. Yer maydonlari o'rtacha 1215 funt makkajo'xori hosil qiladi, har bir maydon uchun standart chetlanish 94 funtni tashkil qiladi. Fermer har bir maydon uchun kamida 40 funtlik o'rtacha farqni aniqlashga qiziqmoqda. Agar talab qilinadigan quvvat darajasi 90% bo'lsa, eksperiment uchun necha maydon kerak bo'ladi? $\alpha = 0{,}05$ dan foydalaning. Har bir yer maydoni yoki hozirgi o'g'it yoki yangi o'g'it bilan ishlov ko'riladi, deb hisoblang.

7.34 Email orqali qo'llab-quvvatlash harakatlari. Tibbiy tadqiqot guruhi odamlardan tibbiy tarixlariga oid qisqa so'rovnomalarni to'ldirish uchun ro'yxatdan o'tishni taklif qilmoqda. Masalan, bir so'rovnoma insonning oilasida saraton bilan bog'liq tarix haqida ma'lumot so'raydi. Yana bir so'rovnoma esa inson oxirgi marta kasalxonaga tashrif buyurganida qaysi mavzular muhokama qilinganligini so'raydi. Hozircha, ro'yxatdan o'tganlar o'rtacha faqat 4 ta so'rovnomani to'ldirishgan, va so'rovnomalar sonining standart chetlanishi taxminan 2,2 ni tashkil qiladi. Tadqiqot guruhi yangi interfeysni sinab ko'rmoqchi, bu esa yangi ro'yxatdan o'tganlarni ko'proq so'rovnomalarni to'ldirishga rag'batlantirishini taxmin qilmoqda, va har bir ro'yxatdan o'tgan yangi interfeys yoki hozirgi interfeysni ko'radi. Har bir interfeys uchun necha ro'yxatdan o'tgan shaxs kerak bo'ladi, agar talab qilinadigan quvvat darajasi 80% bo'lsa va ta'sir kattaligi 0,5 so'rovnoma bo'lsa? $\alpha = 0{,}05$ dan foydalaning.

7.5 Ko'p o'rtacha qiymatlarni solishtirish, ANOVA

Ba'zan biz bir nechta guruhlar bo'yicha o'rtacha qiymatlarni solishtirishni xohlaymiz. Dastlab, biz juftlik bo'yicha solishtirishlarni amalga oshirishni o'ylashimiz mumkin. Masalan, agar uchta guruh bo'lsa, birinchi o'rtacha qiymatni ikkinchisi bilan, keyin uchinchisi bilan, va nihoyat ikkinchi va uchinchi o'rtacha qiymatlarni solishtirishga urinishimiz mumkin, bu esa jami uchta solishtirishni beradi. Biroq, bu strategiya xavfli bo'lishi mumkin. Agar bizda ko'p guruhlar bo'lsa va ko'p solishtirishlarni o'tkazsak, bosh to'plamlarda farq bo'lmasa ham, oxir-oqibat tasodifan farq topishimiz ehtimoldan holi emas. Buning o'rniga, biz guruhlarning hech bo'lmaganda bir juftida farq bor-yo'qligini tekshirish uchun holistik testni qo'llashimiz kerak va bu yerda *ANOVA* yordamga keladi.

7.5.1 ANOVAning asosiy g'oyalari

Ushbu bo'limda biz yangi usul — **dispersiyani tahlil qilish (ANOVA)** va yangi test statistikasi — F bilan tanishamiz. ANOVA ko'p guruhlar bo'yicha o'rtacha qiymatlar tengligini tekshirish uchun yagona gipoteza testidan foydalanadi:

H_0: O'rtacha natija barcha guruhlar bo'yicha bir xil. Statistik yozuvda bu $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$ shaklida ifodalanadi, bu yerda μ_i ixtiyoriy i kategoriyasidagi kuzatuvlar uchun natijaning o'rtacha qiymatini bildiradi.

H_A: Hech bo'lmaganda bir o'rtacha qiymat boshqalardan farq qiladi.

Odatda, ANOVAni bajarishdan oldin ma'lumotlar bo'yicha uchta shartni tekshirishimiz kerak:

- kuzatuvlar guruhlar ichida va ular orasida bog'liqsiz,
- har bir guruhdagi ma'lumotlar deyarli normal taqsimlangan,

- guruhlar bo‘yicha o‘zgaruvchanlik taxminan bir xil.

Agar ushbu uchta shart bajarilsa, biz ANOVAni bajarib, barcha μ_i teng ekanligi haqidagi nolinchi gipotezaga qarshi kuchli dalillarni taqdim etish uchun ma’lumotlarni baholashimiz mumkin.

M **7.40-MISOL**

Kollej fakultetlari, yuqori talab tufayli, har semestrda bir xil kirish darslarining bir nechta ma’ruzasini o‘tkazishi mumkin. Statistik ma’lumotlar bo‘yicha fakultetning bir semestrda kirish statistikasi kursining uchta ma’ruzasini (A, B va C) o‘tkazayotganini tasavvur qilaylik. Ushbu uchta darsda birinchi imtihon ballarida statistik jihatdan sezilarli farqlar bor-yo‘qligini aniqlashni xohlaymiz. Ushbu uchta sinf orasidagi farqlarni aniqlash uchun mos gipotezalarni yozing.

Gipotezalar quyidagi shaklda yozilishi mumkin:

H_0: O‘rtacha baho barcha ma’ruzalarda bir xil. Kuzatilgan har qanday farq tasodif tufayli yuzaga keladi. Notatsiyada, biz $\mu_A = \mu_B = \mu_C$ deb yozamiz.

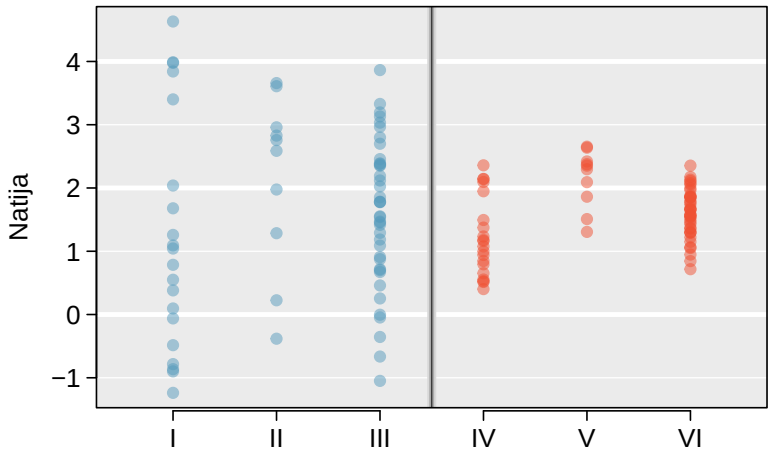
H_A: O‘rtacha baho darsga qarab farq qiladi. Agar sinf o‘rtachalari o‘rtasidagi farqlar tasodifdan kutganimizdan kattaroq bo‘lsa, biz nolinchi gipotezani rad etamiz va muqobil gipotezani qo‘llab-quvvatlaymiz.

ANOVAda muqobil gipotezani qo‘llab-quvvatlaydigan kuchli dalillar guruh o‘rtacha qiymatlari o‘rtasida juda katta farqlar mavjudligi bilan tavsiflanadi. Tez orada biz guruh o‘rtacha qiymatlarining o‘zgaruvchanligini har bir guruh ichidagi individual kuzatuvlarning o‘zgaruvchanligiga nisbatan baholash ANOVA muvaffaqiyatining kaliti ekanligini o‘rganamiz.

M **7.41-MISOL**

7.19-rasmdagi guruhlar I, II va III ni ko‘rib chiqing. Guruh markazlari orasidagi farqlar tasodif tufayli yuzaga kelganligini vizual tarzda aniqlash mumkinmi? Endi guruhlar IV, V va VI ni solishtiring. Ushbu farqlar tasodif natijasi bo‘lib tuyuladimi?

Guruhlar I, II va III o‘rtacha qiymatlarida haqiqiy farq bor-yo‘qligini aniqlash qiyin, chunki har bir guruh ichidagi ma’lumotlar o‘zgaruvchanligi o‘rtacha natijadagi har qanday farqlarga nisbatan juda katta. Boshqa tomondan, guruhlar IV, V va VI markazlarida farqlar mavjud ko‘rinadi. Masalan, V guruhi boshqa ikki guruhga qaraganda yuqoriroq o‘rtacha qiymatga ega bo‘lib tuyuladi. Guruhlar IV, V va VI ni o‘rganib chiqsak, guruh markazlari orasidagi farqlar har bir guruh ichidagi individual kuzatuvlar o‘zgaruvchanligiga nisbatan katta bo‘lgani uchun sezilarli ekanini ko‘ramiz.



7.19-rasm. Oltita guruh natijalari uchun yonma-yon nuqtali diagramma.

7.5.2 MLBda o'yinchi pozitsiyasi va zarba ko'rsatkichlari o'rtasida bog'liqlik bormi?

Biz beysbol o'yinchilarining pozitsiyalari bo'yicha zarba ko'rsatkichlarida haqiqiy farqlar bor-yo'qligini aniqlashni xohlaymiz: tashqi maydonchi (`OF`), ichki maydonchi (`IF`), va tutuvchi (`C`). Biz `bat18` deb nomlangan ma'lumotlar to'plamidan foydalanamiz, bu to'plam 2018-yilgi mavsumda kamida 100 zarba urgan 429 Major League Baseball (MLB) o'yinchilarining zarba yozuvlarini o'z ichiga oladi. 6 ta 429 holatlar `bat18` to'plamida 7.20-rasmda ko'rsatilgan va har bir o'zgaruvchi uchun tavsiflar 7.21-rasmda taqdim etilgan. Biz o'yinchilar zarba ko'rsatkichlarini baholash uchun (natija o'zgaruvchisi) bazaga chiqish foizidan (`OBP`) foydalanamiz. Bazaga chiqish foizi o'yinchining muvaffaqiyatli ravishda bazaga chiqishi yoki xomeran urishi ehtimolini taxminan ifodalaydi.

	ism	jamoa	pozitsiya	AB	H	HR	RBI	AVG	OBP
1	Abreu, J	CWS	IF	499	132	22	78	0,265	0,325
2	Acuna Jr., R	ATL	OF	433	127	26	64	0,293	0,366
3	Adames, W	TB	IF	288	80	10	34	0,278	0,348
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
427	Zimmerman, R	WSH	IF	288	76	13	51	0,264	0,337
428	Zobrist, B	CHC	IF	455	139	9	58	0,305	0,378
429	Zunino, M	SEA	C	373	75	20	44	0,201	0,259

7.20-rasm. `bat18` ma'lumotlar matritsasidan olti holat.

o'zgaruvchi	**tavsif**
`name`	O'yinchi ismi
`team`	O'yinchi jamoasining qisqartirilgan nomi
`position`	O'yinchining asosiy maydon pozitsiyasi (`OF`, `IF`, `C`)
`AB`	Zarba qilish imkoniyatlari soni
`H`	Zarba muvaffaqiyatlari soni
`HR`	Xomeranlar soni
`RBI`	Qaytarilgan yugurishlar soni
`AVG`	O'rtacha zarba, bu `H`/`AB` teng
`OBP`	Bazaga chiqish foizi, bu o'yinchining muvaffaqiyatli ravishda bazaga chiqishi yoki xomeran urishi ehtimolini taxminan ifodalaydi

7.21-rasm. `bat18` ma'lumotlar to'plamidagi o'zgaruvchilar va ularning tavsiflari.

Y **7.42-YO'NALTIRILGAN MASHQ**

Ko'rib chiqilayotgan nolinchi gipoteza quyidagicha: $\mu_{\texttt{OF}} = \mu_{\texttt{IF}} = \mu_{\texttt{C}}$. Nolinchi gipoteza va unga mos muqobil gipotezani oddiy tilda yozing.[30]

M **7.43-MISOL**

O'yinchi pozitsiyalari uch guruhga bo'lingan: tashqi maydon (`OF`), ichki maydon (`IF`), va tutuvchi (`C`). Tashqi maydonchilar uchun bazaga chiqish foizini $\mu_{\texttt{OF}}$ baholash uchun qanday mos nuqtaviy baho ishlatilishi mumkin?

Tashqi maydonchilar uchun bazaga chiqish foizining yaxshi bahosi `OBP`ning faqat tashqi maydon pozitsiyasidagi o'yinchilar uchun tanlama o'rtachasi bo'ladi: $\bar{x}_{OF} = 0{,}320$.

7.22-rasmda har bir guruh uchun umumiy statistikalar keltirilgan. 7.23-rasmda bazaga chiqish foizi uchun yonma-yon boxplot tasvirlangan. E'tibor bering, o'zgaruvchanlik guruhlar bo'ylab taxminan doimiy ko'rinadi; guruhlar bo'ylab deyarli doimiy dispersiya ANOVA yondashuvini ko'rib chiqishdan oldin bajarilishi kerak bo'lgan muhim farazdir.

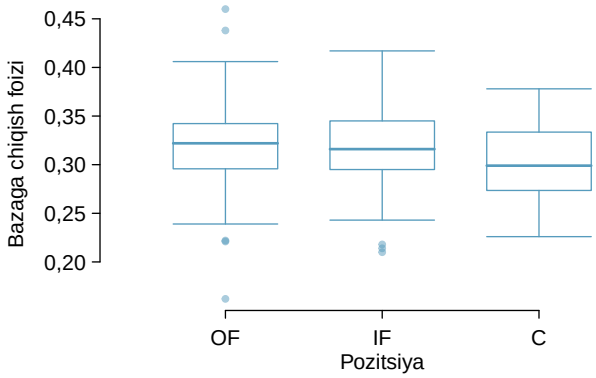
M **7.44-MISOL**

Tanlama o'rtacha qiymatlari orasidagi eng katta farq tutuvchi (`C`) va tashqi maydonchi (`OF`)

[30] H_0: Bazaga chiqishning o'rtacha foizi uchta pozitsiya bo'yicha teng. H_A: Bazaga chiqishning o'rtacha foizi ayrim (yoki barcha) guruhlar bo'yicha farq qiladi.

	OF	IF	C
Tanlama hajmi (n_i)	160	205	64
Tanlama o‘rtachasi ($\bar{x}_i$)	0,320	0,318	0,302
Tanlama SCh (s_i)	0,043	0,038	0,038

7.22-rasm. Bazaga chiqish foizining statistik xulosalari, o‘yinchi pozitsiyasiga qarab bo‘lingan.



7.23-rasm. 429 o‘yinchilar uchun bazaga chiqish foizining uchta guruh bo‘yicha yonma-yon boxploti. Ichki va tashqi maydon guruhlarida yuzdan ortiq o‘yinchi mavjud bo‘lib, ko‘rinadigan chetlanganlar muammo hisoblanmaydi.

pozitsiyalari o‘rtasida. Asosiy gipotezalarni yana bir bor ko‘rib chiqing:

H_0: $\mu_{\texttt{OF}} = \mu_{\texttt{IF}} = \mu_{\texttt{C}}$

H_A: Bazaga chiqishning o‘rtacha foizi (μ_i) ba’zi (yoki barcha) guruhlar bo‘yicha farq qiladi.

Nega $\mu_{\texttt{C}}$ va $\mu_{\texttt{OF}}$ o‘rtasidagi farq 0,05 ahamiyatlilik darajasida statistik jihatdan ahamiyatli ekanligini oddiygina aniqlash noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin?

Asosiy masala shundaki, biz taqqoslanadigan guruhlarni tanlashdan oldin ma’lumotlarni ko‘rib chiqyapmiz. Ma’lumotlarni ko‘z bilan baholash (norasmiy sinov) va keyin faqat ma’lum qismlarini rasmiy sinovdan o‘tkazish noto‘g‘ri. Bu **ma’lumotlarni o‘zlashtirish** yoki **ma’lumotlarni qidirish** (data snooping yoki data fishing) deb ataladi. Tabiiyki, biz rasmiy test uchun katta farqlarga ega bo‘lgan guruhlarni tanlaymiz va bu Tip 1 xato darajasining oshishiga olib keladi.

Buni yaxshiroq tushunish uchun biroz boshqacha muammoni ko‘rib chiqaylik.

Faraz qilaylik, katta boshlang‘ich maktabdagi 20 ta sinfda o‘quv yilining boshida o‘quvchilarning qobiliyatini o‘lchashimiz kerak. Ushbu maktabda barcha o‘quvchilar tasodifiy ravishda sinflarga taqsimlanadi, shuning uchun yil boshida sinflar o‘rtasida kuzatilgan har qanday farqlar butunlay tasodifga bog‘liq. Ammo ko‘p guruhlar bo‘lsa, ba’zi guruhlar bir-biridan ancha farqli ko‘rinishi mumkin. Agar biz faqat shunday farqli ko‘ringan sinflarni tanlab, keyin rasmiy test o‘tkazsak, biz noto‘g‘ri xulosaga kelib, taqsimot tasodifiy emas deb o‘ylashimiz mumkin. Garchi biz faqat bir nechta sinflar juftliklari bo‘yicha farqlarni rasmiy sinovdan o‘tkazsak ham, biz taqqoslash uchun eng ekstremal holatlarni tanlashdan oldin boshqa sinflarni ko‘z bilan baholagan bo‘lamiz.

Qo‘shimcha ma’lumot olish uchun, 7.44-misolda ifodalangan g‘oyalarga oid, biz **prokurorning xatosi** haqida o‘qishni tavsiya etamiz.[31]

Keyingi bo‘limda biz F statistikasi va ANOVA dan foydalanib, tanlama o‘rtacha qiymatlaridagi kuzatilgan farqlar, tegishli bosh to‘plam o‘rtacha qiymatlarida farq bo‘lmagan taqdirda ham, faqat tasodif tufayli yuzaga kelganligini tekshirishni o‘rganamiz.

[31] Masalan, qarang: statmodeling.stat.columbia.edu/2007/05/18/the_prosecutors.

7.5.3 Dispersiyani tahlil qilish (ANOVA) va F-test

Ushbu kontekstdagi dispersiyani tahlil qilish usuli bitta savolga javob berishga qaratilgan: tanlama o'rtacha qiymatlaridagi o'zgaruvchanlik shunchalik katta bo'lishi mumkinki, u faqatgina tasodifdan kelib chiqishi ehtimoldan uzoqmi? Bu savol oldingi test jarayonlaridan farq qiladi, chunki biz *bir vaqtning o'zida* ko'plab guruhlarni ko'rib chiqamiz va ularning tanlama o'rtacha qiymatlari tabiiy o'zgaruvchanlikdan kutilganidan ortiq darajada farqlanadimi, yo'qmi, baholaymiz. Biz bu o'zgaruvchanlikni **guruhlar orasidagi o'rtacha kvadrat** (inglizcha: mean square between groups MSG) deb ataymiz va u bilan bog'liq erkinlik darajasi $ed_G = k - 1$ bo'ladi, bu yerda k guruhlar sonini bildiradi. MSGni o'rtacha qiymatlar uchun o'lchovlangan dispersiya formula sifatida tasavvur qilish mumkin. Agar nolinchi gipoteza to'g'ri bo'lsa, tanlama o'rtacha qiymatlaridagi har qanday o'zgaruvchanlik tasodif tufayli yuzaga keladi va juda katta bo'lmasligi kerak. MSG hisob-kitoblarining tafsilotlari izohda keltirilgan.[32] Biroq, odatda, bu hisob-kitoblarni dasturiy ta'minot yordamida amalga oshiramiz.

Guruhlar orasidagi o'rtacha kvadratning o'zi gipoteza testida unchalik foydali emas. Bizga nolinchi gipoteza to'g'ri bo'lsa, tanlama o'rtacha qiymatlar orasida qanday o'zgaruvchanlik kutilishi kerakligini ko'rsatadigan mezon kerak. Shu maqsadda biz umumiy dispersiyani baholashni hisoblaymiz, odatda bu **o'rtacha kvadratik xatolik (inglizcha: mean square error** MSE**)** deb qisqartiriladi va u bilan bog'liq erkinlik darajasi $ed_E = n - k$ bo'ladi. MSEni guruhlar ichidagi o'zgaruvchanlikni o'lchaydigan miqdor sifatida tasavvur qilish foydali. MSE hisob-kitoblari tafsilotlari va ANOVA hisob-kitoblariga oid qo'shimcha onlayn ma'lumotlarga havola izohda keltirilgan.[33]

Agar nolinchi gipoteza to'g'ri bo'lsa, tanlama o'rtacha qiymatlar orasidagi har qanday farq faqat tasodif tufayli yuzaga keladi va MSG va MSE taxminan teng bo'lishi kerak. ANOVA uchun test statistikasi sifatida biz MSG va MSE nisbatini tekshiramiz:

$$F = \frac{MSG}{MSE} \ .$$

Bu yerda MSG guruhlar orasidagi o'zgaruvchanlikni, va MSE har bir guruh ichidagi o'zgaruvchanlikni o'lchaydi.

Y

7.45-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Beysbol ma'lumotlari uchun $MSG = 0{,}00803$ va $MSE = 0{,}00158$. MSG va MSE bilan bog'liq erkinlik darajalarini aniqlang va F statistikasi taxminan 5,077 ekanligini tasdiqlang.[34]

Biz F statistikadan foydalanib ***F*-test** deb ataladigan gipotezalarni baholashni amalga oshirishimiz mumkin. F statistikadan p-qiymat F taqsimotidan foydalanib hisoblanadi, va bu taqsimot ikkita parametr bilan bog'liq: ed_1 va ed_2. ANOVAdagi F statistikasi uchun $ed_1 = ed_G$ va $ed_2 = ed_E$.

[32] $\bar{x}$ ni barcha guruhlar bo'yicha natijalar o'rtachasi deb olamiz. Shunda guruhlar orasidagi o'rtacha kvadrat quyidagicha hisoblanadi:

$$MSG = \frac{1}{ed_G} SSG = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2$$

bu yerda SSG guruhlar orasidagi kvadratlar yig'indisi (inglizcha: sum of squares between groups) deb ataladi va n_i i guruhining tanlama hajmini bildiradi.

[33] $\bar{x}$ ni barcha guruhlar bo'yicha natijalar o'rtachasi deb olamiz. Shunda **umumiy kvadratlar yig'indisi** SST **(inglizcha: sum of squares total)** quyidagicha hisoblanadi:

$$SST = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

bu yerda yig'indi ma'lumotlar to'plamidagi barcha kuzatuvlar bo'yicha hisoblanadi. Shundan so'ng, biz **xatolar kvadratlar yig'indisini (inglizcha: sum of squared errors** SSE**)** ikkita ekvivalent usuldan birida hisoblaymiz:

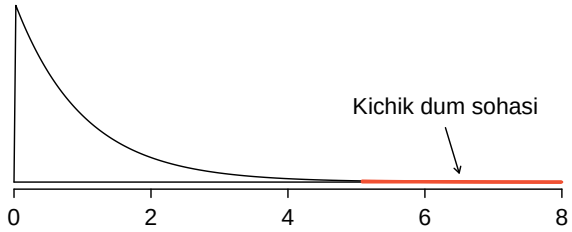
$$\begin{aligned} SSE &= SST - SSG \\ &= (n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2 + \cdots + (n_k - 1)s_k^2 \end{aligned}$$

bu yerda s_i^2 i guruhidagi qoldiqlar dispersiyasining kvadratini (tanlama standart chetlanishning kvadrati) bildiradi. Shundan so'ng, MSE quyidagicha normallashtirilgan shaklda hisoblanadi: $MSE = \frac{1}{ed_E} SSE$.

ANOVA hisob-kitoblari bo'yicha qo'shimcha tafsilotlarni qiziqqan o'quvchilar uchun www.openintro.org/d?file=stat_extra_anova_calculations manzilidan ko'rishingiz mumkin.

[34] Bu yerda $k = 3$ guruhlar mavjud, shuning uchun $ed_G = k - 1 = 2$. Jami kuzatuvlar soni $n = n_1 + n_2 + n_3 = 429$ bo'lib, $ed_E = n - k = 426$ bo'ladi. Shundan so'ng, F statistikasi MSG va MSE nisbatidan hisoblanadi: $F = \frac{MSG}{MSE} = \frac{0{,}00803}{0{,}00158} = 5{,}082 \approx 5{,}077$. ($F = 5{,}077$ qiymati MSG va MSE uchun o'nlik sonlarni yaxlitlamasdan foydalanib hisoblangan.)

Beysbol gipoteza testi uchun F statistikaga mos keladigan $ed_1 = 2$ va $ed_2 = 426$ bo‘lgan F taqsimoti 7.24-rasmda tasvirlangan.



7.24-rasm. $ed_1 = 2$ va $ed_2 = 423$ bo‘lgan F taqsimoti.

Tanlama o‘rtacha qiymatlaridagi kuzatilgan o‘zgaruvchanlik (MSG) guruhlar ichidagi kuzatuvlarga (MSE) nisbatan qanchalik katta bo‘lsa, F shunchalik katta bo‘ladi va nolinchi gipotezaga qarshi dalillar shunchalik kuchli bo‘ladi. Chunki F ning katta qiymatlari nolinchi gipotezaga qarshi kuchli dalillarni bildiradi, biz p-qiymatni hisoblash uchun taqsimotning yuqori quyruq qismini ishlatamiz.

F STATISTIKASI VA F-TEST

Dispersiyani tahlil qilish (ANOVA) 2 yoki undan ortiq guruhlar bo‘yicha natijaning o‘rtacha qiymati farq qiladimi yoki yo‘qligini tekshirish uchun ishlatiladi. ANOVA test statistikasi sifatida F ni ishlatadi, bu tanlama o‘rtacha qiymatlaridagi o‘zgaruvchanlikni guruhlar ichidagi o‘zgaruvchanlikka nisbatan standartlashtirilgan ko‘rsatkichdir. Agar H_0 to‘g‘ri bo‘lsa va model shartlari bajarilgan bo‘lsa, F statistikasi $ed_1 = k - 1$ va $ed_2 = n - k$ parametrlarga ega F taqsimotga amal qiladi. P-qiymatni hisoblash uchun F taqsimotning yuqori quyruq qismi ishlatiladi.

7.46-MISOL

7.24-rasmda ko‘rsatilgan soyali maydonga mos keluvchi p-qiymat taxminan 0,0066 ga teng. Bu nolinchi gipotezaga qarshi kuchli dalillarni taqdim etadimi?

P-qiymat 0,05 dan kichik, bu nolinchi gipotezani 0,05 ahamiyatlilik darajasida rad etish uchun yetarlicha kuchli dalillar mavjudligini ko‘rsatadi. Ya’ni, ma’lumotlar o‘yinchining asosiy maydon pozitsiyasiga qarab bazaga chiqish foizi o‘rtacha qiymati farq qilishini ko‘rsatadigan kuchli dalillarni taqdim etadi.

7.5.4 ANOVA jadvalini dasturiy ta’minotdan o‘qish

ANOVAni qo‘lda bajarish uchun zarur bo‘lgan hisob-kitoblar qiyin va inson xatosiga moyil. Shu sababli, F statistikasi va p-qiymatni hisoblash uchun statistik dasturlardan foydalanish odatiy holdir.

ANOVA xulosasini regressiya xulosasiga o‘xshash jadvalda ko‘rsatish mumkin, buni biz 8- va 9-boblarida ko‘ramiz. 7.25-rasmda MLBdagi o‘yinchi pozitsiyalariga qarab bazaga chiqish foizining o‘rtacha qiymati farq qiladimi yoki yo‘qligini tekshirish uchun ANOVA xulosasi ko‘rsatilgan. Ushbu qiymatlarning ko‘pi tanish bo‘lib tuyulishi kerak; xususan, F-test statistikasi va p-qiymatni oxirgi ikkita ustundan topish mumkin.

	Df	Sum Sq	O‘rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
pozitsiya	2	0,0161	0,0080	5,0766	0,0066
Qoldiqlar	426	0,6740	0,0016		

$s_{qo'shma} = 0{,}040$ erkinlik darajasi $ed = 423$ bo‘yicha

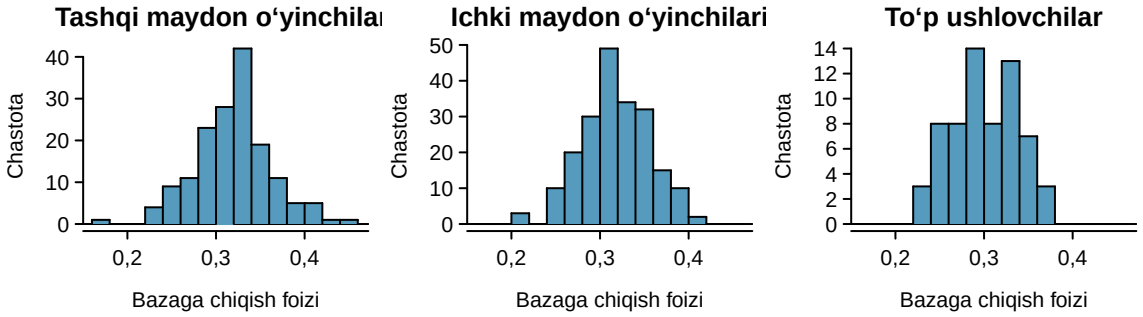
7.25-rasm. O‘yinchi pozitsiyalari bo‘yicha o‘rtacha bazaga chiqish foizi farq qiladimi yoki yo‘qligini tekshirish uchun ANOVA xulosasi.

7.5.5 ANOVA tahlili uchun grafik diagnostika

ANOVA tahlili uchun uchta shartni tekshirish kerak: barcha kuzatuvlar bog'liqsiz bo'lishi kerak, har bir guruhdagi ma'lumotlar deyarli normal bo'lishi kerak, va har bir guruh ichidagi dispersiya taxminan teng bo'lishi kerak.

Bog'liqsizlik. Agar ma'lumotlar oddiy tasodifiy tanlovdan olingan bo'lsa, bu shart bajarilgan hisoblanadi. Jarayonlar va tajribalar uchun ma'lumotlarning bog'liqsiz bo'lishi haqida diqqat bilan o'ylab ko'rish kerak (masalan, juftlashtirish yo'qligi). Masalan, MLB ma'lumotlarida ma'lumotlar tasodifiy olingan emas. Biroq, aksariyat yoki barcha kuzatuvlar uchun bog'liqsizlik bajarilmasligi uchun aniq sabablar yo'q.

Taxminan normal. Bir va ikki tanlanmali o'rtacha qiymatlar tahlilida bo'lgani kabi, normal taqsimot sharti ayniqsa tanlanma hajmi kichik bo'lganda muhimdir, chunki aynan shunday holatda normallikni tekshirish qiyin bo'ladi. Har bir guruhdagi kuzatuvlarning histogrammasi 7.26-rasmda ko'rsatilgan. Biz ko'rib chiqayotgan har bir guruhda nisbatan katta tanlanma hajmi mavjud bo'lib, biz katta autlierlarni qidirmoqdamiz. Hech qanday katta autlier ko'rinmaydi, shuning uchun bu shart ma'qullanadi.



7.26-rasm. Har bir maydon pozitsiyasi uchun OBP histogrammalari.

Doimiy dispersiya. Oxirgi faraz shundaki, guruhlar o'rtasidagi dispersiya har bir guruhda taxminan teng bo'lishi kerak. Ushbu farazni guruhlar bo'yicha natijalar uchun yonma-yon boxplotni tekshirish orqali ko'rib chiqish mumkin, 267-betdagi 7.23-rasmda ko'rsatilganidek. Ushbu holatda, o'zgaruvchanlik uchta guruhda o'xshash, lekin bir xil emas. 267-betdagi 7.22-rasmda ko'rganimizdek, standart chetlanish bir guruhdan keyingisiga unchalik farq qilmaydi.

ANOVA TAHLILI UCHUN DIAGNOSTIKA

Bog'liqsizlik ANOVA tahlili uchun har doim muhimdir. Har bir guruh uchun tanlanma hajmi nisbatan kichik bo'lganda normal taqsimot sharti juda muhimdir. Doimiy dispersiya sharti guruhlar o'rtasidagi tanlanma hajmi farq qilganda ayniqsa muhim bo'ladi.

7.5.6 Ko'p taqqoslashlar va Tip 1 xato darajasini boshqarish

Agar ANOVA tahlilida nolinchi gipotezani rad etsak, bizda savol tug'iladi: qaysi guruhlarning o'rtacha qiymatlari farq qiladi? Bu savolga javob berish uchun biz har bir mumkin bo'lgan guruh juftliklari o'rtasidagi o'rtacha qiymatlarni taqqoslaymiz. Masalan, agar uchta guruh bo'lsa va guruh o'rtacha qiymatlari orasida ba'zi farqlar borligi haqida kuchli dalillar mavjud bo'lsa, uchta taqqoslashni amalga oshirish kerak: 1-guruhni 2-guruh bilan, 1-guruhni 3-guruh bilan, va 2-guruhni 3-guruh bilan taqqoslash. Bu taqqoslashlar ikki tanlanmali t-test yordamida amalga oshirilishi mumkin, lekin biz o'zgartirilgan ahamiyatlilik darajasidan va guruhlar bo'yicha umumlashtirilgan standart og'ishni baholashdan foydalanamiz. Odatda, bu umumlashtirilgan standart chetlanishni ANOVA jadvalidan topish mumkin, masalan, 7.25-rasmda.

7.47-MISOL

265-betdagi 7.40-rasmda uchta statistika ma’ruzasini ko‘rib chiqdi, barchasi bir semestr davomida o‘qitilgan. 7.27-rasmda ushbu uchta kurs uchun umumiy statistikalarni ko‘rsatadi, va ma’lumotlarning yonma-yon boxploti 7.28-rasmda ko‘rsatilgan. Ushbu ma’lumotlar uchun ANOVA tahlilini o‘tkazmoqchimiz. ANOVA uchun uchta shartdan biron-biriga zid keladigan holatlarni ko‘ryapsizmi?

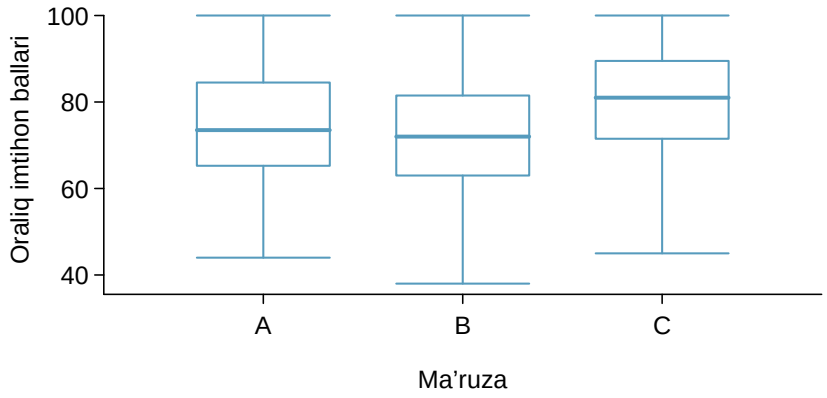
Ushbu holatda (ko‘pchilik kabi) bog‘liqsizlikni qat’iy tekshirish qiyin. Buning o‘rniga, biz faqat aql-idrokni ishlatib, bog‘liqsizlik sharti bajarilmasligi mumkin bo‘lgan sabablarni ko‘rib chiqamiz. Masalan, agar bir yulduz assistent mavjud bo‘lsa, unga faqat o‘quvchilarning yarmi kirish imkoniyatiga ega bo‘lsa, bog‘liqsizlik sharti mantiqiy bo‘lmasligi mumkin; bunday vaziyat sinfni ikkita kichik guruhga ajratib qo‘yadi. Ushbu ma’lumotlar uchun bunday holatlar aniq bo‘lmagan, va biz bog‘liqsizlik qabul qilinishi mumkin deb hisoblaymiz.

Yonma-yon boxplotdagi taqsimotlar taxminan simmetrik bo‘lib ko‘rinadi va sezilarli autlierlar yo‘q.

Boxplotlar taxminan teng o‘zgaruvchanlikni ko‘rsatmoqda, buni 7.27-rasmda tasdiqlash mumkin, bu doimiy dispersiya shartini qo‘llab-quvvatlaydi.

Kurs i	A	B	C
n_i	58	55	51
$\bar{x}_i$	75,1	72,0	78,9
s_i	13,9	13,8	13,1

7.27-rasm. Bir xil kursning uch xil ma’ruzasida birinchi oraliq imtihon natijalari bo‘yicha umumiy statistika.



7.28-rasm. Bir xil kursning uch xil ma’ruzasida birinchi oraliq imtihon natijalari uchun yonma-yon qutili diagramma.

7.48-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Oraliq imtihon ma’lumotlari uchun ANOVA amalga oshirildi, va umumiy natijalar 7.29-rasmda ko‘rsatilgan. Qanday xulosaga kelishimiz kerak?[35]

	Df	Sum Sq	O‘rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
ma’ruza	2	1290,11	645,06	3,48	0,0330
Qoldiqlar	161	29 810,13	185,16		

$s_{qo'shma} = 13.61$ erkinlik darajasi $ed = 161$ bo‘yicha

7.29-rasm. Oraliq imtihon ma’lumotlari uchun ANOVA umumiy jadvali.

[35] Testning p-qiymati 0,0330 ga teng, bu odatiy ahamiyatlilik darajasi 0,05 dan kichik. Shuning uchun, biz nolinchi gipotezani rad etamiz va oraliq imtihon o‘rtacha ballaridagi farqlar tasodifiy emas degan xulosaga kelamiz.

Uchta sinfdagi o'rtacha ballar farqlari tasodif tufayli emasligi haqida kuchli dalillar mavjud. Endi savol tug'ilishi mumkin: qaysi sinflar haqiqatan ham bir-biridan farq qiladi? Oldingi bo'limlarda aytilganidek, har bir mumkin bo'lgan guruh juftliklarini taqqoslash uchun ikki tanlanmali t-testdan foydalanish mumkin. Biroq, 267-betdagi 7.44-rasm misolida ta'riflangan muammo shundaki, juda ko'p testlar amalga oshirilganda Tip 1 xato darajasi oshadi. Ushbu masala ahamiyatlilik darajasini o'zgartirilgan shaklda foydalanish orqali hal qilinadi.

KO'P TAQQOSLASHLAR VA BONFERRONI TUZATISHI α UCHUN

Ko'p guruhlar juftligini taqqoslash vaziyati **ko'p taqqoslashlar** deb ataladi. **Bonferroni tuzatishi** ushbu testlar uchun qattiqroq ahamiyatlilik darajasi mos kelishini taklif qiladi:

$$\alpha^\star = \alpha/K$$

bu yerda K — bu barcha (formal yoki informal) taqqoslashlar soni. Agar k guruh bo'lsa, odatda barcha mumkin bo'lgan juftliklar taqqoslanadi va $K = \frac{k(k-1)}{2}$ ga teng bo'ladi.

7.49-MISOL

7.48-yo'naltirilgan mashqda siz uchta ma'ruza bo'yicha o'rtacha oraliq ballaridagi farqlar uchun kuchli dalillarni topdingiz. Bonferroni tuzatishidan foydalangan holda uchta mumkin bo'lgan juftlik taqqoslashlarini bajaring va har qanday farqlarni xabar qiling.

Biz o'zgartirilgan ahamiyatlilik darajasidan $\alpha^\star = 0{,}05/3 = 0{,}0167$ foydalanamiz. Bundan tashqari, umumlashtirilgan standart chetlanishni baholashdan foydalanamiz: $s_{qo'shma} = 13{,}61$, $ed = 161$ bo'yicha, bu ANOVA umumiy jadvalida berilgan.

A va B ma'ruzalari: Baholangan farq va standart xatolik mos ravishda quyidagicha:

$$\bar{x}_A - \bar{x}_B = 75{,}1 - 72 = 3{,}1 \qquad SX = \sqrt{\frac{13{,}61^2}{58} + \frac{13{,}61^2}{55}} = 2{,}56\ .$$

(Qo'shimcha ma'lumot uchun 254-betdagi 7.3.4-rasmga qarang.) Bu $ed = 161$ bo'yicha T-ballni 1,21 ga olib keladi (biz $s_{qo'shma}$ bilan bog'liq ed dan foydalanamiz). Aniq ikki tomonlama p-qiymatni aniqlash uchun statistik dasturdan foydalanildi, chunki 0,0167 o'zgartirilgan ahamiyatlilik darajasi t-jadvalda mavjud emas. P-qiymat (0,228) $\alpha^* = 0{,}0167$ dan kattaroq, shuning uchun A va B ma'ruzalari o'rtacha qiymatlarida farq uchun kuchli dalillar mavjud emas.

A va C ma'ruzalari: Baholangan farq va standart xatolik mos ravishda 3,8 va 2,61. Bu $ed = 161$ bo'yicha T-ballni 1,46 ga olib keladi va ikki tomonlama p-qiymat 0,1462 ga teng. Ushbu p-qiymat α^* dan kattaroq, shuning uchun A va C ma'ruzalari o'rtacha qiymatlarida farq uchun kuchli dalillar mavjud emas.

B va C ma'ruzalari: Baholangan farq va standart xatolik mos ravishda 6,9 va 2,65. Bu $ed = 161$ bo'yicha T-ballni 2,60 ga olib keladi va ikki tomonlama p-qiymat 0,0102 ga teng. Ushbu p-qiymat α^* dan kichik. Bu yerda biz B va C ma'ruzalari o'rtacha qiymatlarida farq borligi uchun kuchli dalillarni topamiz.

7.49-misoldagi tahlil natijalarini quyidagi belgilash bilan umumlashtirish mumkin:

$$\mu_A \stackrel{?}{=} \mu_B \qquad \mu_A \stackrel{?}{=} \mu_C \qquad \mu_B \neq \mu_C\ .$$

A ma'ruzasi uchun o'rtacha ball statistik jihatdan B yoki C ma'ruzalari o'rtacha ballaridan farqlanmaydi. Ammo, B va C ma'ruzalari o'rtacha ballari o'rtasida kuchli farq borligi haqida dalillar mavjud. Ikkinchi juftlik taqqoslashlarida, nolinchi gipotezani rad etish uchun yetarli dalil yo'q edi. Eslatib o'tamiz, H_0 ni rad eta olmaslik H_0 haqiqatdir degani emas.

ANOVA YORDAMIDA H_0 NI RAD ETING, LEKIN GURUHLARNING O‘RTACHA QIYMATLARIDAGI FARQLARNI TOPA OLMANG

ANOVA yordamida nolinchi gipotezani rad etish va keyin juftlik taqqoslashlarida farqlarni topa olmaslik mumkin. Ammo, *bu ANOVA xulosasini bekor qilmaydi.* Bu shunchaki, biz qaysi guruhlar o‘rtacha qiymatlarida farq borligini aniq aniqlay olmaganligimizni bildiradi.

ANOVA protsedurasi umumiy ko‘rinishni ko‘rib chiqadi: u barcha guruhlarni bir vaqtning o‘zida ko‘rib chiqib, qandaydir farqlar mavjudligiga dalil borligini aniqlashga harakat qiladi. Agar test guruh o‘rtacha qiymatlarida farqlar borligi haqida kuchli dalillar mavjudligini ko‘rsatsa ham, statistik jihatdan aniq bo‘lgan farqni yuqori ishonch bilan aniqlash ancha qiyin bo‘ladi.

Quyidagi o‘xshatishni ko‘rib chiqing: biz yirik miqdordagi pulni birlashmalarni bashorat qilish asosida ishlab topadigan Wall Street firmasini kuzatmoqdamiz. Birlashmalarni bashorat qilish odatda qiyin, va agar bashorat qilish muvaffaqiyat darajasi juda yuqori bo‘lsa, bu ichki savdo amalga oshirilayotganini tekshirish uchun yetarli kuchli dalil sifatida qaralishi mumkin. Garchi SEC ushbu firmada ichki savdo borligiga amin bo‘lsa ham, alohida treyderlarga qarshi dalillar kuchli bo‘lmasligi mumkin. SEC barcha ma’lumotlarni ko‘rib chiqqanida, ular naqshni aniqlaydilar. Bu ANOVA strategiyasining mohiyati: orqaga qadam tashlab, barcha guruhlarni bir vaqtda ko‘rib chiqing.

Mashqlar

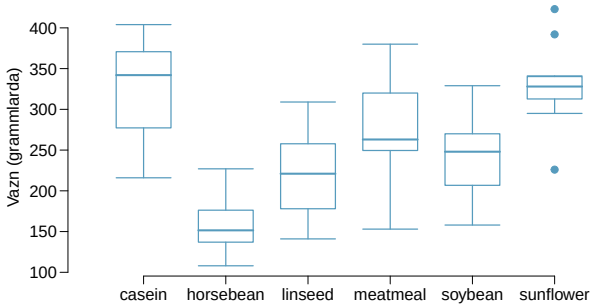
7.35 Bo’sh joyni to’ldiring. ANOVA bajarayotganda, guruhlar orasidagi o’rtacha qiymatlar orasida katta farqlarni kuzatasiz. ANOVA doirasida bu, ehtimol, _____ gipotezasini kuchli qo’llab-quvvatlovchi dalil sifatida talqin qilinadi.

7.36 Qaysi test? Biz ushbu kursga ijtimoiy fanlar, tabiiy fanlar, san’at va gumanitar fanlar hamda boshqa sohalardagi talabalar bir xil miqdorda o’qishga vaqt sarflaydimi, yo’qmi, aniqlashni xohlaymiz. Qaysi turdagi testdan foydalanishimiz kerak? Sababini tushuntiring.

7.37 Tovuq ozuqasi va vazni, 3-qism. 7.27- va 7.29-mashqlarda biz bir vaqtning o’zida ikki xil ozuqaning ta’sirini solishtirdik. Yaxshiroq tahlil barcha ozuqa turlarini bir vaqtning o’zida ko’rib chiqadi: kazein, otboqoq, zig’ir, go’sht yemi, soya va kungaboqar. Quyidagi ANOVA natijalari turli xil dietalardagi jo’jalar o’rtacha vaznidagi farqlarni sinash uchun ishlatilishi mumkin.

	ed	Sum Sq	O’rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
feed	5	231 129,16	46 225,83	15,36	0,0000
Residuals	65	195 556,02	3008,55		

Guruhlar orasida (yoki ba’zilarida) jo’jalar o’rtacha vazni farq qiladiganiga ishonarli dalillar mavjudligini aniqlash uchun gipoteza testini o’tkazing. Tegishli shartlarni tekshirishga ishonch hosil qiling. Quyida rasm va umumiy statistik ma’lumotlar ko’rsatilgan.



	O’rtacha	SCh	n
kazein	323,58	64,43	12
otboqoq	160,20	38,63	10
zig’ir	218,75	52,24	12
go’sht yemi	276,91	64,90	11
soya	246,43	54,13	14
kungaboqar	328,92	48,84	12

7.38 Deskriptiv statistikani o’qitish. Bir tadqiqotda deskriptiv statistikani o’qitishning beshta usuli solishtirildi. Ushbu beshta usul an’anaviy ma’ruza va muhokama, dasturlangan darsliklar, dasturlangan matn bilan ma’ruza, kompyuter o’qitishi va ma’ruza bilan kompyuter o’qitish edi. 45 ta talaba tasodifiy ravishda har bir usulga 9 tadan tayinlandi. Kursni tugatgandan so’ng, talabalar 1 soatlik imtihon topshirdilar.

(a) O’rtacha test ballari har xil o’qitish usullari uchun farq qiladimi yoki yo’qligini baholash uchun gipotezalarni yozing.

(b) Ushbu gipotezalarni baholash uchun F-test bilan bog’liq erkinlik darajalari qanday?

(c) Ushbu test uchun p-qiymat 0,0168 bo’lgan deb faraz qiling. Xulosa qanday?

7.39 Kofe, depressiya va jismoniy faollik. Kofein dunyodagi eng keng tarqalgan stimulyator bo'lib, uning taxminan 80% kofe shaklida iste'mol qilinadi. Kofe iste'moli va mashqlar o'rtasidagi munosabatni o'rganadigan tadqiqotda ishtirokchilar haftasiga o'rtacha (masalan, tez yurish) va jiddiy (masalan, sport va yugurish) mashqlarga qancha soat sarflaganliklari haqida hisobot berishdi. Ushbu ma'lumotlarga asoslanib, tadqiqotchilar haftalik metabolik ekvivalent topshiriqlari (MET) soatlarining umumiy miqdorini baholadilar, bu har doim 0 dan katta qiymat. Quyidagi jadvalda kofe iste'moli miqdoriga asoslangan holda ushbu tadqiqotdagi ayollar uchun METning umumiy statistikasi berilgan.[36]

Kofeinli kofe iste'moli

	$\leq$ 1 chashka haftaga	2-6 chashka haftaga	1 chashka kunga	2-3 chashka kunga	$\geq$ 4 chashka $\geq$ kunga	Jami
O'rtacha	18,7	19,6	19,3	18,9	17,5	
SD	21,1	25,5	22,5	22,0	22,0	
n	12215	6617	17234	12290	2383	50739

(a) O'rtacha jismoniy faollik darajasi kofe iste'molining turli darajalarida farq qiladimi yoki yo'qligini baholash uchun gipotezalarni yozing.

(b) Shartlarni tekshiring va testni davom ettirish uchun qanday taxminlarni amalga oshirishingiz kerakligini tasvirlab bering.

(c) Quyida ushbu test bilan bog'liq chiqishning bir qismi keltirilgan. Bo'sh hujayralarni to'ldiring.

	Ed	Sum Sq	O'rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
kofe					0,0003
Qoldiq		25564819			
Jami		25575327			

(d) Test natijasi qanday?

7.40 Muhokama bo'limlaridagi talabalarning natijalari. Katta hajmdagi kirish darajasidagi statistik kursni (197 ta talabani) o'qituvchi professor, har xil muhokama bo'limlari orasida talabalarning natijalari farq qiladimi, yo'qmi, aniqlashni xohlaydi. Har bir muhokama bo'limi uchun o'rtacha yakuniy imtihon balli, ballar dispersiyasi va har bir bo'limdagi talabalar sonini ko'rsatuvchi umumiy jadval quyida keltirilgan.

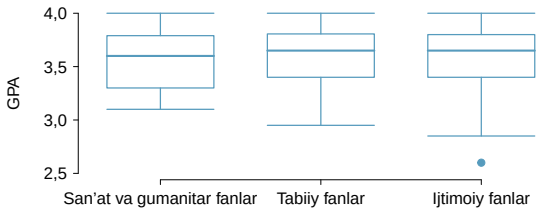
	1-bo'lim	2-bo'lim	3-bo'lim	4-bo'lim	5-bo'lim	6-bo'lim	7-bo'lim	8-bo'lim
n_i	33	19	10	29	33	10	32	31
$\bar{x}_i$	92,94	91,11	91,80	92,45	89,30	88,30	90,12	93,35
s_i	4,21	5,58	3,43	5,92	9,32	7,27	6,93	4,57

Har xil muhokama bo'limlari orasidagi o'rtacha ballardagi farqlarni sinash uchun quyidagi ANOVA natijalaridan foydalanish mumkin.

	Df	Sum Sq	O'rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
bo'lim	7	525,01	75,00	1,87	0,0767
Qoldiqlar	189	7584,11	40,13		

Guruhlar orasida (yoki ba'zilarida) o'rtacha ballardagi farqni ko'rsatadigan ishonarli dalillar mavjudligini aniqlash uchun gipoteza testini bajaring. Shartlarni tekshiring va testni davom ettirish uchun qanday taxminlarni amalga oshirishingiz kerakligini tasvirlang.

7.41 GPA va asosiy yo'nalish. Dyuk universitetida kirish darajasidagi statistik kursni o'tayotgan bakalavriat talabalari GPA va asosiy yo'nalish haqida so'rov o'tkazdilar. Yonma-yon box plotlar uchta asosiy yo'nalish guruhidagi GPA taqsimotini ko'rsatadi. Shuningdek, ANOVA natijalari ham keltirilgan.



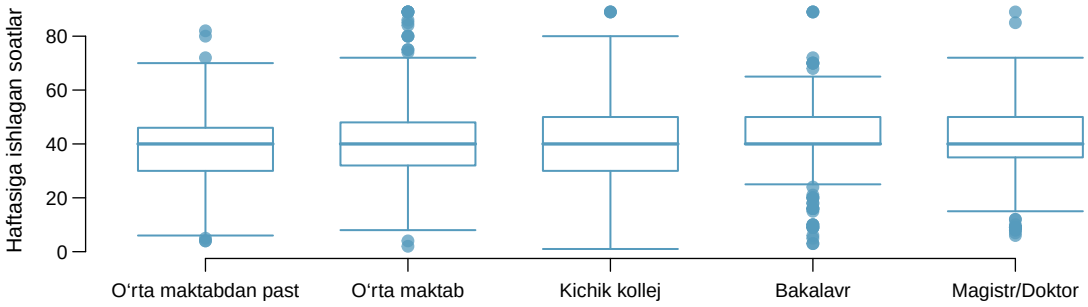
	Ed	Sum Sq	O'rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
asosiy yo'nalish	2	0,03	0,015	0,185	0,8313
Qoldiqlar	195	15,77	0,081		

[36] M. Lucas et al. "Coffee, caffeine, and risk of depression among women". In: *Archives of internal medicine* 171.17 (2011), p. 1571.

(a) Asosiy yo‘nalishlar bo‘yicha o‘rtacha GPA o‘rtasida farq borligini tekshirish uchun gipotezalarni yozing.
(b) Gipoteza testi natijasini ayting.
(c) So‘rovda ushbu savollarga nechta talaba javob bergan, ya’ni namuna hajmi qancha?

7.42 Ish soatlari va ta’lim. Umumiy Ijtimoiy So‘rov (GSS) AQSh rezidentlarining demografik holati, ta’lim va ish kabi ko‘plab xarakteristikalarini yig‘adi.[37] ANOVA yordamida biz 1172 nafar respondentlarning ta’lim darajasiga qarab ish soatlarini bir vaqtning o‘zida ko‘rib chiqishimiz mumkin. Quyida ta’lim darajasi bo‘yicha ishlagan soatlar taqsimoti va ushbu tahlilni o‘tkazishda foydali bo‘ladigan tegishli umumiy statistikalar keltirilgan.

	Ta’lim darajasi					
	HS dan past	HS	Jr Coll	Bakalavr	Magistratura	Jami
O’rtacha	38,67	39,6	41,39	42,55	40,85	40,45
SD	15,81	14,97	18,1	13,62	15,51	15,17
n	121	546	97	253	155	1172



(a) Ishlangan soatlarning o’rtacha soni beshta guruh orasida farq qiladimi yoki yo’qmi, baholash uchun gipotezalarni yozing.
(b) Shartlarni tekshiring va testni davom ettirish uchun qanday taxminlarni amalga oshirishingiz kerakligini tasvirlab bering.
(c) Quyida ushbu test bilan bog’liq chiqishning bir qismi keltirilgan. Bo’sh hujayralarni to’ldiring.

	Df	Sum Sq	O‘rtacha Sq	F-qiymat	Pr(>F)
daraja			501,54		0,0682
Qoldiqlar		267382			
Jami					

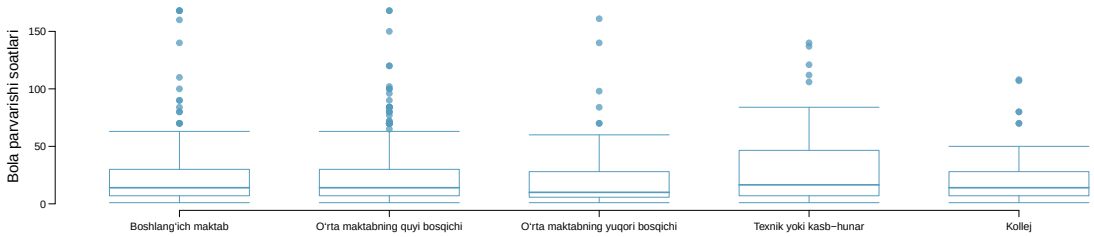
(d) Test natijasi qanday?

7.43 Haqiqat / Yolg’on: ANOVA, 1-qism. Quyidagi bayonotlar ANOVA doirasida haqiqat yoki yolg’on ekanligini aniqlang va yolg‘on deb topganingiz sababini tushuntiring.

(a) Guruhlar soni oshgani sari juftlik testlari uchun o‘zgartirilgan ahamiyatlilik darajasi ham oshadi.
(b) Umumiy namuna hajmi oshgani sari qoldiqlar uchun erkinlik darajalari ham oshadi.
(c) Agar guruhlar orasidagi namuna hajmi nisbatan bir xil bo‘lsa, doimiy dispersiya sharti biroz yumshatilishi mumkin.
(d) Namuna hajmi katta bo‘lganda mustaqillik taxmini yumshatilishi mumkin.

7.44 Bolaga qarash soatlari. Xitoy Sog’liqni Saqlash va Oziqlanish Tadqiqoti milliy va mahalliy hukumatlar tomonidan amalga oshirilgan sog’liqni saqlash, oziqlanish va oilani rejalashtirish siyosati va dasturlarining ta’sirini o’rganishga qaratilgan.[38] Masalan, Xitoylik ota-onalar 6 yoshdan kichik farzandlariga qarash uchun qancha vaqt sarflashi haqida ma’lumot to’pladi. Quyidagi yonma-yon box plotlar ushbu o’zgaruvchining ta’lim darajasi bo’yicha taqsimotini ko’rsatadi. Shuningdek, ta’lim darajalari bo‘yicha bolaga qarash uchun sarflangan o‘rtacha soatlarni solishtirish uchun ANOVA natijalari keltirilgan.

[37] National Opinion Research Center, General Social Survey, 2018.
[38] UNC Carolina Population Center, China Health and Nutrition Survey, 2006.



	Df	Sum Sq	O'rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
ta'lim	4	4142,09	1035,52	1,26	0,2846
Qoldiqlar	794	653047,83	822,48		

(a) Ta'lim darajalari bo'yicha bolaga qarash uchun sarflangan o'rtacha soatlar orasida farq borligini tekshirish uchun gipotezalarni yozing.

(b) Gipoteza testi natijasini ayting.

7.45 Qamoqdagi izolyatsiya tajribasi, 2-qism. 7.31-mashqda har bir davolash usulining muvaffaqiyatini alohida baholashni ko'rib chiqdik. Muqobil tahlil davolash usullarining muvaffaqiyatini solishtirishni o'z ichiga oladi. Tegishli ANOVA natijalari quyida keltirilgan.

	Df	Sum Sq	O'rtacha Sq	F qiymat	Pr(>F)
davolash	2	639,48	319,74	3,33	0,0461
Qoldiqlar	39	3740,43	95,91		

$s_{qo'shma} = 9{,}793$ $df = 39$ bo'yicha

(a) Gipotezalar qanday?

(b) Test natijasi qanday? 5% ahamiyatlilik darajasidan foydalaning.

(c) Agar (b) qismida test muhim deb topilgan bo'lsa, qaysi guruhlar bir-biridan farq qilishini aniqlash uchun juftlik testlarini bajaring. Agar null gipotezani rad etmagan bo'lsangiz, javobingizni qayta tekshiring. Har bir guruh uchun umumiy statistikalar quyida keltirilgan:

	Tr 1	Tr 2	Tr 3
O'rtacha	6,21	2,86	−3,21
SD	12,3	7,94	8,57
n	14	14	14

7.46 Haqiqat / Yolg'on: ANOVA, 2-qism. Quyidagi bayonotlar haqiqat yoki yolg'on ekanligini aniqlang va yolg'on deb topganingiz sababini tushuntiring.

Agar ANOVA yordamida to'rt guruhning o'rtacha qiymatlari bir xil degan null gipoteza 5% ahamiyatlilik darajasida rad etilsa, unda ...

(a) biz barcha o'rtacha qiymatlar bir-biridan farq qiladi degan xulosaga kelishimiz mumkin.

(b) guruhlar orasidagi standartlashtirilgan o'zgaruvchanlik guruhlar ichidagi standartlashtirilgan o'zgaruvchanlikdan yuqoriroq bo'ladi.

(c) juftlik tahlili bir-biridan sezilarli farq qiluvchi kamida bitta juftlikni aniqlaydi.

(d) juftlik solishtirishlarda foydalaniladigan mos α $0{,}05/4 = 0{,}0125$ bo'ladi, chunki to'rt guruh mavjud.

Bob bo'yicha mashqlar

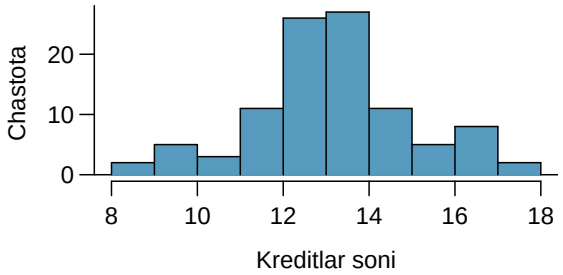
7.47 O'yin va chalg'ituvchi ovqatlanish, 1-qism. Tadqiqotchilar ovqatlanish paytida chalg'ituvchi omillarning, masalan, ovqat iste'mol qilish miqdorini oshirishi yoki kamaytirishi mumkin bo'lgan ta'sirini o'rganishga qiziqmoqda. Ushbu gipotezani sinab ko'rish uchun ular 44 bemordan iborat guruhni kuzatdilar va tasodifiy ravishda ikki teng guruhga ajratdilar. Davolash guruhi tushlikni solitaire o'yini o'ynab yedi, nazorat guruhi esa hech qanday qo'shimcha chalg'ituvchi omillarsiz tushlik qildi. Davolash guruhidagi bemorlar 52,1 gramm pechenye iste'mol qilishdi, standart chetlanish 45,1gramm, nazorat guruhidagi bemorlar esa 27,1 gramm pechenye iste'mol qilishdi, standart chetlanish 26,4 gramm. Ushbu ma'lumotlar davolash guruhidagi bemorlarning o'rtacha ovqatlanish miqdori (iste'mol qilingan pechenye miqdori) nazorat guruhiga

nisbatan boshqacha ekanligini ko‘rsatadigan dalillarni taqdim etadimi? Inference uchun shartlar bajarilgan deb hisoblang.[39]

7.48 O‘yin va chalg‘ituvchi ovqatlanish, 2-qism. 7.47-mashqdagi tadqiqotchilar, shuningdek, o‘yin bilan chalg‘itilgan holda ovqatlanishning iste’mol qilingan ovqatlar haqida eslash qobiliyatiga ta’sirini o‘rgandilar. Tushlikni solitaire o‘ynab yegan davolash guruhidagi 22 bemordan iste’mol qilgan ovqatlari haqida ketmaket eslashlari so‘raldi. Ushbu guruhdagi bemorlar o‘rtacha 4,9 ta ovqatni eslashdi, standart chetlanish 1,8. Hech qanday chalg‘ituvchi omillarsiz tushlik qilgan nazorat guruhidagi bemorlar esa o‘rtacha 6,1 ta ovqatni eslashdi, standart chetlanish 1,8. Ushbu ma’lumotlar davolash va nazorat guruhlaridagi bemorlar tomonidan eslangan ovqatlar sonining o‘rtacha miqdori boshqacha ekanligini ko‘rsatuvchi dalillarni taqdim etadimi?

7.49 Tanlanma hajmi va juftlash. Quyidagi bayonotning to‘g‘ri yoki noto‘g‘ri ekanligini aniqlang. Agar noto‘g‘ri bo‘lsa, tushuntiring: Agar teng tanlanma hajmiga ega ikki guruhning o‘rtachalarini taqqoslasak, har doim juftlashgan testdan foydalanamiz.

7.50 Kollej kreditlari. Bir kollej maslahatchisi talabalar har semestrda odatda qancha kredit olishlarini baholashga qiziqmoqda. Maslahatchi tasodifiy tanlash orqali 100 nafar talabani kollej registratorining bazasi yordamida tanlashga qaror qiladi. Quyida ushbu talabalar tomonidan olingan kreditlar sonining taqsimot gistogrammasi va taqsimot bo‘yicha tanlanma statistikalar keltirilgan.



Min	8
Q1	13
Mediana	14
O‘rtacha	13,65
SCh	1,91
Q3	15
Maks	18

(a) Talabalar har semestrda oladigan kreditlar soni uchun nuqta bahosi qanday? Median-chi?
(b) Talabalar har semestrda oladigan kreditlar sonining standart chetlanishi uchun nuqta bahosi qanday? IQR-chi?
(c) 16 ta kredit olish ushbu kollej uchun odatdagidan yuqori hisoblanadimi? 18 ta kredit-chi? Tushuntiring.
(d) Kollej maslahatchisi boshqa bir tasodifiy 100 nafar talaba tanlanmasi olib, bu safar o‘rtacha 14,02 birlik topadi. Ushbu tanlanma statistikasi asl tanlanmadagidan biroz farq qilganidan hayron bo‘lishi kerakmi? Tushuntiring.
(e) Yuqoridagi tanlanma o‘rtacha qiymatlar ushbu kollejdagi barcha talabalar tomonidan olingan o‘rtacha kreditlar soni uchun nuqta baholari hisoblanadi. Ushbu baholarning o‘zgaruvchanligini o‘lchash uchun qaysi mezonlardan foydalanamiz? Asl tanlanmadagi ma’lumotlardan foydalanib, ushbu qiymatni hisoblang.

7.51 Tovuqlar tuxumi. Muayyan turdagi tovuqlar naslchilik davrida qo‘yadigan tuxumlar sonining taqsimoti o‘rtacha 35 tuxum va standart chetlanish 18,2 ga teng. Tadqiqotchilar guruhi ushbu turdagi 45 ta tovuqni tasodifiy tanlab, naslchilik davridagi tuxumlar sonini hisoblab, tanlanma o‘rtachani qayd etishadi. Ular bu jarayonni 1000 marta takrorlab, tanlanma o‘rtachalar taqsimotini tuzadilar.
(a) Ushbu taqsimot nima deb ataladi?
(b) Ushbu taqsimot shakli simmetrik, o‘ngga egilgan yoki chapga egilgan bo‘lishini kutasizmi? Tushuntiring.
(c) Ushbu taqsimotning o‘zgaruvchanligini hisoblang va ushbu qiymatga nisbatan ishlatiladigan to‘g‘ri terminni ko‘rsating.
(d) Faraz qilaylik, tadqiqotchilar byudjeti qisqarib, ular faqat 10 ta tovuqni tasodifiy tanlash imkoniga ega bo‘lishdi. Tuxumlar sonining tanlanma o‘rtachasi qayd etilib, bu jarayon 1000 marta takrorlanadi va tanlanma o‘rtachalar uchun yangi taqsimot tuziladi. Ushbu yangi taqsimotning o‘zgaruvchanligi dastlabki taqsimotning o‘zgaruvchanligiga nisbatan qanday bo‘ladi?

7.52 O‘rmonlarni boshqarish. O‘rmon xodimlari bog‘dagi yosh daraxtlarning o‘sish sur’atini yaxshiroq tushunishni xohlashdi. 2009-yilda 50 ta yosh daraxtning tasodifiy tanlanmasi olindi va ushbu daraxtlar 2019-yilda yana o‘lchandi. Quyida ushbu o‘lchovlarning xulosalari keltirilgan, balandliklar futda ko‘rsatilgan:

	2009	2019	Farqlar
$\bar{x}$	12,0	24,5	12,5
s	3,5	9,5	7,2
n	50	50	50

[39] R.E. Oldham-Cooper et al. “Playing a computer game during lunch affects fullness, memory for lunch, and later snack intake”. In: *The American Journal of Clinical Nutrition* 93.2 (2011), p. 308.

2009-2019-yillar davomida parkdagi yosh daraxtlarning o'rtacha o'sishi uchun 99% ishonch oralig'ini tuzing.

7.53 Eksperimentni kattalashtirish. Bir ob-havo ilovasini ishga tushirayotgan startap kompaniyasining muhandislar jamoasi har bir yangi xususiyatni sinovdan o'tkazish uchun odatda ilova foydalanuvchilarining 1% nazorat guruhida va boshqa 1% davolash guruhida tasodifiy tanlash orqali tajribalar o'tkazadi. Jamoaning asosiy maqsadi "kunlik tashrif buyuruvchilar" deb nomlangan ko'rsatkichni oshirish bo'lib, bu ilovaga har kuni tashrif buyuruvchilar sonini anglatadi. Ular ushbu ko'rsatkichni har bir tajriba guruhida kuzatadilar va uni asosiy tajriba ko'rsatkichi sifatida ishlatadilar. So'nggi tajribalarida jamoa ilovani ishga tushirganda yangi animatsiyani kiritishni sinovdan o'tkazdi va bu tajribadagi kunlik tashrif buyuruvchilar soni +1,2% da barqaror bo'ldi, 95% ishonch oralig'i (-0,2%;+2,6%) bo'ldi. Bu shuni anglatadiki, agar ushbu yangi animatsiya ishga tushirilsa, jamoa kunlik tashrif buyuruvchilarning 0,2% ini yo'qotishi yoki 2,6% ga oshishi mumkin deb o'ylaydi. Faraz qilaylik, siz jamoa uchun ma'lumotlar olimi sifatida konsultant bo'lib ishlaysiz va ular bilan muhokamadan so'ng, siz va ular yangi, kattaroq eksperiment o'tkazishga kelishdingiz. Shuningdek, bu yangi tajriba kunlik tashrif buyuruvchilar ko'rsatkichining 1,0% yoki undan yuqori o'sishini 80% quvvat bilan aniqlashga qodir bo'lishi kerak, deb kelishdingiz. Endi ular sizga murojaat qilib, "Ushbu ta'sirni aniqlash uchun qanday katta eksperiment o'tkazishimiz kerak?" deb so'rashadi.

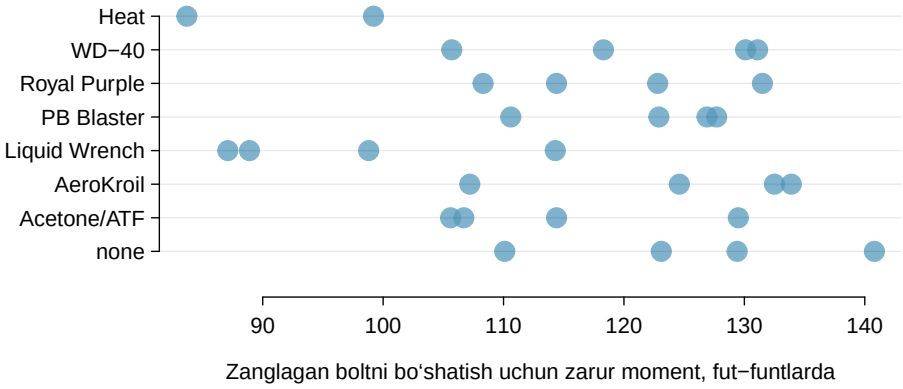
(a) Agar jamoa 1,0% ta'sirni $\alpha = 0{,}05$ darajasidagi ahamiyatlilik bilan va 80% quvvat bilan aniqlashni istasa, standart xato qanchalik kichik bo'lishi kerak? Kunlik tashrif buyuruvchilar ko'rsatkichidagi foiz o'zgarishi normal taqsimotga amal qiladi, deb hisoblasangiz bo'ladi.

(b) Birinchi tajribani ko'rib chiqing, unda nuqta bahosi +1,2% va 95% ishonch oralig'i (−0,2%;+2,6%) edi. Agar bu nuqta bahosi normal taqsimotga amal qilgan bo'lsa, baholashning standart xatosi qancha edi?

(c) (a)- va (b)-bo'limdagi standart xatolar nisbatini 1,97 bo'lishini kutasiz. Standart xatoni 1,97 marta kichraytirish uchun qanday katta tajriba kerak?

(d) (c)-bo'limdagi javobingizni va birinchi tajriba 1% ga qarshi 1% tajriba bo'lganligini hisobga olib, jamoaga tajriba hajmini tavsiya qiling.

7.54 Rustli boltga burama moment. Project Farm – bu turli mahsulotlarni muntazam taqqoslaydigan YouTube kanali. Bir epizodda kanal rustli boltlarni bo'shatish uchun turli xil usullarni baholadi.[40] Sakkizta variant sinovdan o'tkazildi, jumladan, hech qanday ishlov berilmagan nazorat guruhi (grafikdagi "none"). Barcha ishlov berish usullari uchun to'rtta bolt sinovdan o'tkazildi, bundan faqat issiqlik (blow torch) bilan ishlov berish istisno, bu yerda faqat ikki ma'lumot nuqtasi yig'ildi. Natijalar quyida ko'rsatilgan:



(a) Sizningcha, bu holda ANOVA qo'llash o'rinlimi?

(b) (a)-bo'limdagi javobingizdan qat'i nazar, ANOVA uchun ushbu kontekstdagi gipotezalarni tasvirlang va quyidagi jadvaldan foydalangan holda testni amalga oshiring. Ma'lumotlar kontekstida xulosangizni taqdim eting.

	Erkinlik darajasi	Kvadratlar yig'indisi	O'rtacha kvadrat	F qiymati	Pr(>F)
Ishlov berish	7	3603,43	514,78	4,03	0,0056
Qoldiqlar	22	2812,80	127,85		

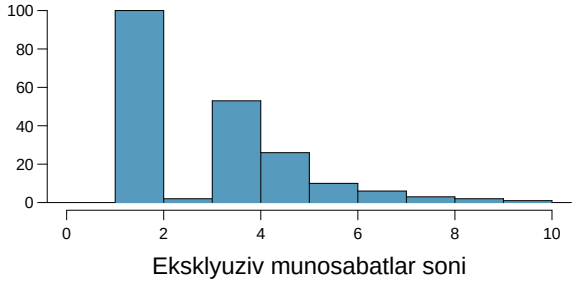
(c) Quyidagi jadvalda har bir guruhni boshqalar bilan taqqoslash uchun juftlik t-testlari uchun p-qiymatlar berilgan. Ushbu p-qiymatlar ko'p martalik taqqoslash uchun tuzatishlardan o'tmagan. Qaysi guruhlar jufti eng ehtimoliy farqni ifodalaydi?

[40] Project Farm on YouTube, youtu.be/xUEob2oAKVs, April 16, 2018.

	AeroKroil	Issiqlik	Liquid Wrench	Yo‘q	PB Blaster	Royal Purple	WD-40
Atseton/ATF	0,2026	0,0308	0,0476	0,1542	0,3294	0,5222	0,3744
AeroKroil		0,0027	0,0025	0,8723	0,7551	0,5143	0,6883
Issiqlik (Heat)			0,5580	0,0020	0,0050	0,0096	0,0059
Liquid Wrench				0,0017	0,0053	0,0117	0,0065
Yo‘q (none)					0,6371	0,4180	0,5751
PB Blaster						0,7318	0,9286
Royal Purple							0,8000

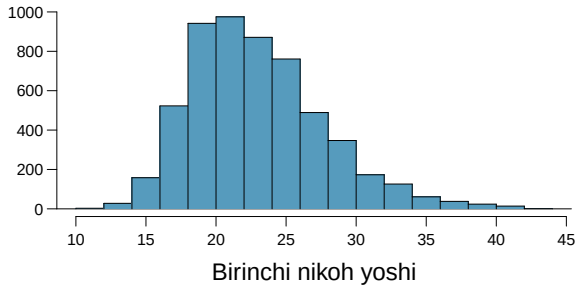
(d) (c)-bo‘lim jadvalida 28 ta p-qiymat mavjud. Ko‘p martalik taqqoslashni tuzatishdan keyin ularning birortasi statistik jihatdan ahamiyatlimi? Agar shunday bo‘lsa, qaysi biri (birilari)? Javobingizni tushuntiring.

7.55 Eksklyuziv munosabatlar. 203 nafar bakalavriat talabalaridan iborat tasodifiy tanlangan guruh o‘rtasida so‘rovnoma o‘tkazilib, boshqa ko‘p savollar bilan bir qatorda ushbu talabalar qanchalik ko‘p eksklyuziv munosabatlarda bo‘lganligi so‘raldi. Quyidagi gistogrammada ushbu tanlanmadan olingan ma’lumotlarning taqsimoti ko‘rsatilgan. Tanlanmaviy o‘rtacha qiymat 3,2, standart chetlanish esa 1,97 ga teng.



Duke universiteti talabalarining o‘rtacha eksklyuziv munosabatlar sonini 90% ishonch oralig‘idan foydalanib baholang va ushbu oralig‘ni kontekstda izohlang. Inference uchun talab qilinadigan barcha shartlarni tekshiring va hisob-kitoblar hamda xulosalaringiz davomida qilinadigan farazlarni qayd eting.

7.56 Birinchi nikohdagi yosh, 1-qism. Milliy Oila O‘sishi Tadqiqoti (National Survey of Family Growth) Kasalliklarni Nazorat qilish Markazi tomonidan oilaviy hayot, nikoh va ajrashish, homiladorlik, bepushtlik, kontratseptiv vositalardan foydalanish hamda erkaklar va ayollarning sog‘lig‘i haqida ma’lumot to‘playdi. Ushbu so‘rovnoma bo‘yicha toplangan o‘zgaruvchilardan biri birinchi nikohdagi yosh hisoblanadi. Quyidagi gistogrammada 2006-2010-yillarda tasodifiy tanlangan 5534 nafar ayolning birinchi nikohdagi yosh taqsimoti ko‘rsatilgan. Ushbu ayollarning birinchi nikohdagi o‘rtacha yoshi 23,44, standart chetlanishi esa 4,72 ga teng.[41]



Ayollarning birinchi nikohdagi o‘rtacha yoshini 95% ishonch oralig‘idan foydalanib baholang va ushbu oralig‘ni kontekstda izohlang. Tegishli barcha farazlarni muhokama qiling.

7.57 Onlayn muloqot. Bir tadqiqot kollej talabasi haftasiga o‘rtacha 10 soatni boshqalar bilan onlayn muloqot qilishga sarflayotganini ko‘rsatadi. Siz bu baho past ekanligini o‘ylaysiz va gipoteza testini o‘tkazish uchun o‘z tanlanmangizni yig‘ishga qaror qilasiz. Yotoqxonangizdan 60 nafar talabani tasodifiy tanlab, ularning haftasiga boshqalar bilan onlayn muloqot qilishga o‘rtacha 13,5 soat sarflaganini aniqlaysiz. Gipoteza testida yordam berishni taklif qilgan do‘stingiz quyidagi gipotezalarni tuzadi. Har qanday xatolarni ko‘rsating.

$$H_0 : \bar{x} < 10 \; soat$$
$$H_A : \bar{x} > 13{,}5 \; soat$$

[41] Centers for Disease Control and Prevention, National Survey of Family Growth, 2010.

7.58 Birinchi nikohdagi yosh, 2-qism. 7.56-mashqda 2006-2010-yillar davomida o'tkazilgan so'rov natijalari ko'rsatilgan bo'lib, ularda ayollarning birinchi nikohdagi o'rtacha yoshi 23,44 ekanligi aytilgan. Faraz qilaylik, bir ijtimoiy olim ushbu qiymat so'rovnoma olinganidan beri o'zgargan deb hisoblaydi. Quyida uning gipotezalarini qanday tuzgani ko'rsatilgan. Har qanday xatolarni ko'rsating.

$$H_0 : \bar{x} \neq 23{,}44 \; yosh$$
$$H_A : \bar{x} = 23{,}44 \; yosh$$

8-BOB

Chiziqli regressiyaga kirish

8.1 Chiziqli moslashtirish, qoldiqlar va korrelyatsiya

8.2 Eng kichik kvadratlar usuli yordamida regressiya

8.3 Chiziqli regressiyadagi chetlashgan nuqtalarning turlari

8.4 Chiziqli regressiya uchun xulosalar

Chiziqli regressiya juda kuchli statistik usuldir. Koʻpchilik regressiya bilan tanish, chunki ular yangiliklarda sochiluvchanlik diagrammasilarda toʻgʻri chiziqlar qoʻshilganligini koʻrgan. Chiziqli modellar bashorat qilish yoki ikkita sonli oʻzgaruvchilar oʻrtasida chiziqli bogʻliqlik mavjudligini baholash uchun ishlatilishi mumkin.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

8.1 Chiziqli moslashtirish, qoldiqlar va korrelyatsiya

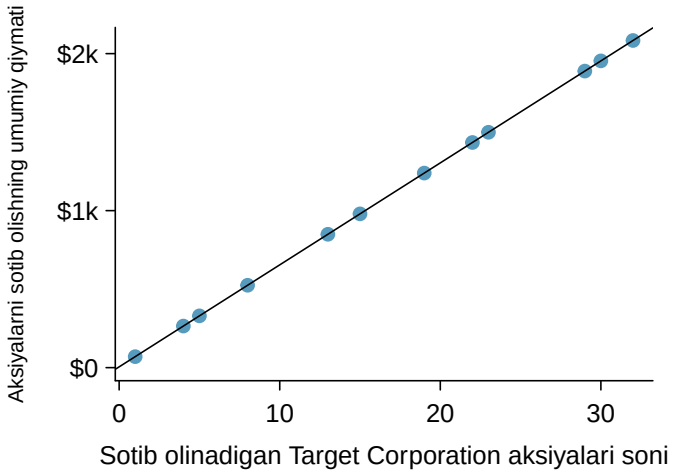
Chiziqni moslashtirish jarayonini chuqur o‘ylab ko‘rish foydalidir. Ushbu bo‘limda biz chiziqli model shaklini aniqlaymiz, yaxshi moslik uchun mezonlarni o‘rganamiz va *korrelyatsiya* deb atalgan yangi statistikani taqdim etamiz.

8.1.1 Ma’lumotlarga chiziqni moslashtirish

8.1-rasm to‘g‘ri chiziq bilan mukammal model qilinishi mumkin bo‘lgan ikki o‘zgaruvchi o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi. Chiziq tenglamasi:

$$y = 5 + 64{,}96x.$$

Mukammal chiziqli bog‘liqlik nimani anglatishini o‘ylab ko‘ring: x ning qiymatini bilish orqali biz y ning aniq qiymatini bilamiz. Bu deyarli har qanday tabiiy jarayonda haqiqatga yaqin emas. Masalan, agar biz oila daromadini (x) olsak, bu qiymat kollej tomonidan potensial talaba uchun qancha moliyaviy yordam berilishi haqida foydali ma’lumot beradi (y). Ammo, bashorat mukammal bo‘lmaydi, chunki moliyaviy yordamga oilaning moliyaviy holatidan tashqari boshqa omillar ham ta’sir qiladi.

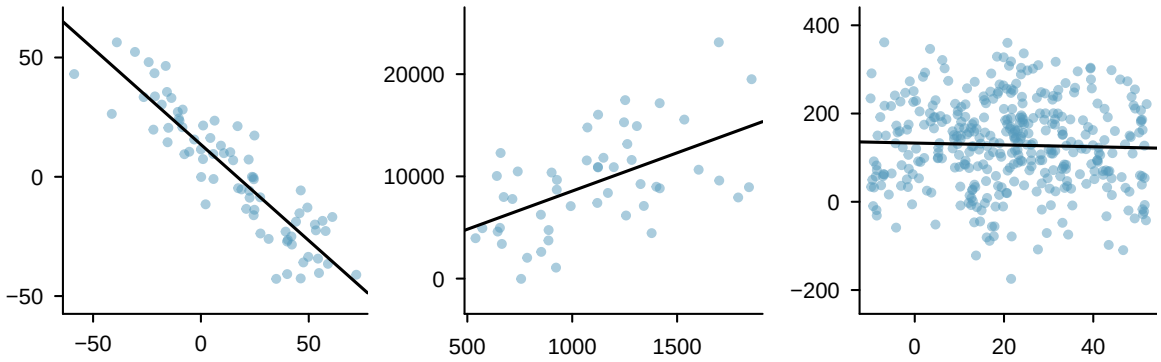


8.1-rasm. 2018-yil 28-dekabr kuni “Target Corporation” aksiyalarini sotib olish uchun o‘n ikki alohida xaridor tomonidan bir vaqtning o‘zida savdo kompaniyasiga so‘rovlar berildi va aksiyalarning umumiy qiymati hisoblab chiqildi. Xarajatlar chiziqli formula asosida hisoblanganligi sababli, chiziqli moslik mukammal ko‘rinishda bo‘ldi.

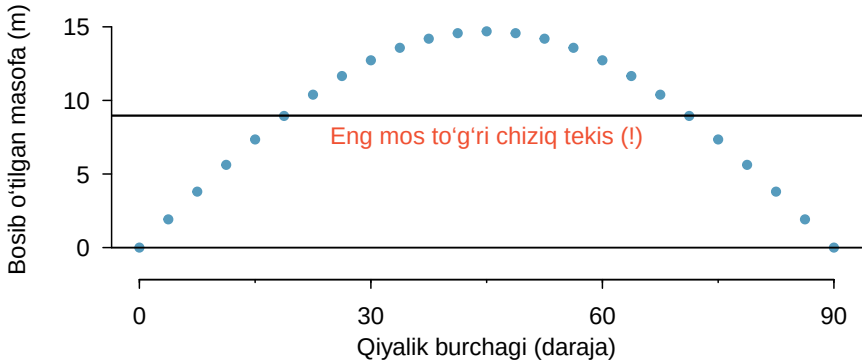
Chiziqli regressiya - bu ikkita o‘zgaruvchi (x va y) o‘rtasidagi bog‘liqlikni bir oz xatolik bilan to‘g‘ri chiziq orqali model qilish uchun chiziqni moslashtirishning statistik usuli:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon.$$

Bu yerda β_0 va β_1 model parametrlarini ifodalaydi (β - bu yunon harfi *beta*), xatolik esa ε bilan ifodalanadi (yunon harfi *epsilon*). Parametrlar ma’lumotlar asosida baholanadi va ularning nuqtaviy baholari b_0 va b_1 kabi yoziladi. x yordamida y ni bashorat qilishda odatda x ni tushuntiruvchi yoki **bashoratlovchi** o‘zgaruvchi va y ni javob o‘zgaruvchisi deb ataymiz. Shuningdek, biz ko‘pincha ε terminini modelni yozishda tashlab qo‘yamiz. Chunki asosiy e’tiborimiz ko‘pincha o‘rtacha natijani bashorat qilishda bo‘ladi.



8.2-rasm. Chiziqli model foydali bo‘lishi mumkin bo‘lgan uchta ma’lumotlar to‘plami, garchi ma’lumotlar nuqtalari chiziq ustiga to‘liq tushmasa ham.



8.3-rasm. Ushbu chiziqli bo‘lmagan holatda chiziqli model foydali emas. Ushbu ma’lumotlar boshlang‘ich fizika tajribasidan olingan.

Ma’lumotlarning barchasini to‘g‘ri chiziqqa mukammal moslash kamdan-kam hollarda uchraydi. Buning o‘rniga, ma’lumotlar odatda *“nuqtalar buluti”* (inglizcha: cloud of points) kabi ko‘rinishda bo‘ladi. Bu 8.2-rasmda turli misollarda ko‘rsatilgan. Har bir holatda, ma’lumotlar to‘g‘ri chiziq atrofida joylashgan, hatto kuzatuvlarning hech biri to‘g‘ri chiziqda aniq joylashmasa ham. Birinchi grafikda kuchli pastga yo‘nalgan chiziqli tendensiya kuzatiladi, bunda chiziq atrofidagi qolgan tarqoqlik x va y o‘rtasidagi bog‘lanish kuchiga nisbatan juda kichikdir. Ikkinchi grafik kuchli emas, lekin sezilarli o‘suvchi tendentsiyani ko‘rsatadi. Oxirgi grafik ma’lumotlardagi juda kuchsiz pasayish tendentsiyasini ko‘rsatadi, shunchalik kuchsizki, biz uni deyarli sezmaymiz. Ushbu misollarning har birida, model parametrlarining β_0 va β_1 baholari bo‘yicha ma’lum bir noaniqlik bo‘ladi. Masalan, chiziqni yuqoriga yoki pastga biroz siljitish kerakmi yoki uni biroz ko‘proq yoki kamroq burish kerakmi deb o‘ylashimiz mumkin. Bu bo‘lim davomida biz chiziqni moslashtirish mezonlari haqida bilib olamiz. Shuningdek, model parametrlarining baholari bilan bog‘liq noaniqlikni o‘rganamiz.

Shuningdek, ba’zi holatlar mavjud bo‘lib, ularda chiziqli modelni ma’lumotlarga moslashtirish foydali bo‘lmasligi mumkin. Hatto o‘zgaruvchilar o‘rtasida aniq bog‘liqlik mavjud bo‘lsa ham. Bunday holatlardan biri 8.3-rasmda ko‘rsatilgan bo‘lib, bu yerda o‘zgaruvchilar o‘rtasida juda aniq bog‘liqlik mavjud, lekin tendentsiya chiziqli emas. Ushbu bo‘limda va keyingisida biz chiziqli bo‘lmagan tendentsiyalarni muhokama qilamiz. Lekin chiziqli bo‘lmagan modellarni moslashtirish tafsilotlari keyingi kurslarga qoldiriladi.

8.1.2 Chiziqli regressiyadan foydalanib possum bosh uzunligini bashorat qilish

Keng quyruqli possumlar Avstraliyada yashovchi xaltachali hayvonlardir. 8.4-rasmda ulardan biri tasvirlangan. Tadqiqotchilar ushbu hayvonlarning 104 tasini ushlab, ularni yovvoyi tabiatga

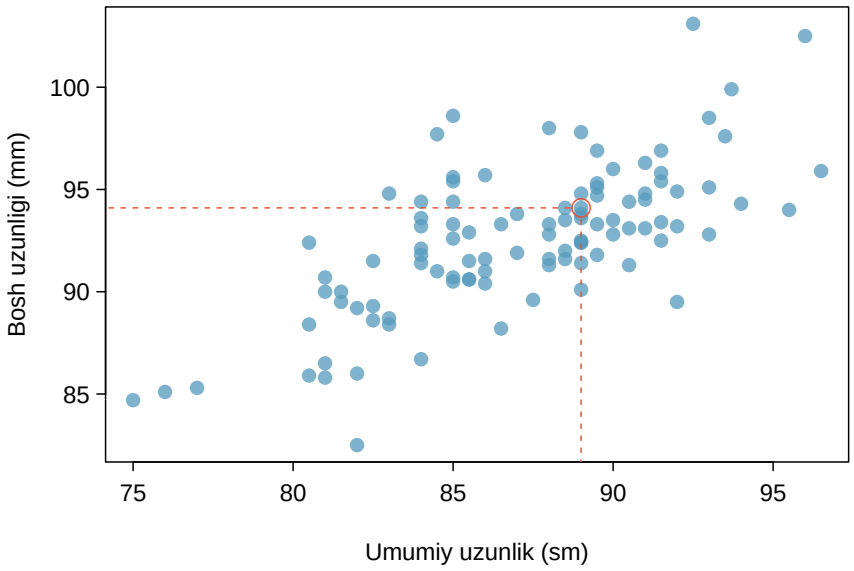
qaytarishdan avval tanalarini o‘lchashdi. Biz ushbu o‘lchovlardan ikkitasini ko‘rib chiqamiz. Har bir possumning boshidan dumi oxirigacha bo‘lgan umumiy uzunligi va boshining uzunligi.



8.4-rasm. Avstraliyada yashovchi oddiy keng quyruqli possum.

Greg Shekter (Greg Schechter) tomonidan suratga olingan (https://flic.kr/p/9BAFbR). CC BY 2.0 licenziya.

8.5–rasm possumlarning bosh uzunligi va umumiy uzunligi uchun sochiluvchanlik diagrammasini ko‘rsatadi. Har bir nuqta bitta possumni ifodalaydi. Bosh uzunligi va umumiy uzunlik o‘zgaruvchilari o‘zaro bog‘liq: umumiy uzunligi o‘rtachadan yuqori bo‘lgan possumlar, odatda, bosh uzunligi ham o‘rtachadan yuqori bo‘lishi tendentsiyasiga ega. Garchi bog‘liqlik mukammal darajada chiziqli bo‘lmasa ham, ushbu o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘liqlikni to‘g‘ri chiziq yordamida qisman tushuntirish foydali bo‘lishi mumkin.

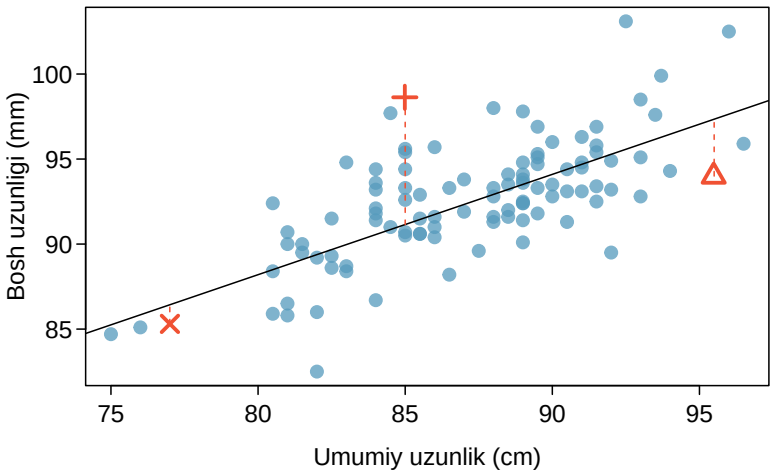


8.5-rasm. Possumlarning bosh uzunligi va umumiy uzunligi uchun sochiluvchanlik diagrammasi. Bosh uzunligi 94,1 mm va umumiy uzunligi 89 sm bo‘lgan possumni ifodalaydigan nuqta ajratib ko‘rsatilgan.

Possum ma’lumotlar to‘plamidagi bosh uzunligi va umumiy uzunlik o‘zgaruvchilari o‘rtasidagi bog‘liqlikni chiziq yordamida tasvirlamoqchimiz. Ushbu misolda, biz umumiy uzunlikni bashoratlovchi o‘zgaruvchi (x) sifatida ishlatib, possumning bosh uzunligini (y) bashorat qilamiz. Chiziqli bog‘liqlikni ko‘z bilan moslashtirishimiz mumkin, bu 8.6–rasmda ko‘rsatilgan. Ushbu chiziqning tenglamasi quyidagicha:

$$\hat{y} = 41 + 0{,}59x.$$

y ustidagi ”shlyapa” bu baho ekanligini bildiradi. Ushbu chiziqni possumlar xususiyatlarini muhokama



8.6-rasm. Bosh uzunligi va umumiy uzunlik o‘rtasidagi bog‘liqlikni ifodalash uchun mos chiziqli model tuzilgan.

qilish uchun ishlatishimiz mumkin. Masalan, tenglama 80 sm umumiy uzunlikka ega possum bosh uzunligini quyidagicha bashorat qiladi:

$$\hat{y} = 41 + 0{,}59 \times 80 = 88{,}2\ mm.$$

Bahoni o‘rtacha qiymat deb qarash mumkin. Tenglama 80 sm umumiy uzunlikka ega possumlar bosh uzunligining o‘rtacha qiymati 88,2 mm ekanligini bashorat qiladi. 80 sm uzunlikdagi possum haqida qo‘shimcha ma’lumot yo‘qligida, bosh uzunligini o‘rtacha qiymatdan foydalangan holda bashorat qilish foydali bo‘ladi.

M **8.1-MISOL**

Bosh uzunligini bashorat qilishda possumning umumiy uzunligidan tashqari yana qanday o‘zgaruvchilar yordam berishi mumkin?

Balki erkak possumlar va urg‘ochi possumlar o‘rtasida bog‘liqlik biroz boshqacha bo‘lishi mumkin yoki ehtimol Avstraliyaning bir hududidan boshqa hududiga o‘tganda possumlar orasida farq bo‘lishi mumkin. 9-bobda biz bir nechta bashoratlovchilarni qanday qo‘shishni o‘rganamiz. Ammo bunga o‘tishdan oldin, bir bashoratlovchi bilan oddiy chiziqli modelni qanday qurish qiziqroq ekanligini yaxshiroq tushunishimiz kerak.

8.1.3 Qoldiqlar

Qoldiqlar – bu model moslashuvi hisobga olingandan so‘ng ma’lumotlardagi qolgan o‘zgarishlar:

$$\text{Ma'lumotlar} = \text{Moslashuv} + \text{Qoldiq}.$$

Har bir kuzatuv uchun bitta qoldiq mavjud bo‘ladi va `possum` ma’lumotlari uchun moslashtirilgan chiziqli modelning uchta qoldig‘i 8.6–rasmda ko‘rsatilgan. Agar kuzatuv regressiya chizig‘idan yuqorida bo‘lsa, uning qoldig‘i ya’ni kuzatuvdan chiziqqa bo‘lgan vertikal masofa musbat bo‘ladi. Chiziqdan pastda joylashgan kuzatuvlarning qoldiqlari manfiy bo‘ladi. To‘g‘ri chiziqli modelni tanlashdagi maqsadlardan biri – ushbu qoldiqlarni iloji boricha kichik qilishdir.

Keling, 8.6-rasmda ko‘rsatilgan uchta qoldiqlarga jiddiyroq qaraylik. “×” bilan belgilangan kuzatuv kichik manfiy qoldiqqa ega bo‘lib, u taxminan -1 ga teng; “+” bilan belgilangan kuzatuv katta qoldiqqa ega bo‘lib, taxminan $+7$ ga teng; “△” bilan belgilangan kuzatuv esa o‘rtacha qoldiqqa ega bo‘lib, taxminan -4 ga teng. Qoldiq hajmi odatda uning mutlaq qiymati bilan baholanadi. Masalan, “△” uchun qoldiq “×” uchun qoldiqdan kattaroq, chunki $|-4|$ qiymat $|-1|$ dan kattaroq.

QOLDIQ – BU KUZATILGAN VA KUTILGAN QIYMATLAR O‘RTASIDAGI FARQ

i-kuzatuvning qoldig‘i $(x_i; y_i)$ - bu kuzatilgan javob qiymati (y_i) va model moslashuvi asosida kutilgan javob qiymati $(\hat{y}_i)$ o‘rtasidagi farqdir:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Biz odatda $\hat{y}_i$ ni modelga x_i ni qo‘shish orqali aniqlaymiz.

(M) **8.2-MISOL**

8.6-rasmda ko‘rsatilgan chiziqli moslashuv tenglamasi $\hat{y} = 41 + 0{,}59x$. Ushbu chiziq asosida $(77{,}0; 85{,}3)$ kuzatuvining qoldig‘ini hisoblang. Ushbu kuzatuv 8.6-rasmda “$\times$” bilan belgilangan. Avvalgi taxminiy baho -1 ni tekshiring.

Birinchidan, “$\times$” nuqtaning model asosidagi kutilgan qiymatini hisoblaymiz:

$$\hat{y}_\times = 41 + 0{,}59x_\times = 41 + 0{,}59 \times 77{,}0 = 86{,}4.$$

Keyin haqiqiy bosh uzunligi va kutilgan bosh uzunligi o‘rtasidagi farqni hisoblaymiz:

$$e_\times = y_\times - \hat{y}_\times = 85{,}3 - 86{,}4 = -1{,}1.$$

Modelning xatosi $e_\times = -1{,}1$ mm. Bu avvalgi taxminiy baho -1 mm ga juda yaqin. Manfiy qoldiq ushbu possum uchun chiziqli model bosh uzunligini ortiqcha baholaganligini bildiradi.

(Y) **8.3-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Agar model kuzatuvni past baholasa, qoldiq musbat bo‘ladimi yoki manfiy? Agar ortiqcha baholasa, qanday bo‘ladi?[1]

(Y) **8.4-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

8.6-rasmda “+” kuzatuv $(85{,}0; 98{,}6)$ va “$\triangle$” kuzatuv $(95{,}5; 94{,}0)$ uchun qoldiqlarni $\hat{y} = 41 + 0{,}59x$ chiziqli tenglama asosida hisoblang.[2]

Qoldiqlar chiziqli modelning ma’lumotlarga qanchalik mos kelishini baholashda foydalidir. Biz ko‘pincha qoldiqlarni **qoldiq grafigi** yordamida ko‘rsatamiz. Bunday grafik 8.7-rasmda, 8.6-rasmdagi regressiya chizig‘i uchun ko‘rsatilgan. Qoldiqlar o‘zlarining dastlabki gorizontal joylashuvlarida, lekin vertikal koordinat sifatida qoldiq qiymatlari bilan chiziladi. Masalan, $(85{,}0; 98{,}6)_+$ nuqtasi qoldiq qiymati 7,45 ga teng edi, shuning uchun qoldiq grafigida u $(85{,}0; 7{,}45)$ nuqtasida joylashadi. Qoldiq grafigini yaratish sochiluvchanlik diagrammasini ”burib”, regressiya chizig‘ini gorizontal qilib ko‘rsatishga o‘xshaydi.

(M) **8.5-MISOL**

Qoldiq grafigining maqsadlaridan biri, model moslashganidan so‘ng ham ma’lumotlarda mavjud bo‘lgan xususiyatlar yoki naqshlarni aniqlashdir. 8.8-rasmda birinchi qatorda chiziqli modellarga ega uchta sochiluvchanlik diagrammasi va ikkinchi qatorda ularning qoldiq grafiklari ko‘rsatilgan. Qoldiqlarda qolgan naqshlarni aniqlay olasizmi?

Birinchi ma’lumot to‘plamida (birinchi ustun) qoldiqlarda aniq naqshlar yo‘q. Qoldiqlar 0 ni ifodalaydigan kesikli chiziq atrofida tasodifiy tarqalgan ko‘rinadi.

Ikkinchi ma’lumot to‘plamida qoldiqlarda naqsh mavjud. sochiluvchanlik diagrammasida bir oz egri chiziqli tendentsiya bor, bu qoldiq grafigida yanada ravshan. Ushbu ma’lumotlar uchun to‘g‘ri chiziqdan foydalanmaslik kerak. Buning o‘rniga, murakkabroq usuldan foydalanish kerak.

[1] Agar model kuzatuvni past baholasa, unda model bahosi haqiqiy qiymatdan past bo‘ladi. Qoldiq, ya’ni haqiqiy kuzatuv qiymati minus model bahosi musbat bo‘ladi. Agar model kuzatuvni ortiqcha baholasa, qoldiq manfiy bo‘ladi.

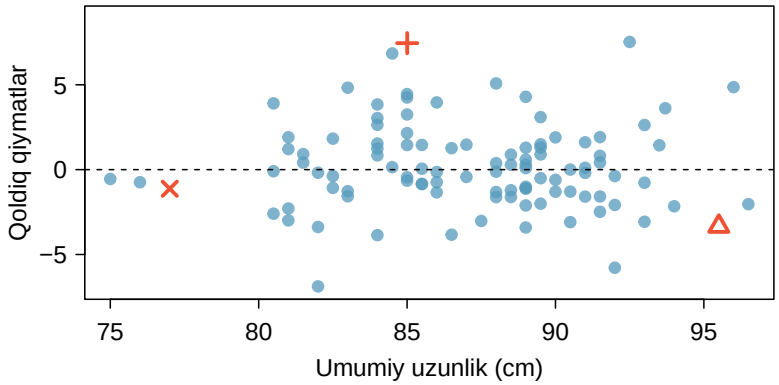
[2] (+) Avval model asosida kutilgan qiymatni hisoblang:

$$\hat{y}_+ = 41 + 0{,}59x_+ = 41 + 0{,}59 \times 85{,}0 = 91{,}15.$$

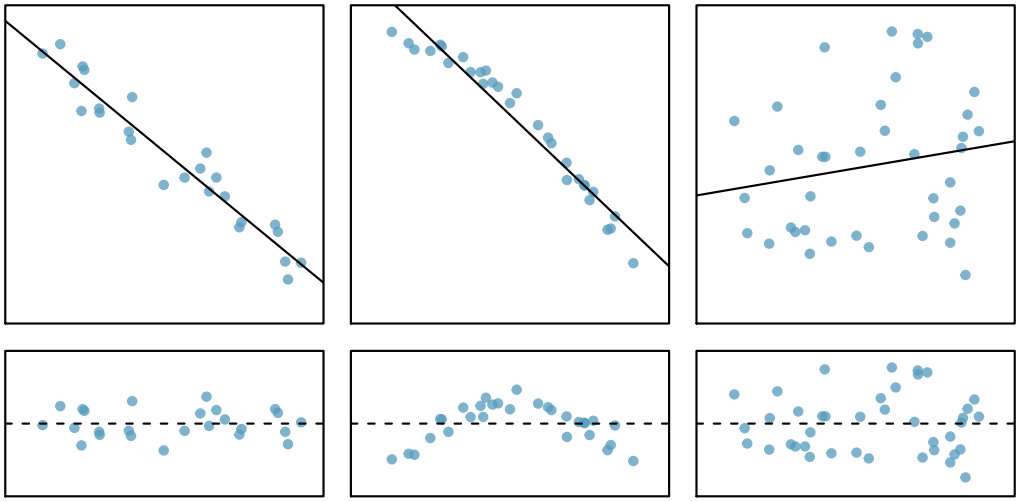
Keyin qoldiqni hisoblang:

$$e_+ = y_+ - \hat{y}_+ = 98{,}6 - 91{,}15 = 7{,}45.$$

Bu avvalgi taxminiy baho 7 ga juda yaqin. ($\triangle$) $\hat{y}_\triangle = 41 + 0{,}59x_\triangle = 97{,}3$. $e_\triangle = y_\triangle - \hat{y}_\triangle = -3{,}3$, bu avvalgi taxminiy baho -4 ga yaqin.



8.7-rasm. 8.6-rasmdagi model uchun qoldiq grafigi.



8.8-rasm. Misol sifatida olingan ma'lumotlar va ularga mos kelgan eng yaxshi chiziqli modellar (yuqori qator) hamda ularning mos qoldiq grafiklari (quyi qator).

Oxirgi grafikda juda kam yuqoriga qarab tendentsiya mavjud va qoldiqlarda ham aniq naqshlar yo'q. Ushbu ma'lumotlarga chiziqli modelni moslashtirish mantiqiy. Biroq, burchak koeffitsiyenti parametri nolga teng emasligi haqida statistik jihatdan ahamiyatli dalillar bor-yo'qligi aniq emas. Burchak koeffitsiyenti parametri b_1 ning nuqtaviy bahosi nolga teng emas, lekin bu shunchaki tasodif natijasi bo'lishi mumkin. Ushbu holatni biz 8.4-bo'limida muhokama qilamiz.

8.1.4 Chiziqli bog'liqlikni korrelyatsiya bilan tavsiflash

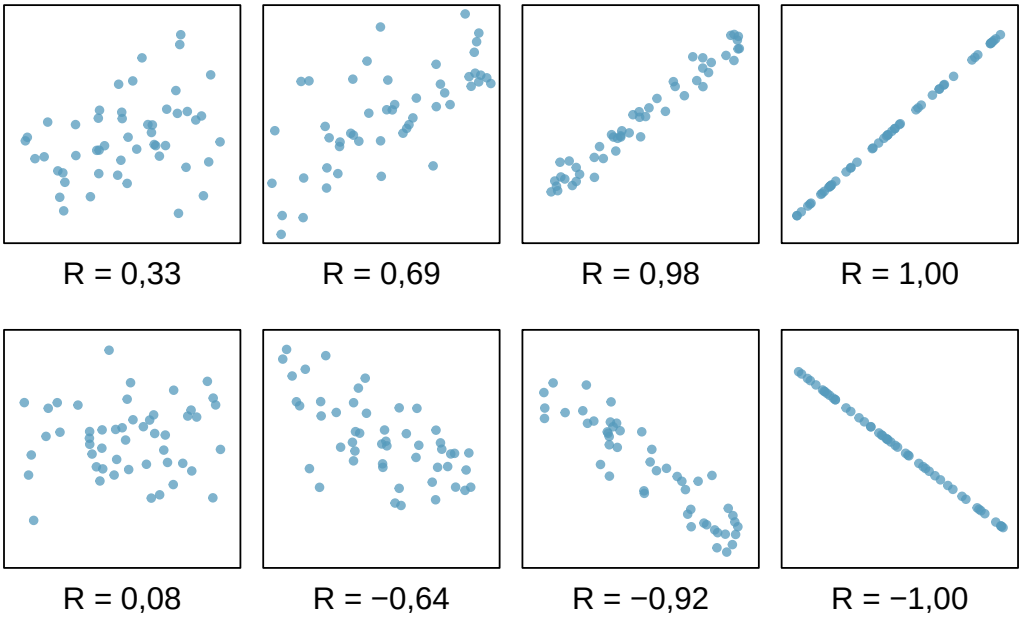
Biz kuchli chiziqli bog'liqlikka ega grafiklarni ham juda zaif chiziqli bog'liqlikka ega grafiklarni ham ko'rdik. Ushbu chiziqli bog'liqlikning kuchini statistika yordamida miqdoriy baholash foydali bo'ladi.

KORRELYATSIYA – BU CHIZIQLI BOG'LIQLIK KUCHI

Korrelyatsiya har doim -1 dan 1 gacha oraliqdagi qiymatlarni oladi va kki o'zgaruvchi orasidagi chiziqli bog'liqlik kuchini tavsiflaydi. Korrelyatsiya R harfi bilan belgilanadi.

Korrelyatsiyani xuddi tanlanma o'rtacha yoki standart chetlanishlarni hisoblaganimiz kabi formula yordamida hisoblashimiz mumkin. Ushbu formula juda murakkab,[3] va boshqa statistikalar kabi, hisob-kitoblar odatda kompyuter yoki kalkulyatorda bajariladi. 8.9-rasm sakkizta

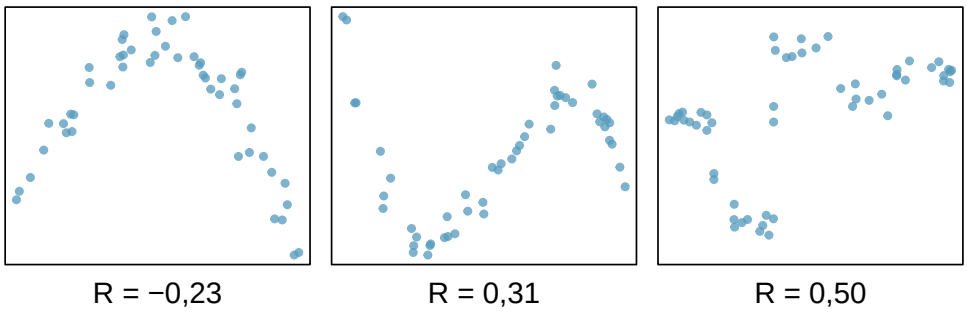
[3]Formal ravishda, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, ..., $(x_n; y_n)$ kuzatuvlari uchun korrelyatsiyani quyidagi formula yordamida



8.9-rasm. Misol sifatida olingan sochma diagrammalar va ularning korrelyatsiyalari. Yuqori qator ijobiy bog‘liqlikka ega o‘zgaruvchilarni ko‘rsatadi. Ularning tendentsiyasi yuqoriga va o‘ngga yo‘naltirilgan. Quyi qator neytral tendentsiyaga ega bitta grafikni va uchta manfiy tendentsiyaga ega grafiklarni ko‘rsatadi.

grafik va ularning mos korrelyatsiyalarini ko‘rsatadi. Faqat bog‘liqlik mukammal darajada chiziqli bo‘lgandagina korrelyatsiya -1 yoki 1 bo‘ladi. Agar bog‘liqlik kuchli va musbat bo‘lsa, korrelyatsiya +1 ga yaqin bo‘ladi. Agar u kuchli va manfiy bo‘lsa, korrelyatsiya -1 ga yaqin bo‘ladi. Agar o‘zgaruvchilar orasida chiziqli bog‘liqlik sezilmasa, korrelyatsiya 0 ga yaqin bo‘ladi.

Korrelyatsiya chiziqli tendentsiyaning kuchini miqdoriy baholash uchun mo‘ljallangan. Ba’zan chiziqli bo‘lmagan tendentsiyalarda bog‘lanish kuchli bo‘lsa ham uni korrelyatsiya yordamida to‘liq aks ettirib bo‘lmaydi. Bunday holatlarga 8.10-rasmda uchta misol ko‘rsatilgan.



8.10-rasm. Misol sifatida olingan sochiluvchanlik diagrammasilar va ularning korrelyatsiyalari. Har bir holatda, o‘zgaruvchilar orasida kuchli bog‘liqlik mavjud. Biroq, bog‘liqlik chiziqli bo‘lmaganligi sababli, korrelyatsiya nisbatan zaif.

8.6-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

8.10-rasmda ko‘rsatilgan ma’lumotlar to‘plamlari uchun hech qanday to‘g‘ri chiziq yaxshi mos kelmaydi. Har bir grafik uchun chiziqli bo‘lmagan egri chiziqlarni chizib ko‘ring. Har bir grafik uchun chiziqni yaratganingizdan so‘ng, ushbu moslashuvda nimalar muhim ekanligini tasvirlang.[4]

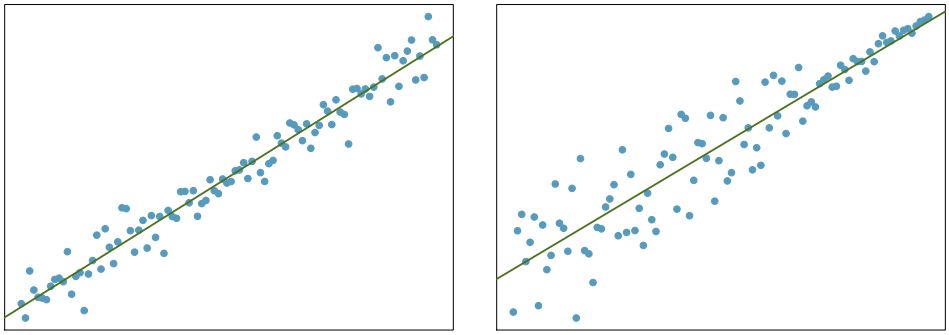
hisoblashimiz mumkin:

$$R = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}$$

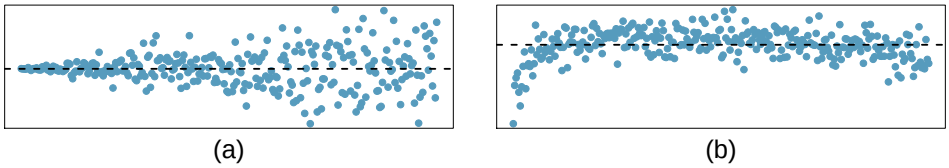
bu yerda $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_x va s_y har bir o‘zgaruvchi uchun tanlanma o‘rtacha va standart chetlanishlarni ifodalaydi.

Mashqlar

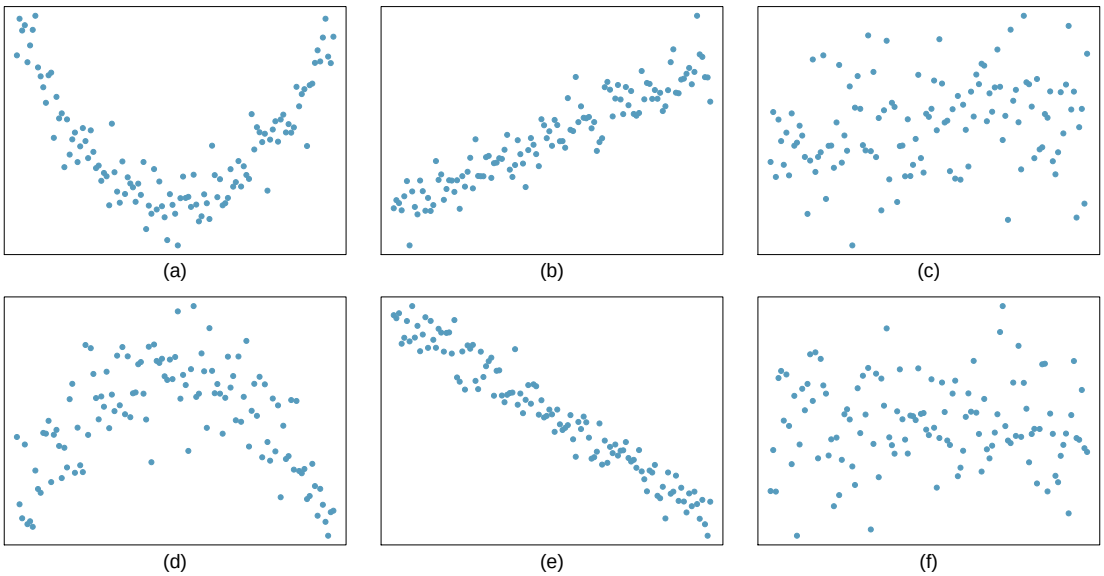
8.1 Qoldiqlarni vizuallashtirish. Quyidagi nuqtali diagrammalar ustida regressiya chizig‘i keltirilgan. Agar har biri uchun qoldiqlar grafigi (x ga nisbatan qoldiqlar) tuzilsa, ushbu grafik qanday ko‘rinishga ega bo‘ladi, tasvirlab bering.



8.2 Qoldiqlardagi tendensiyalar. Quyida ikki xil ma’lumotlar to‘plamiga chiziqli model moslashtirilgandan keyin qolgan qoldiqlar grafigi keltirilgan. Muhim xususiyatlarni tasvirlab bering va ushbu ma’lumotlar uchun chiziqli model mos keladimi yoki yo‘qmi aniqlang. Fikringizni tushuntiring.

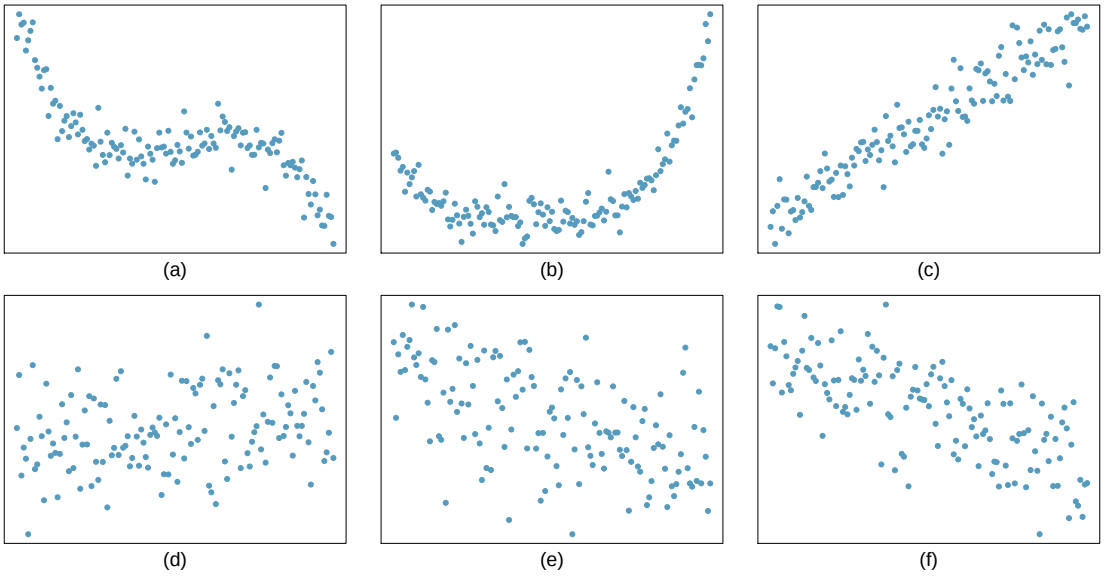


8.3 Bog‘liqlikni aniqlash, 1-qism. Quyidagi oltita nuqtali diagramma uchun ma’lumotlardagi bog‘liqlikning kuchini (zaif, o‘rta yoki kuchli) aniqlang va chiziqli modelni moslash maqsadga muvofiq bo‘ladimi yoki yo‘qligini baholang.



8.4 Bog‘liqlikni aniqlash, 2-qism. Quyidagi oltita nuqtali diagramma uchun ma’lumotlardagi bog‘liqlikning kuchini (zaif, o‘rta yoki kuchli) aniqlang va chiziqli modelni moslash maqsadga muvofiq bo‘ladimi yoki yo‘qligini baholang.

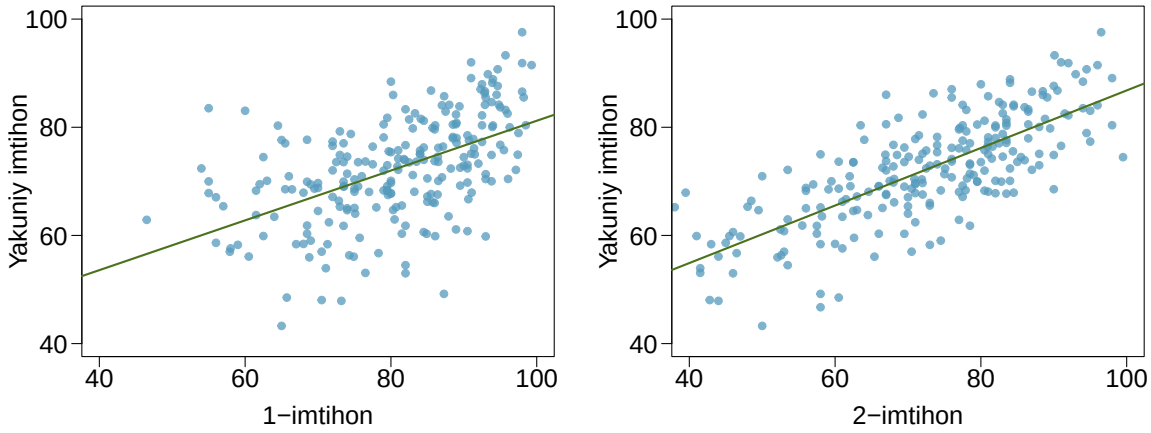
[4]Chiziqlarni chizishni sizga qoldiramiz. Umuman olganda, chizgan chiziqlaringiz ko‘plab nuqtalarga yaqin bo‘lishi va ma’lumotlardagi umumiy tendentsiyalarni o‘zida aks ettirishi kerak.



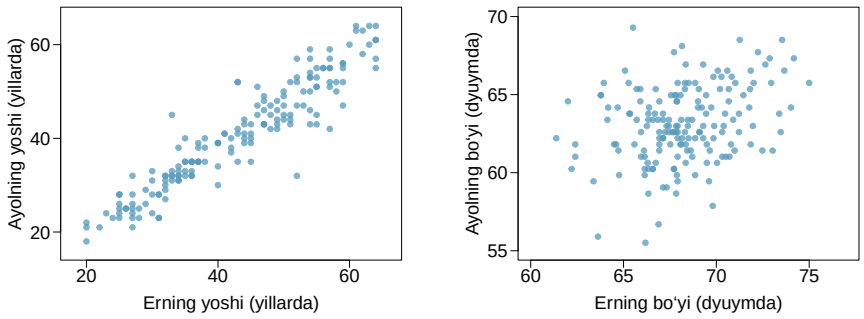
8.5 Imtihonlar va baholar. Quyidagi ikkita nuqtali diagramma universitetda o‘tilgan statistika kursining bir necha yillar davomida yozilgan yakuniy va oraliq semestr imtihon baholari o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi.

(a) Ushbu grafikalar asosida, yakuniy imtihon bahosi bilan qaysi imtihonning korrelatsiyasi kuchliroq? Izohlang.

(b) (a)-qismda tanlangan imtihon bilan yakuniy imtihon o‘rtasidagi korrelatsiya yuqoriroq bo‘lishi mumkin bo‘lgan sabablar haqida fikr yuriting.



8.6 Er va xotinlar, 1-qism. Buyuk Britaniya aholini ro‘yxatga olish va tadqiqotlar idorasi bir vaqtlar Britaniyadagi 170 ta tasodifiy tanlangan turmush qurgan juftlikning yoshi (yillarda) va bo‘yi (bu yerda dyuymlarga o‘zgartirilgan) haqidagi ma’lumotlarni to‘plagan.[5] Chapdagi nuqtali diagramma xotin yoshini eri yoshi bilan, o‘ngdagi esa xotin bo‘yini eri bo‘yi bilan solishtiradi.

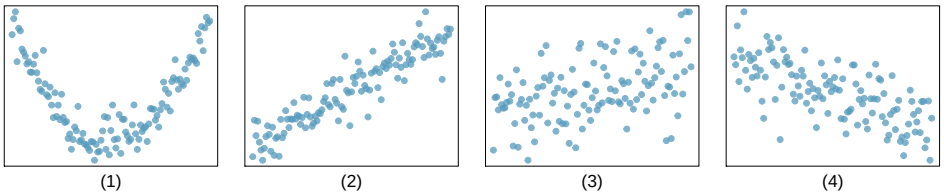


[5]D.J. Hand. *A handbook of small data sets.* Chapman & Hall/CRC, 1994.

(a) Er va xotin yoshlaridagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.
(b) Er va xotin bo‘ylaridagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.
(c) Qaysi nuqtali diagramma kuchliroq korrelatsiyani ko‘rsatadi? Fikringizni tushuntiring.
(d) Bo‘ylar haqidagi ma’lumotlar dastlab santimetrlarda yig‘ilgan va keyin dyuymlarga o‘zgartirilgan. Ushbu o‘zgartirish er va xotin bo‘ylari o‘rtasidagi korrelatsiyaga ta’sir qiladimi?

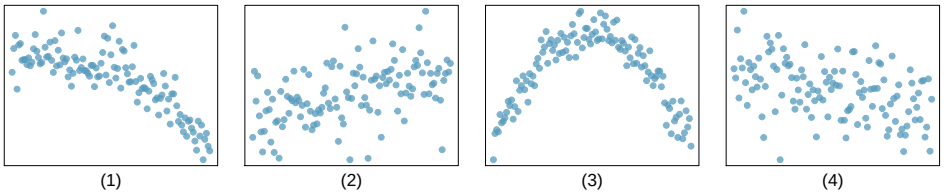
8.7 Korrelatsiyani moslang, 1-qism. Har bir korrelatsiyani mos nuqtali diagramma bilan moslang.

(a) $R = -0{,}7$
(b) $R = 0{,}45$
(c) $R = 0{,}06$
(d) $R = 0{,}92$

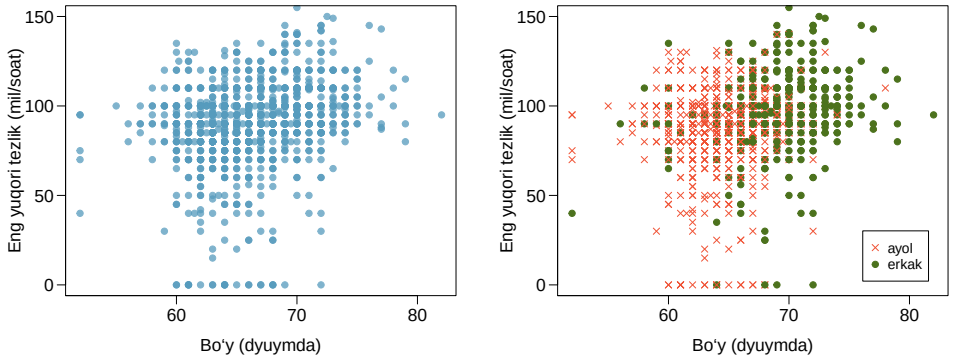


8.8 Korrelatsiyani moslang, 2-qism. Har bir korrelatsiyani mos nuqtali diagramma bilan moslang.

(a) $R = 0{,}49$
(b) $R = -0{,}48$
(c) $R = -0{,}03$
(d) $R = -0{,}85$



8.9 Tezlik va bo‘y. 1302 ta UCLA talabasidan so‘rov o‘tkazilib, ulardan bo‘ylari, haydagan maksimal tezligi va jinsi haqida ma’lumotlar yig‘ildi. Chapdagi nuqtali diagramma bo‘y va maksimal tezlik o‘rtasidagi bog‘liqlikni, o‘ngdagi esa ushbu bog‘liqlikda jinsning rolini ko‘rsatadi.



(a) Bo‘y va maksimal tezlik o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.
(b) Ushbu o‘zgaruvchilar nima uchun ijobiy bog‘liq deb o‘ylaysiz?
(c) Bo‘y va maksimal tezlik o‘rtasidagi bog‘liqlikda jins qanday rol o‘ynaydi?

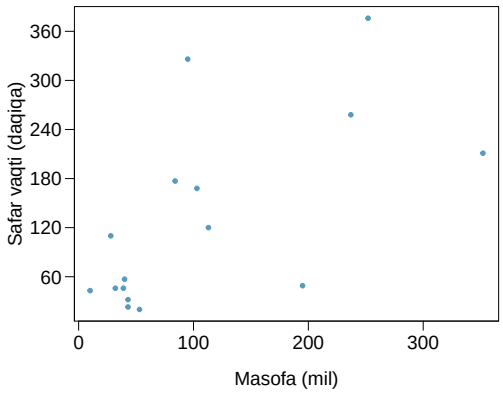
8.10 Korrelatsiyani taxmin qiling. Eduardo va Rosie bir yil davomida yomg‘irli kunlar soni va yil davomida yog‘gan jami yomg‘ir miqdorini o‘rganmoqda. Eduardo yomg‘ir miqdorini dyuymda, Rosie esa santimetrda qayd qiladi. Ularning korrelatsiya koeffitsientlari qanday taqqoslanadi?

8.11 Coast Starlight, 1-qism. Coast Starlight Amtrak poezdi Seattledan Los Angelesga harakatlanadi. Quyidagi nuqtali diagramma har bir bekat orasidagi masofani (mil bilan) va bir bekatdan boshqasiga o‘tish uchun sarflangan vaqtni (daqiqalarda) ko‘rsatadi.

(a) Masofa va sayohat vaqti o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Agar sayohat vaqti soatlar bilan, masofa esa kilometrlar bilan o‘lchansa, bog‘liqlik qanday o‘zgaradi?

(c) Sayohat vaqti (daqiqalarda) va masofa (mil bilan) o‘rtasidagi korrelatsiya $r = 0{,}636$. Agar sayohat vaqti soatlar bilan va masofa kilometrlar bilan o‘lchansa, korrelatsiya qanday bo‘ladi?

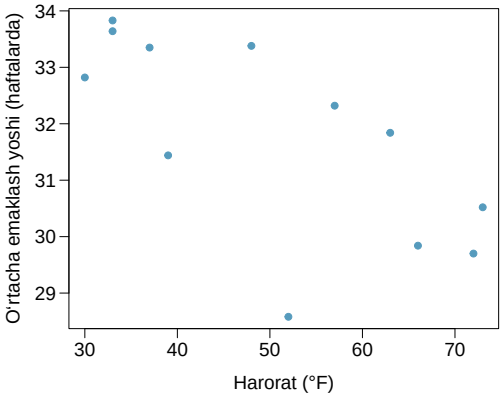


8.12 Bolalarning emaklash yoshi, 1-qism. Denver Universitetida o‘tkazilgan tadqiqotda sovuq oylarda chaqaloqlar issiq kiyimda bo‘lishi va harakati cheklanganligi sababli emaklashni o‘rganishi uchun ko‘proq vaqt talab etilishi mumkinmi degan savol o‘rganildi.[6] Tadqiqot o‘tkazilayotgan yil davomida tug‘ilgan chaqaloqlar har bir tug‘ilish oyi uchun o‘n ikki guruhga bo‘lindi. Har bir guruhdagi chaqaloqlarning o‘rtacha emaklash yoshi ularning olti oylik bo‘lgan vaqtidagi o‘rtacha haroratga qarshi qo‘yildi. Harorat Farengeyt (°F) bilan, yosh esa haftalarda o‘lchandi.

(a) Harorat va emaklash yoshi o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Agar harorat Selsiy (°C) bilan va yosh oylar bilan o‘lchansa, bog‘liqlik qanday o‘zgaradi?

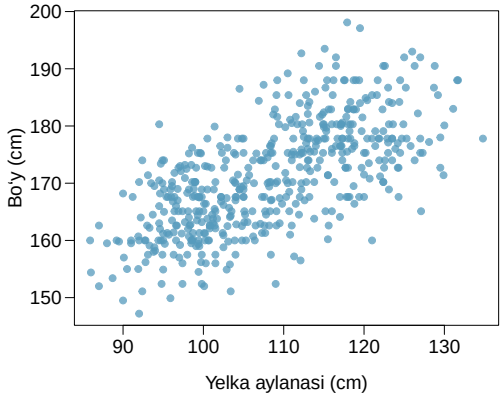
(c) Harorat (°F) va yosh (haftalarda) o‘rtasidagi korrelatsiya $r = -0{,}70$. Agar harorat Selsiy (°C) va yosh oylar bilan o‘lchansa, korrelatsiya qanday bo‘ladi?



8.13 Tana o‘lchovlari, 1-qism. Antropometriyani o‘rganayotgan tadqiqotchilar 507 nafar jismoniy faol shaxsning tana o‘lchovlari va suyak diametrlari, shuningdek yoshi, vazni, bo‘yi va jinsi haqida ma’lumot yig‘ishdi.[7] Quyidagi nuqtali diagramma bo‘y va yelka o‘lchami (deltoid mushaklari ustidan) o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi, ikkalasi ham santimetrlarda o‘lchangan.

(a) Yelka o‘lchami va bo‘y o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Agar yelka o‘lchami dyuymda, bo‘y esa santimetrlarda o‘lchansa, bog‘liqlik qanday o‘zgaradi?

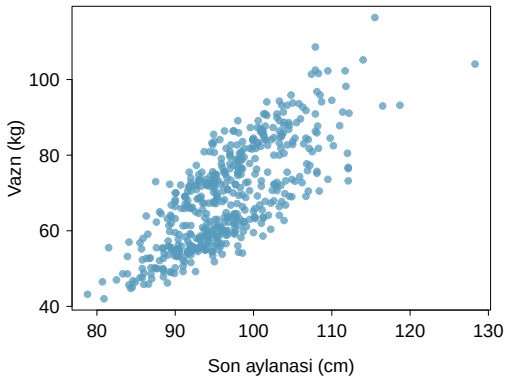


8.14 Tana o‘lchovlari, 2-qism. Quyidagi nuqtali diagramma vazn (kilogrammda) va son qismi o‘lchami (santimetrlarda) o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi. Ushbu ma’lumotlar 8.13-mashqda tasvirlangan ma’lumotlar asosida keltirilgan.

[6] J.B. Benson. “Season of birth and onset of locomotion: Theoretical and methodological implications”. In: *Infant behavior and development* 16.1 (1993), pp. 69–81. ISSN: 0163-6383.

[7] G. Heinz et al. “Exploring relationships in body dimensions”. In: *Journal of Statistics Education* 11.2 (2003).

(a) Son o‘lchami va vazn o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.
(b) Agar vazn funtda, sonning o‘lchami esa santimetrlarda o‘lchansa, bog‘liqlik qanday o‘zgaradi?



8.15 Korrelatsiya, 1-qism. Erlar va ayollar yoshi o‘rtasidagi korrelatsiya qanday bo‘ladi, agar erkaklar doim:
(a) o‘zlaridan 3 yosh kichik ayollar bilan turmush qurishsa?
(b) o‘zlaridan 2 yosh katta ayollar bilan turmush qurishsa?
(c) o‘zlaridan ikki baravar kichik ayollar bilan turmush qurishsa?

8.16 Korrelatsiya, 2-qism. Kompaniyada erkaklar va ayollarning yillik maoshlari o‘rtasidagi korrelatsiya qanday bo‘ladi? Agar bir turdagi lavozim uchun erkaklar doim:
(a) ayollarga qaraganda $5000 ko‘proq maosh olishsa?
(b) ayollarga qaraganda 25% ko‘proq maosh olishsa?
(c) ayollarga qaraganda 15% kamroq maosh olishsa?

8.2 Eng kichik kvadratlar usuli yordamida regressiya

Ko‘z bilan chiziqli modellarni moslashtirish tanqid qilishga arzigulik holat. Chunki bu shaxsiy qarashlarga asoslangan bo‘ladi. Ushbu bo‘limda biz *eng kichik kvadratlar usuli*ni yanada qat’iy yondashuv sifatida ishlatamiz.

8.2.1 Elmhurst kollejining birinchi kurs talabalari uchun yordam

Ushbu bo‘limda Illinoys shtatidagi “Elmhurst” kollejining birinchi kurs talabalari orasidan tasodifiy tanlangan ellik nafar talabadan olingan oila daromadi va yordam ma’lumotlari ko‘rib chiqiladi. yordam — bu qarzdan farqli o‘laroq, qaytarilishi kerak bo‘lmagan moliyaviy yordamdir. Ma’lumotlarning tarqoqlik diagrammalari 8.11-rasmda ko‘rsatilgan bo‘lib, ikkita chiziqli moslashuv keltirilgan. Chiziqlar ma’lumotlardagi salbiy tendentsiyani ifodalaydi. Ya’ni yuqori oila daromadiga ega talabalarda universitetdan kamroq yordam olishgan.

Y **8.7-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

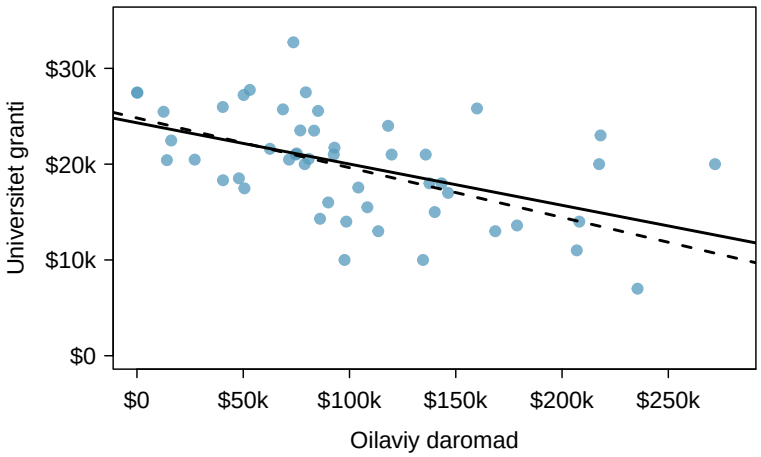
8.11-rasmdagi korrelyatsiya musbatmi yoki manfiy?[8]

8.2.2 Eng mos to‘g‘ri chiziqni topishning obyektiv mezoni

Dastlab, “eng yaxshi” deganda nimani nazarda tutganimizni o‘ylab ko‘ramiz. Matematik jihatdan, biz qoldiqlari kichik bo‘lgan chiziqni xohlaymiz. Birinchi fikr qoldiq kattaliklarining yig‘indisini minimallashtirish bo‘lishi mumkin:

$$|e_1| + |e_2| + \cdots + |e_n|.$$

[8]Oilaviy daromadning yuqoriligi yordam miqdorining kamligi bilan bog‘liq, shuning uchun korrelyatsiya manfiy bo‘ladi. Kompyuter yordamida korrelyatsiya hisoblanganda u -0.499 ga teng bo‘ldi.



8.11-rasm. Elmhurst kollejining 50 nafar birinchi kurs talabasi uchun yordam va oila daromadi. Ma'lumotlarga ikkita chiziq moslashtirilgan. Ulardan biri *eng kichik kvadratlar chizig'i*.

Buni kompyuter dasturi yordamida amalga oshirish mumkin. 8.11-rasmda ko'rsatilgan uzuq-uzuq chiziq ushbu moslik ancha asosli bo'lishi mumkinligini namoyish etadi. Biroq, qoldiqlar kvadratlarining yig'indisini minimallashtiradigan to'g'ri chiziqni tanlash odatiyroq amaliyot hisoblanadi:

$$e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2.$$

Ushbu **eng kichik kvadratlar mezoni**ni minimallashtiruvchi chiziq 8.11-rasmdagi uzluksiz chiziq bilan tasvirlangan. Bu odatda **eng kichik kvadratlar chizig'i** deb ataladi. Qoldiqlarni kvadratga oshirmasdan, ularning mutloq qiymatlari (modullari) yig'indisini minimallashtirish o'rniga, aynan ushbu variantni tanlashning uchta ehtimoliy sababi quyidagilardir:

1. Bu eng keng tarqalgan usul hisoblanadi.
2. Statistik dasturlarda eng kichik kvadratlar chizig'ini hisoblash keng qo'llab-quvvatlanadi.
3. Ko'plab amaliyotlarda, boshqa qoldiqdan ikki baravar katta bo'lgan qoldiq ikki baravardan ko'proq "yomon" hisoblanadi. Masalan, 4 ga farq qilish odatda 2 ga farq qilishdan ikki baravar ko'proq zararli hisoblanadi. Qoldiqlarning kvadratlarini olish ushbu tafovutni hisobga oladi.

Birinchi ikki sabab asosan an'ana va qulaylik uchun; oxirgi sabab esa eng kichik kvadratlar mezoni odatda nima uchun foydali ekanligini tushuntiradi.[9]

8.2.3 Eng kichik kvadratlar chizig'i uchun shartlar

Eng kichik kvadratlar chizig'ini moslashtirganda, odatda quyidagi shartlar talab qilinadi:

Chiziqlilik. Ma'lumotlar chiziqli tendentsiyani ko'rsatishi kerak. Agar chiziqli bo'lmagan tendentsiya mavjud bo'lsa (masalan, 8.12-rasmning chap panelida), ushbu kitobning boshqa qismida yoki keyingi kursda ko'rib chiqiladigan murakkab regressiya usulidan foydalanish lozim.

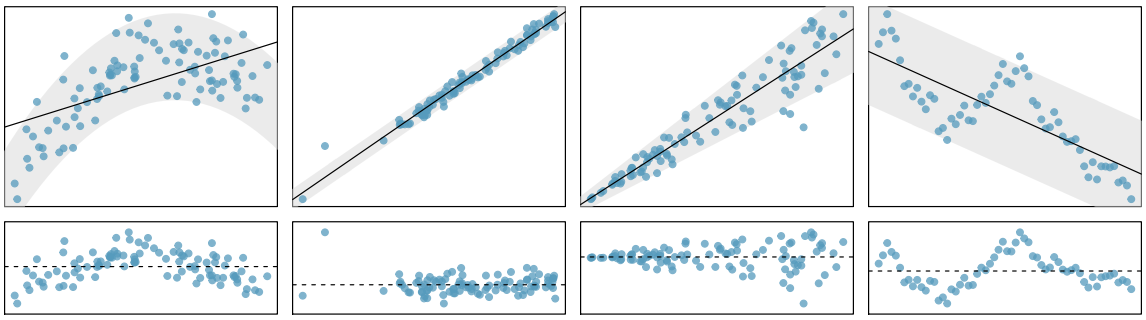
Qoldiqlarning deyarli normal taqsimlanishi. Umuman olganda, qoldiqlar deyarli normal taqsimlangan bo'lishi kerak. Ushbu shartning bajarilmasligi odatda chetlashgan nuqtalar yoki ta'sirchan nuqtalar bilan bog'liq bo'ladi; bular haqida 8.3-bo'limda batafsilroq to'xtalamiz. Xavotirga sabab bo'lishi mumkin bo'lgan qoldiqqa misol 8.12-rasmda ko'rsatilgan bo'lib, unda bir kuzatuv boshqalariga qaraganda regressiya chizig'idan sezilarli darajada uzoqroqda joylashgan.

Doimiy o'zgaruvchanlik. Eng kichik kvadratlar chizig'i atrofidagi nuqtalar o'zgaruvchanligi taxminan doimiy bo'lishi kerak. O'zgaruvchanlikning doimiy emasligiga misol 8.12-rasmning uch-

[9]Ba'zi holatlarda qoldiq kattaliklari yig'indisi yanada foydaliroq bo'lishi mumkin va biz boshqa mezonlarni ham qo'llashimiz mumkin. Biroq, ushbu kitob faqat eng kichik kvadratlar mezoniga asoslanadi.

inchi panelida ko‘rsatilgan. Bu shart bajarilmaganida eng keng tarqalgan naqshni ifodalaydi. Ya’ni x kattaroq bo‘lganda, y ning o‘zgaruvchanligi ham kattalashadi.

Mustaqil kuzatuvlar. **Vaqtli qatorlar** ma’lumotlariga regressiya qo‘llashda ehtiyot bo‘lish lozim. Bunday ma’lumotlar vaqt bo‘yicha ketma-ket kuzatuvlarni, masalan, har kungi aksiyalar narxini ifodalashi mumkin. Bunday ma’lumotlarda model va tahlilda hisobga olinishi kerak bo‘lgan ichki tuzilmalar bo‘lishi mumkin. Masalan, 8.12-rasmning to‘rtinchi panelida ketma-ket kuzatuvlar mustaqil bo‘lmagan ma’lumotlar to‘plami tasvirlangan. Bundan tashqari, ma’lumotlar ichidagi korrelyatsiyalar muhim bo‘lgan boshqa holatlar mavjud bo‘lib, ular haqida 9-bobda batafsil ma’lumot beriladi.



8.12-rasm. To‘rtta misol ushbu bobdagi usullar ma’lumotlarga qo‘llash uchun yetarli bo‘lmagan holatlarni ko‘rsatadi. Birinchi panel: chiziqlilik sharti bajarilmagan. Ikkinchi panel: chetlangan nuqtalar mavjud, ayniqsa, bitta nuqta chiziqdan juda uzoqda joylashgan. Uchinchi panel: xatoliklarning o‘zgaruvchanligi x qiymatiga bog‘liq. To‘rtinchi panel: vaqtli qatorlar ma’lumotlari, bunda ketma-ket kuzatuvlar bir-biri bilan kuchli korrelyatsiyaga ega.

Y

8.8-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

8.11-rasmdagi Elmhurst ma’lumotlariga eng kichik kvadratlar regressiyasini qo‘llash haqida xavotir bo‘lishi kerakmi?[10]

8.2.4 Eng kichik kvadratlar chizig‘ini topish

Elmhurst ma’lumotlari uchun eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘ining tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\widehat{yordam} = \beta_0 + \beta_1 \times oila_daromadi\ .$$

Bu yerda tenglama talabalar uchun yordamni talabaning oila daromadiga asoslangan holda bashorat qilish uchun tuzilgan. Bu Elmhurstni ko‘rib chiqayotgan talabalar uchun foydali bo‘lishi mumkin. Ushbu ikkita β_0 va β_1 qiymatlar regressiya chizig‘ining parametrlaridir.

Xuddi 5-, 6-, va 7-boblarda bo‘lgani kabi, parametrlar kuzatilgan ma’lumotlardan foydalanib baholanadi. Amaliyotda, ushbu baholash kompyuter yordamida amalga oshiriladi, xuddi boshqa baholar, masalan, tanlanma o‘rtacha qiymat, kompyuter yoki kalkulyator yordamida hisoblanishi mumkin bo‘lgani kabi. Biroq, parametrlarning baholarini eng kichik kvadratlar chizig‘ining ikki xossasini qo‘llash orqali ham topishimiz mumkin:

- Eng kichik kvadratlar chizig‘ining burchak koeffitsiyenti quyidagicha baholanishi mumkin:

$$b_1 = \frac{s_y}{s_x} R$$

bu yerda R ikki o‘zgaruvchi o‘rtasidagi korrelyatsiyani ifodalaydi, s_x va s_y esa mos ravishda tushuntiruvchi va javob o‘zgaruvchilarining tanlanma standart chetlanishlari.

[10] Tendentsiya chiziqli ko‘rinadi, ma’lumotlar chiziq atrofida joylashgan va sezilarli anomaliyalar yo‘q. o‘zgaruvchanlik taxminan doimiy va bu vaqt seriyasi kuzatuvlari emas. Ushbu ma’lumotlarga eng kichik kvadratlar regressiyasini qo‘llash mumkin.

- Agar $\bar{x}$ tushuntiruvchi o‘zgaruvchining tanlanma o‘rtacha qiymati va $\bar{y}$ vertikal o‘zgaruvchining tanlanma o‘rtacha qiymati bo‘lsa, unda $(\bar{x}; \bar{y})$ nuqta eng kichik kvadratlar chizig‘ida joylashgan bo‘ladi. 8.13-rasmda oila daromadi va yordamning tanlanma o‘rtacha qiymatlari mos ravishda \$101780 va \$19940 sifatida ko‘rsatilgan. Biz (101,8; 19,94) nuqtani 295-betdagi 8.11-rasmga joylashtirib, u uzluksiz chiziqda joylashganligini tasdiqlashimiz mumkin.

Keyingi qadamda, β_0 va β_1 parametrlarining b_0 va b_1 nuqtaviy baholarini topamiz.

	Oila daromadi (x)	yordam (y)
O‘rtacha	$\bar{x} = \$101780$	$\bar{y} = \$19940$
Standart chetlanish	$s_x = \$63200$	$s_y = \$5460$
		$R = -0{,}499$

8.13-rasm. Oila daromadi va yordam uchun umumlashtiruvchi statistika.

Y **8.9-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

8.13-rasmdagi umumlashtiruvchi statistikadan foydalangan holda oila daromadiga nisbatan yordam regressiya chizig‘ining burchak koeffitsientini hisoblang.[11]

Siz matematika darsidan **nuqta-burchak koeffitsiyenti** shaklidagi formulani eslashingiz mumkin, bu bizga model moslashuvini, shu jumladan b_0 bahosini topishga imkon beradi. Chiziq burchak koeffitsiyenti koeffitsienti va chiziqdagi biror nuqta, (x_0, y_0), berilgan bo‘lsa, chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$y - y_0 = burchak\ koeffitsiyenti \times (x - x_0).$$

ENG KICHIK KVADRATLAR CHIZIG‘INI UMUMLASHTIRUVCHI STATISTIKADAN ANIQLASH

Eng kichik kvadratlar chizig‘ini umumlashtiruvchi statistikadan aniqlash uchun:

- Burchak koeffitsiyenti parametrini baholang, $b_1 = (s_y/s_x)R$.
- $(\bar{x}; \bar{y})$ nuqtasi eng kichik kvadratlar chizig‘ida joylashganligini hisobga olib, nuqta-burchak koeffitsiyenti tenglamasidan foydalaning: $y - \bar{y} = b_1(x - \bar{x})$, bu yerda $x_0 = \bar{x}$ va $y_0 = \bar{y}$.
- Tenglamani soddalashtiring, natijada $b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ hosil bo‘ladi.

M **8.10-MISOL**

Tanlanma o‘rtacha qiymatlar (101780; 19940) va 8.9-yo‘naltirilgan mashqdagi $b_1 = -0{,}0431$ burchak koeffitsiyenti bahosidan foydalanib, oila daromadiga asoslangan yordamni bashorat qilish uchun eng kichik kvadratlar chizig‘ini toping.

Nuqta-burchak koeffitsiyenti tenglamasini (101,78; 19,94) va $b_1 = -0{,}0431$ burchak koeffitsiyenti qiymati bilan qo‘llang:

$$y - y_0 = b_1(x - x_0)$$
$$y - 19940 = -0{,}0431(x - 101780).$$

O‘ng tomonni kengaytirib va har ikki tomonga 19940 ni qo‘shib, tenglama soddalashtiriladi:

$$\widehat{yordam} = 24327 - 0{,}0431 \times oila_daromadi\ .$$

Bu yerda biz tenglamani masala mazmunidan kelib chiqib ifodalash uchun y ni $\widehat{yordam}$ va x ni *oila_daromadi* bilan almashtirdik. Yakuniy tenglama har doim bashorat qilinayotgan o‘zgaruvchi ustida “shlyapa” belgisini o‘z ichiga olishi kerak, bu umumiy “y” yoki nomlangan “*yordam*” o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin.

[11] 8.13-rasmdagi umumlashtiruvchi statistikadan foydalangan holda burchak koeffitsiyentini hisoblang:

$$b_1 = \frac{s_y}{s_x}R = \frac{5460}{63200}(-0{,}499) = -0{,}0431.$$

Odatda eng kichik kvadratlar chizig‘ini hisoblash uchun kompyuter ishlatiladi va Elmhurst regressiya chizig‘i uchun dasturiy ta’minot yordamida yaratilgan umumiy jadval 8.14-rasmda ko‘rsatilgan. Birinchi ustundagi sonlar mos ravishda b_0 va b_1 baholarni beradi. Ushbu natijalar 8.10-misoldagi natijalar bilan mos keladi (ba’zi kichik xatoliklar bilan).

	Baholash	Standart xatolik	t qiymati	Pr(>|t|)
Ozod had	24319,3	1291,5	18,83	<0,0001
oila_daromadi	-0,0431	0,0108	-3,98	0,0002

8.14-rasm. Elmhurst ma’lumotlari uchun eng kichik kvadratlar regressiya natijalarining xulosasi. Parametrlarning birinchi ustundagi baholarini 8.10-misoldagi natijalar bilan solishtiring.

8.11-MISOL

8.14-rasmdagi ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi ustunlarni o‘rganing. Ular nimani anglatishini taxmin qilishingiz mumkinmi? (Agar siz hali inference bo‘yicha biror bobni o‘rganmagan bo‘lsangiz, ushbu misoldan o‘ting.)

Biz ustunlarning ma’nosini β_1 ga tegishli bo‘lgan ikkinchi qatordan foydalanib tushuntiramiz. Birinchi ustun β_1 uchun nuqta bahosini beradi, bu biz avvalgi misolda hisoblaganimiz: $b_1 = -0{,}0431$. Ikkinchi ustun ushbu nuqta bahosi uchun standart xatoni ko‘rsatadi: $SX_{b_1} = 0{,}0108$. Uchinchi ustun $\beta_1 = 0$ null gipotezasi uchun t-test statistikasi: $T = -3{,}98$. So‘nggi ustun $\beta_1 = 0$ null gipotezasi va ikki tomonlama muqobil gipoteza uchun t-test statistikasi uchun p qiymatini ko‘rsatadi: 0,0002. Ushbu tafsilotlar haqida ko‘proq 8.4-bo‘limida o‘rganamiz.

8.12-MISOL

Bir o‘rta maktab bitiruvchisi Elmhurst kollejini ko‘rib chiqayotgan bo‘lsa, universitetdan moliyaviy yordamni hisoblash uchun biz hisoblagan chiziqli tenglamadan foydalanishi mumkinmi?

U ushbu tenglamadan taxmin sifatida foydalanishi mumkin, lekin bu yondashuvning ba’zi cheklovlarini tushunish muhim. Birinchidan, ma’lumotlar faqat bitta birinchi kurs talabalari guruhidan olingan, va universitetning yordamni aniqlash usuli yil sayin o‘zgarishi mumkin. Ikkinchidan, tenglama mukammal taxmin bermaydi. Chiziqli tenglama ma’lumotlardagi tendentsiyani yaxshi aks ettirsa-da, hech bir talabaning yordami mukammal tarzda bashorat qilinmaydi.

8.2.5 Regressiya modelidagi parametrlarni baholashni talqin qilish

Regressiya modelidagi parametrlarni talqin qilish (interpretatsiya qilish) ko‘pincha tahlilning eng muhim bosqichlaridan biri hisoblanadi.

8.13-MISOL

Elmhurst ma’lumotlari uchun ozod had va burchak koeffitsiyenti baholari mos ravishda $b_0 = 24319$ va $b_1 = -0{,}0431$ ga teng. Ushbu raqamlar aslida nimani anglatadi?

Burchak koeffitsiyenti parametrini talqin qilish deyarli har qanday amaliy qo‘llanishda foydalidir. Har bir qo‘shimcha \$1000 oila daromadi uchun talabaning yordamida $\$1000 \times (-0{,}0431) = -\$43{,}10$ farq bo‘lishini kutishimiz mumkin, ya’ni o‘rtacha \$43,10 kamroq. Diqqat qiling, yuqori oila daromadi kamroq yordam bilan bog‘liq, chunki modelda oila daromadi koeffitsienti manfiy. Ushbu talqinda ehtiyot bo‘lish kerak. Haqiqiy bog‘lanish bo‘lsa-da, ushbu ma’lumotlar kuzatuv xarakteriga ega bo‘lgani uchun o‘zgaruvchilar o‘rtasida sababiy bog‘lanishni talqin qila olmaymiz. Ya’ni, talabaning oila daromadini oshirish uning yordamini kamaytirishga olib kelmasligi mumkin (Bu bog‘lanish sababiy ekanligini aniqlash uchun Elmhurst kollejiga murojaat qilish maqsadga muvofiq bo‘ladi, ya’ni Elmhurst kollejining yordam qarorlari qisman talabalarning oila daromadlariga asoslangan ekanligini so‘rash zarur.)

Baholangan ozod had $b_0 = 24319$ talabaning oila daromadi yo‘q bo‘lsa, o‘rtacha yordamni tasvirlaydi. Ozod hadning ma’nosi ushbu qo‘llashda ahamiyatlidir, chunki Elmhurstdagi ba’zi tala-

balarning oila daromadi \$0 bo‘lishi mumkin. Boshqa amaliy qo‘llashlarda, agar x ning qiymati nolga yaqin bo‘lmagan kuzatuvlar bo‘lsa, ozod hadning amaliy ahamiyati kam yoki umuman bo‘lmasligi mumkin.

ENG KICHIK KVADRATLAR BILAN BAHOLANGAN PARAMETRLARNI TALQIN QILISH

Burchak koeffitsiyenti x tushuntiruvchi o‘zgaruvchi bir birlikka kattaroq bo‘lsa, y o‘zgaruvchidagi taxminiy farqni tasvirlaydi. Agar chiziqli model $x = 0$ gacha amal qilsa, $x = 0$ da y ning o‘rtacha natijasini tasvirlaydi. Odatda ko‘pgina amaliy masalalarda bunday holat bo‘lmaydi.

8.2.6 Ekstrapolyatsiya xavflidir

Qish faslida Sharqiy Sohilda qor bo‘ronlari bo‘lganligi global isishning aldov ekanligini menga yetarli darajada isbotladi. O‘sha qorlar muzday edi. Ammo xavotirli tendentsiya shundaki, bu bahorda haroratlar ko‘tarildi. Mana buni o‘ylab ko‘ring: 6-fevralda harorat 10 daraja edi. Bugun esa deyarli 80 ga yetdi. Bu tezlikda davom etsa, avgust oyiga kelib harorat 220 darajaga yetadi. Shunday qilib, azizlar, iqlim bo‘yicha munozaralar davom etmoqda.

Stiven Kolbert
2010-yil 6-aprel[12]

Chiziqli modellar ikki o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanishni taxmin qilish uchun ishlatilishi mumkin. Biroq, ushbu modellar cheklovlarga ega. Chiziqli regressiya oddiygina modellashtirish usuli hisoblanadi. Haqiqiy bog‘lanish odatda bizning oddiy chiziqdan ancha murakkabroq, masalan, biz ma’lumotlar bilan cheklangan diapazonimizdan tashqarida qanday harakatlanishini bilmaymiz.

(M) **8.14-MISOL**

$\widehat{yordam} = 24319 - 0{,}0431 \times oila_daromadi$ modeldan foydalanib, oila daromadi \$1 million bo‘lgan boshqa birinchi kurs talabasi uchun yordamni taxmin qiling.

Biz quyidagilarni hisoblaymiz: $oila_daromadi = 1000000$:

$$24319 - 0{,}0431 \times oila_daromadi = 24319 - 0{,}0431 \times 1000000 = -18781.$$

Modelga ko‘ra, ushbu talaba -\$18781 yordam oladi (!). Ammo Elmhurst kolleji *manfiy yordam* ko‘rsatmaydi, ya’ni ba’zi talabalardan o‘qish to‘lovidan tashqari qo‘shimcha pul to‘lashni talab qilmaydi.

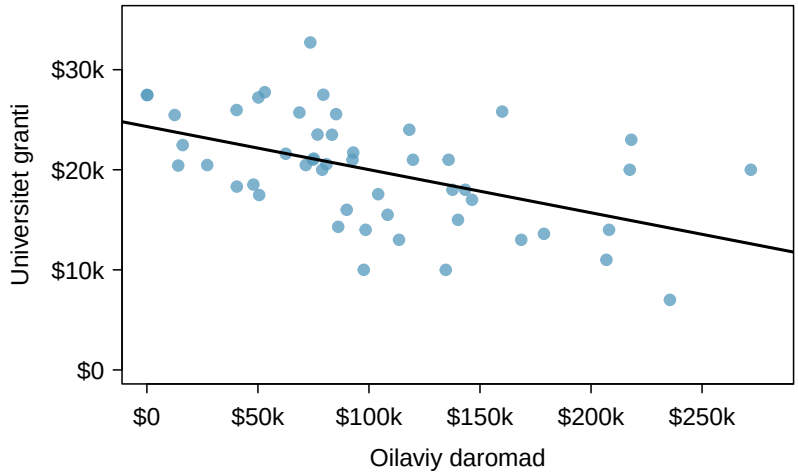
Model bahosini dastlabki ma’lumotlar doirasidan tashqaridagi qiymatlarga qo‘llash **ekstrapolyatsiya** deb ataladi. Umuman olganda, chiziqli model ikki o‘zgaruvchi o‘rtasidagi haqiqiy bog‘lanishning faqat taxminiy tasviridir. Agar biz ekstrapolyatsiya qilsak, bu chiziqli bog‘lanish analiz qilinmagan joylarda ham amal qiladi degani emas.

8.2.7 R^2 yordamida moslashuv kuchini tavsiflash

Biz avval ikki o‘zgaruvchi o‘rtasidagi chiziqli bog‘lanish kuchini korrelyatsiya R yordamida baholadik. Biroq, chiziqli moslashuv kuchini R^2, **R-kvadrat** deb ataluvchi ko‘rsatkich yordamida izohlash keng tarqalgan. Agar chiziqli model berilgan bo‘lsa, ma’lumotlarning chiziqli moslashuv atrofida qanchalik zich joylashganligini tasvirlashimiz mumkin.

R^2 chiziqli modelning javobdagi o‘zgaruvchanlikning qanchasini eng kichik kvadratlar chizig‘i tushuntirishi mumkinligini tasvirlaydi. Masalan, 8.15-rasmda ko‘rsatilgan Elmhurst ma’lumotlarini ko‘rib chiqaylik. Javob o‘zgaruvchisining, ya’ni olingan yordamning dispersiyasi taxminan $s^2_{yordam} \approx$ 29,8 million. Biroq, agar biz eng kichik kvadratlar chizig‘ini qo‘llasak, ushbu model talabaning yordamni oila daromadiga qarab bashorat qilishdagi noaniqlikni kamaytiradi. Qoldiqlar dis-

[12] www.cc.com/video-clips/l4nkoq



8.15-rasm. Elmhurst kollejidan 50 nafar birinchi kurs talabalari uchun yordam va oila daromadi ma'lumotlari, eng kichik kvadratlar regressiya chizig'i bilan ko'rsatilgan.

persiyasi modeldan foydalanganimizdan so'ng qanchalik o'zgaruvchanlik qolganligini tavsiflaydi: $s^2_{javob} \approx 22{,}4$ million. Qisqasi, modelni qo'llash natijasida oila daromadiga asoslangan bashoratda o'zgaruvchanlikni quyidagicha kamaytirish mumkin:

$$\frac{s^2_{yordam} - s^2_{qoldiq}}{s^2_{yordam}} = \frac{29800000 - 22400000}{29800000} = \frac{7500000}{29800000} = 0{,}25$$

yoki taxminan 25% ga teng. Bu R^2 qiymatiga aynan mos keladi:

$$R = -0{,}499; \qquad R^2 = 0{,}25\ .$$

8.15-YO'NALTIRILGAN MASHQ

Agar chiziqli modelning korrelyatsiyasi -0,97 bo'lib, juda kuchli manfiy bog'lanish bo'lsa, javobdagi o'zgarishlarning qancha qismi tushuntiruvchi o'zgaruvchi tomonidan tushuntiriladi?[13]

8.2.8 Ikki darajali toifali bashoratlovchi o'zgaruvchilar

Toifali o'zgaruvchilar natijalarni bashorat qilishda foydali bo'lishi mumkin. Bu bo'limda biz ikki darajali toifali bashoratlovchini ko'rib chiqamiz (bu yerda daraja toifa bilan bir xil ekanligini eslang). Biz Nintendo Wii uchun mo'ljallangan Mario Kart video o'yinining Ebay auksionlaridagi savdosini ko'rib chiqamiz; bunda auksionning yakuniy narxi hamda o'yinning holati `ishlatilgan` va `yangi` qayd etilgan. Bu yerda biz o'yinning holatiga asoslanib, uning umumiy narxini bashorat qilmoqchimiz. Auksion ma'lumotlarining grafigi 8.16-rasmda ko'rsatilgan.

O'yin holati o'zgaruvchisini regressiya tenglamasiga kiritish uchun toifalarni sonli shaklga o'tkazishimiz kerak. Buning uchun biz **indikator o'zgaruvchi** deb ataladigan `holat` dan foydalanamiz, u yangi o'yin uchun 1 va ishlatilgan o'yin uchun 0 qiymatini oladi. Ushbu indikator o'zgaruvchi yordamida chiziqli model quyidagicha yoziladi:

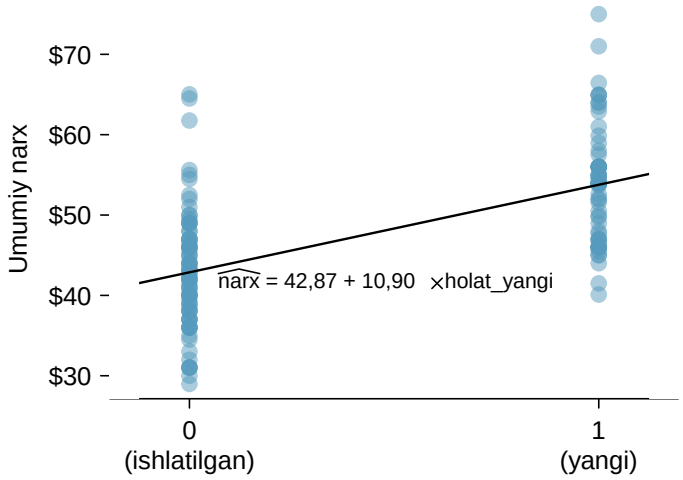
$$\widehat{narx} = \beta_0 + \beta_1 \times \texttt{holat}.$$

Parametrlarning baholari 8.17-rasmda keltirilgan va model tenglamasi quyidagicha umumlashtiriladi:

$$\widehat{narx} = 42{,}87 + 10{,}90 \times \texttt{holat}\ .$$

Faqat ikki darajali toifali bashoratlovchilar uchun chiziqlilik farazlari har doim bajariladi. Biroq, har

[13] Taxminan $R^2 = (-0{,}97)^2 = 0{,}94$ yoki 94% o'zgarish chiziqli model tomonidan tushuntiriladi.



8.16-rasm. *Mario Kart* video o‘yinining auksion narxlari, holatga qarab ishlatilgan ($x = 0$) va yangi ($x = 1$) o‘yinlarga bo‘lingan. Chiziqli regressiya chizig‘i ham grafikka qo‘shilgan.

	Baho	Std. Xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	42,87	0,81	52,67	<0,0001
holati	10,90	1,26	8,66	<0,0001

8.17-rasm. O‘yin holatiga qarab yakuniy auksion narxi uchun eng kichik kvadratlar regressiya xulosasi.

bir guruhdagi qoldiqlar taxminan normal va taxminan teng dispersiyaga ega ekanligini baholashimiz kerak. 8.16-rasmda ko‘rsatilganidek, auksion ma’lumotlari ushbu shartlarni qanoatlantiradi.

M **8.16-MISOL**

eBay auksionlarida *Mario Kart* narxi uchun modelda baholangan ikkita parametrni izohlang.

Ozod had `holat` 0 qiymatini olganda, ya’ni o‘yin ishlatilgan holatda bo‘lgandagi narxni baholaydi. Bu o‘yinning ishlatilgan versiyasining o‘rtacha sotuv narxi $42,87 ekanligini anglatadi.

Burchak koeffitsiyenti parametri shuni ko‘rsatadiki, o‘rtacha yangi o‘yinlar ishlatilgan o‘yinlarga qaraganda $10,90 qimmatroq sotiladi.

TOIFALI BASHORATLOVCHILAR UCHUN MODEL BAHOLARINI IZOHLASH

Baholangan ozod had javob o‘zgaruvchisining indikator qiymati 0 ga teng bo‘lgan holatni ko‘rsatadi. Baholangan burchak koeffitsiyenti javob o‘zgaruvchisining o‘rtacha o‘zgarishini bildiradi.

Bu mavzuni biz 9-bobda batafsilroq ko‘rib chiqamiz, unda ko‘p omilli regressiya yordamida bir vaqtning o‘zida bir nechta bashoratlovchi o‘zgaruvchilarning ta’sirini tahlil qilamiz.

Mashqlar

8.17 Regressiya birliklari. Voyaga yetgan erkaklar tanlanmasida bo‘y uzunligi (cm) bo‘yicha og‘irlikni (kg) bashorat qilish uchun regressiya o‘tkazilishi haqida o‘ylang. Korrelatsiya koeffitsienti, ozod had va burchak koeffitsiyentining birliklari qanday?

8.18 Qaysi biri yuqori? Quyidagilar orasida I yoki II yuqori ekanini aniqlang yoki ular tengmi. Fikringizni izohlang. Regressiya chizig‘i uchun burchak koeffitsiyenti b_1 ning bahosi bilan bog‘liq noaniqlik yuqoriroq bo‘ladi, qachonki:

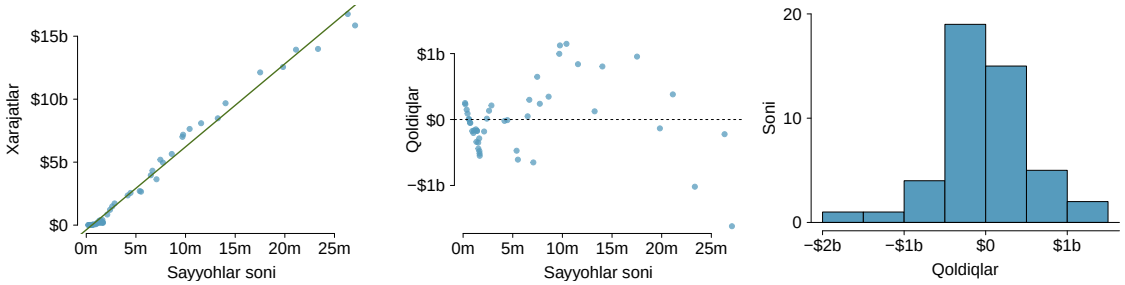
I. regressiya chizig‘i atrofida ko‘p sochilib ketgan nuqtalar mavjud bo‘lsa yoki

II. regressiya chizig‘i atrofida juda kam sochilib ketgan nuqtalar mavjud bo‘lsa.

8.19 Ortiqcha–kam baholash, 1-qism. Olmaning vazniga asoslanib, uning saqlanish muddatini bashorat qilish uchun regressiya chizig‘i o‘tkazdik deylik. Ma’lum bir olma uchun saqlanish muddati 4,6 kun deb bashorat qilindi. Bu olma uchun qoldiq -0,6 kun. Olmaning saqlanish muddati yuqori baholanganmi yoki pastmi? Fikringizni izohlang.

8.20 Ortiqcha–kam baholash, 2-qism. Yiliga quyoshli kunlar sonidan kelib chiqib, har 1000 kishiga to‘g‘ri keladigan teri saratoni holatlarini bashorat qilish uchun regressiya chizig‘i o‘tkazdik deylik. Ma’lum bir yil uchun teri saratoni holati 1000 kishiga 1,5 deb bashorat qilindi va shu yil uchun qoldiq 0,5. Teri saratoni holati yuqori baholanganmi yoki pastmi? Fikringizni izohlang.

8.21 Turizm xarajatlari. Turkiya sayohat agentliklari assotsiatsiyasi har yili Turkiyaga tashrif buyurgan xorijiy turistlar soni va turistlarning xarajatlari haqida ma’lumot beradi.[14] Uchta grafika taqdim etilgan. Ushbu ikkita o‘zgaruvchi o‘rtasidagi bog‘liqlikni va eng kichik kvadratlar usulini ko‘rsatadigan tarqoqlik diagrammasi, qoldiqlar grafigi va qoldiqlar gistogrammasi.



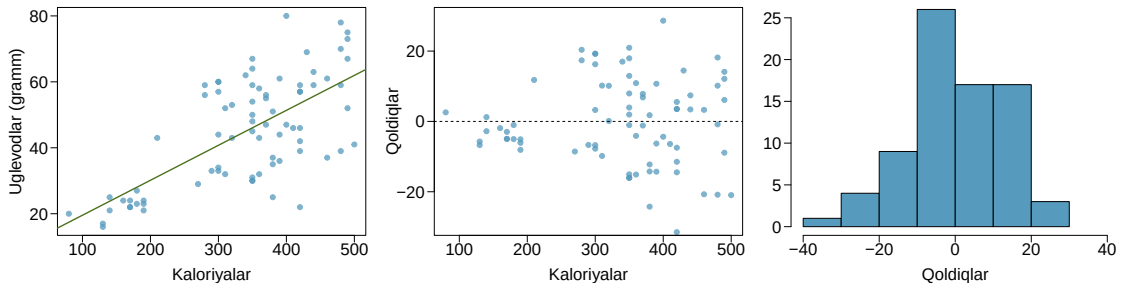
(a) Turistlar soni va xarajatlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) tushuntiruvchi va javob o‘zgaruvchilar qaysilar?

(c) Nega bu ma’lumotlarga regressiya chizig‘ini moslashtirishni xohlashimiz mumkin?

(d) Ushbu ma’lumotlar eng kichik kvadratlar chizig‘ini tuzish uchun talab qilinadigan shartlarga javob beradimi?Tarqoqlik diagrammasi, qoldiqlar grafigi va gistogrammadan foydalanib, ushbu savolga javob bering.

8.22 Starbucksda ozuqa, 1-qism. Quyidagi tarqoqlik diagrammasida “Starbucks” oziq-ovqat menyusi elementlarida kaloriya soni va uglevodlar miqdori (grammda) o‘rtasidagi bog‘liqlik ko‘rsatilgan.[15] Starbucks faqat kaloriya sonini namoyish qiladi, shuning uchun biz menyu elementining kaloriya tarkibiga asoslanib, uning uglevodlar miqdorini bashorat qilishga qiziqamiz.



(a) Starbucks oziq-ovqat menyusi elementlarida kaloriya soni va uglevodlar miqdori (grammda) o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Ushbu holatda tushuntiruvchi va javob o‘zgaruvchilar qaysilar?

(c) Nima uchun ushbu ma’lumotlarga regressiya chizig‘ini moslashni xohlashimiz mumkin?

(d) Ushbu ma’lumotlar eng kichik kvadratlar chizig‘ini tuzish uchun talab qilinadigan shartlarga javob beradimi?

8.23 The Coast Starlight, 2-qism. 8.11-mashqda Sietl va Los-Anjeles o’rtasida qatnovchi poyezd haqida ma’lumotlar keltirilgan. Coast Starlight poezdida bir bekatdan keyingi bekatga o‘rtacha safar vaqti 129

[14] Association of Turkish Travel Agencies, Foreign Visitors Figure & Tourist Spendings By Years.

[15] Source: Starbucks.com, collected on March 10, 2011, www.starbucks.com/menu/nutrition.

minut, standart og‘ishi esa 113 minut. Bir bekatdan keyingi bekatga bo‘lgan o‘rtacha masofa 108 milya, standart chetlanish esa 99 milya. Sayohat vaqti va masofa o‘rtasidagi korrelatsiya 0,636 ga teng.

(a) Sayohat vaqtini bashorat qilish uchun regressiya chizig‘i tenglamasini yozing.
(b) Ushbu masala mazmunidan kelib chiqib burchak koeffitsiyenti va ozod hadni sharhlang.
(c) Coast Starlight uchun masofadan sayohat vaqtini bashorat qilish uchun regressiya chizig‘ining R^2 qiymatini hisoblang va R^2 ni ushbu masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.
(d) Santa Barbara va Los-Anjeles orasidagi masofa 103 milya. Ushbu modeldan foydalanib, Starlight bu ikki shahar orasida qancha vaqt yurishini baholang.
(e) Aslida Coast Starlight Santa Barbaradan Los-Anjelesga 168 minutda yetib boradi. Qoldiqni hisoblang va ushbu qoldiq qiymatining ma’nosini tushuntiring.
(f) Amtrak Coast Starlight’ga Los-Anjelesdan 500 milya uzoqlikda joylashgan yangi bekat qo‘shishni ko‘rib chiqmoqda. Ushbu chiziqli modeldan Los-Anjelesdan ushbu nuqtaga yetib borish vaqtini bashorat qilish maqsadga muvofiq bo‘ladimi?

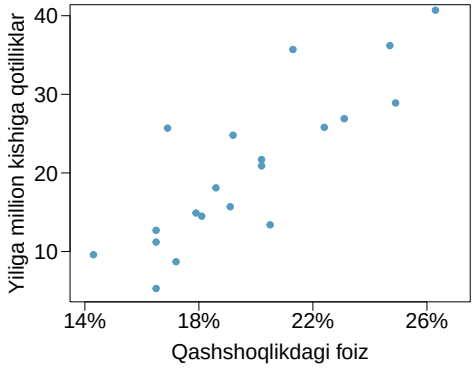
8.24 Tana o‘lchovlari, 3-qism. 8.13-mashqda bir guruh odamlarning yelka va bo‘y ma’lumotlari keltirilgan. Yelka aylanasining o‘rtacha uzunligi 107,20 cm, standart chetlanishi esa 10,37 cm. Bo‘yning o‘rtacha uzunligi 171,14 cm, standart chetlanish esa 9,41 sm. Bo‘y va yelka aylanasi o‘rtasidagi korrelatsiya 0,67 ga teng.

(a) Bo‘yni bashorat qilish uchun regressiya chizig‘ining tenglamasini yozing.
(b) Ushbu masala mazmunidan kelib chiqib burchak koeffitsiyenti va ozod hadni sharhlang.
(c) Yelka aylanasidan bo‘yni bashorat qilish regressiya chizig‘ining R^2 qiymatini hisoblang va uni masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.
(d) Sizning sinfingizdan tasodifan tanlangan bir talabaning yelka aylanasining uzunligi 100 cm. Ushbu modeldan foydalanib, ushbu talabani bo‘yini bashorat qiling.
(e) (d)-qismdagi talabaning bo‘yi 160 cm. Qoldiqni hisoblang va ushbu qoldiq nimani anglatishini tushuntiring.
(f) Bir yoshli bolaning yelka aylanasining uzunligi 56 cm. Ushbu chiziqli modeldan ushbu bolaning bo‘yini bashorat qilish maqsadga muvofiq bo‘ladimi?

8.25 Qotilliklar va qashshoqlik, 1-qism. Quyidagi regressiya natijalari yillik qotilliklar sonini (har millionga) qashshoqlikda yashayotganlar foizidan bashorat qilish uchun keltirilgan. Tanlanma tasodifiy tanlangan 20 ta metropoliten hududdan olingan.

	Baholash	Std. Xato	t qiymati	Pr(> | t |)
(ozod had)	-29,901	7,789	-3,839	0,001
poverty%	2,559	0,390	6,562	0,000

$s = 5{,}512$ $R^2 = 70{,}52\%$ $R^2_{adj} = 68{,}89\%$

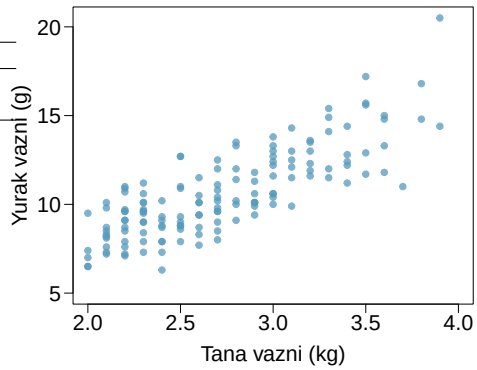


(a) Chiziqli model tenglamasini yozing.
(b) Ozod hadni sharhlang.
(c) Burchak koeffitsiyentini sharhlang.
(d) R^2 ni sharhlang.
(e) Korrelatsiya koeffitsientini hisoblang.

8.26 Mushuklar, 1-qism. Quyidagi regressiya natijalari mushuklarning tana og‘irligi (kg) asosida yurak og‘irligini (grammda) bashorat qilish uchun keltirilgan. Koeffitsientlar 144 ta mahalliy mushuklar ma’lumotlar to‘plamidan baholangan.

	Baholash	Std. Xatolik	t qiymat	Pr(> | t |)
(ozod had)	-0,357	0,692	-0,515	0,607
tana vazni	4,034	0,250	16,119	0,000

$s = 1{,}452$ $R^2 = 64{,}66\%$ $R^2_{adj} = 64{,}41\%$



(a) Chiziqli model tenglamasini yozing.
(b) Ozod hadni sharhlang.
(c) Burchak koeffitsiyentini sharhlang.
(d) R^2 ni sharhlang.
(e) Korrelatsiya koeffitsientini hisoblang.

8.3 Chiziqli regressiyadagi chetlashgan nuqtalarning turlari

Ushbu bo‘limda, qaysi chetlashgan nuqtalar muhim va ta’sirchan ekanligini aniqlash mezonlarini ko‘rib chiqamiz. Regressiyadagi chetlashgan nuqtalar – bu nuqtalar bulutidan ancha uzoq joylashgan kuzatuvlardir. Bu nuqtalar juda muhim, chunki ular eng kichik kvadratlar chizig‘iga kuchli ta’sir ko‘rsatishi mumkin.

Ⓜ **8.17-MISOL**

8.18-rasmda oltita grafik chizilgan bo‘lib, ular eng kichik kvadratlar chizig‘i va qoldiq grafigi bilan birgalikda ko‘rsatilgan. Har bir tarqoqlik diagrammasi va qoldiq grafigi jufti uchun chetlashgan nuqtalarni aniqlang va ularning eng kichik kvadratlar chizig‘iga qanday ta’sir ko‘rsatishini qayd eting. Eslab qoling, chetlashgan nuqta boshqa nuqtalarning katta qismi bilan mos kelmaydigan nuqta hisoblanadi.

---

(1) Asosiy nuqtalar bulutidan ancha uzoqda joylashgan bitta chetlashgan nuqta bor, ammo bu chiziqqa faqat ozgina ta’sir qilgandek ko‘rinadi.

(2) O‘ngda bitta chetlashgan nuqta bor, ammo u eng kichik kvadratlar chizig‘iga yaqin joylashgan, bu uning juda ta’sirchan emasligini ko‘rsatadi.

(3) Bulutdan ancha uzoqda bitta nuqta bor va ushbu chetlashgan nuqta eng kichik kvadratlar chizig‘ini o‘ng tomondan yuqoriga tortayotgandek ko‘rinadi. Asosiy bulut atrofidagi chiziqning unchalik yaxshi mos kelmayotganini tekshiring.

(4) Asosiy bulut va undan keyin to‘rtta chetlashgan nuqtalardan iborat kichik ikkilamchi bulut mavjud. Ikkilamchi bulut eng kichik kvadratlar chizig‘iga sezilarli darajada ta’sir ko‘rsatmoqda, bu esa chiziqning deyarli hamma joyda noto‘g‘ri mos kelishiga olib kelmoqda. Bulutlarning ikkilik holati uchun qiziqarli izoh bo‘lishi mumkin, bu esa o‘rganilishi kerak bo‘lgan masala.

(5) Asosiy nuqtalar bulutida aniq trend yo‘q va o‘ng tomondagi chetlashgan nuqta eng kichik kvadratlar chizig‘ining qiyaligini asosan nazorat qilayotgandek ko‘rinadi.

(6) Bulutdan ancha uzoqda bitta chetlashgan nuqta bor. Ammo, u eng kichik kvadratlar chizig‘iga yaqin joylashgan va juda ta’sirchan emasdek ko‘rinadi.

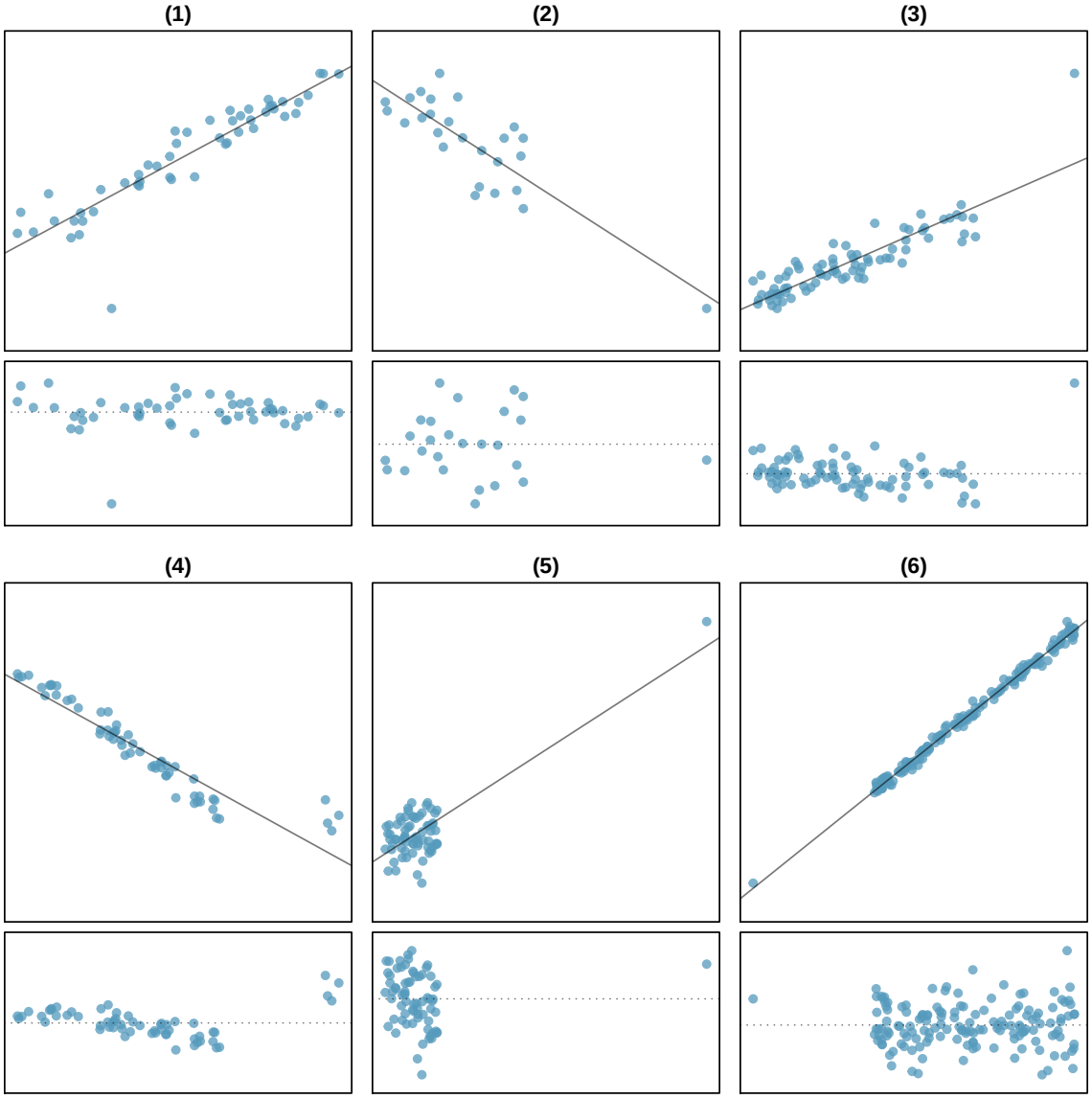
8.18-rasmdagi qoldiq grafiklarini tekshiring. Siz ehtimol asosiy bulutlarda ba’zi tendentsiyalarni toparsiz, xususan (3) va (4)-dagi holatlarda. Ushbu hollarda chetlashgan nuqtalar eng kichik kvadratlar chizig‘ining qiyaligiga ta’sir ko‘rsatgan. (5)-da esa aniq tendentsiyasiz ma’lumotlarga bitta chetlashgan nuqta sababli katta tendentsiyali chiziq belgilangan(!).

TA’SIR KUCHI

Gorizontal o‘qda bulut markazidan uzoqda joylashgan nuqtalar chiziqni ko‘proq tortadi, shuning uchun ularga **yuqori ta’sirga ega nuqtalar** deyiladi.

Gorizontal o‘qda chiziqdan uzoqda joylashgan nuqtalar yuqori ta’sir kuchiga ega nuqtalardir; bu nuqtalar eng kichik kvadratlar chizig‘ining qiyaligiga kuchli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. Agar ushbu yuqori ta’sir kuchiga ega nuqtalardan biri chiziqning qiyaligiga ta’sir ko‘rsatsa – masalan, 8.17-misoldagi (3)-, (4)- va (5)-holatlarda bo‘lgani kabi – unga **ta’sirchan nuqta** deyiladi. Odatda, agar chiziqni ushbu nuqta bo‘lmaganda moslashtirganimizda, ta’sirchan nuqta eng kichik kvadratlar chizig‘idan odatdagidan uzoqda bo‘lsa, biz uni ta’sirchan deb ayta olamiz.

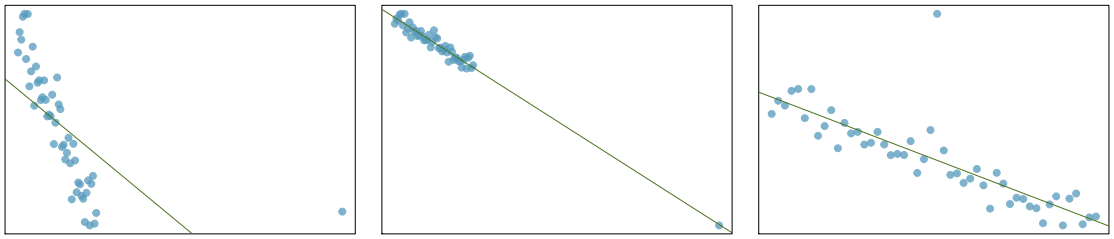
Chetlashgan nuqtalarni olib tashlash istagi paydo bo‘ladi. Buni juda yaxshi sabab bo‘lmaguncha qilmang. Favqulodda holatlarni e’tibordan chetda qoldiradigan modellar ko‘pincha yomon ishlaydi. Masalan, agar bir moliyaviy firma eng katta bozor tebranishlarini – “chetlashgan nuqtalar”ni – e’tibordan chetda qoldirsa, ular noto‘g‘ri o‘ylangan sarmoyalashlar tufayli tez orada bankrot bo‘lardi.



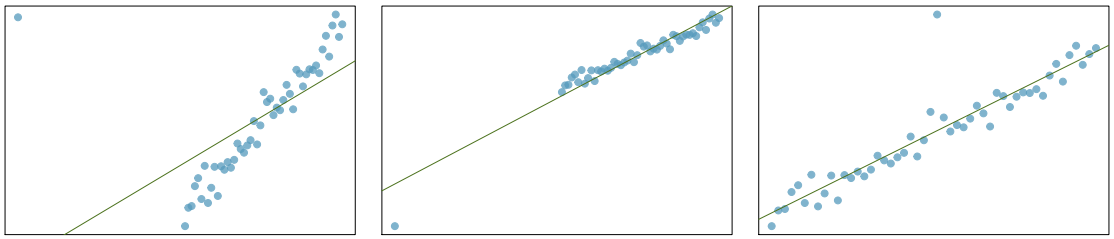
8.18-rasm. Oltita grafik, har biri eng kichik kvadratlar chizig‘i va qoldiq grafiklari bilan berilgan. Barcha ma’lumotlar to‘plamlarida kamida bitta chetlashgan nuqta mavjud.

Mashqlar

8.27 Chetlangan qiymatlar, 1-qism. Quyidagi sochma diagrammada chetlangan qiymatlarni aniqlang va ular qanday turdagi chetlangan qiymatlar ekanligini aniqlang. Sababini tushuntiring.



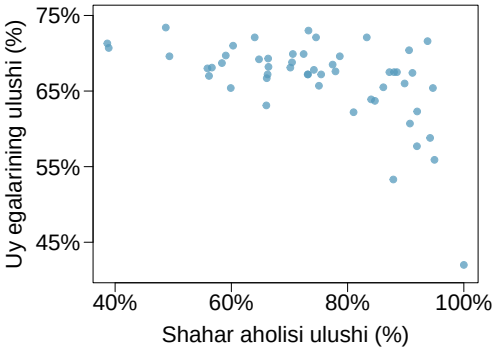
8.28 Chetlangan qiymatlar, 2-qism. Quyidagi sochma diagrammalarda chetlangan qiymatlarni aniqlang va ular qanday turdagi chetlangan qiymatlar ekanligini toping. Sababini tushuntiring.



8.29 Shahar aholisi, 1-qism. Quyidagi tarqoqlik diagrammasi uyga egalik qiladigan oilalar foizi va shaharda joylashgan aholining foizi o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi.[16] 52 ta kuzatuv mavjud bo‘lib, ularning har biri AQSh shtatiga mos keladi. Puerto-Riko va Kolumbiya okrugi ham kiritilgan.

(a) Uyga egalik qiladigan oilalar foizi va shahar aholisi foizi o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Pastki o‘ng burchakdagi chetlangan qiymat Kolumbiya okrugi bo‘lib, 100% aholi shahar deb hisoblanadi. Ushbu kuzatuv qanday turdagi chetlangan qiymat?



8.30 Emaklash yoshidagi chaqaloqlar, 2-qism. 8.12-mashq chaqaloqlar tug‘ilgan oydan keyingi 6 oy davomida (ular birinchi marta emaklashni boshlaydigan oy) o‘rtacha harorat va chaqaloqlarning o‘rtacha emaklash yoshi haqidagi ma’lumotlarni keltiradi. Ushbu ikki o‘zgaruvchi uchun tarqoqlik diagrammasi o‘rtacha harorat 53°F va o‘rtacha emaklash yoshi 28,5 hafta bo‘lgan potentsial chetlangan oyni aniqlaydi. Ushbu nuqta yuqori ta’sirga egami? U ta’sirli nuqtami?

8.4 Chiziqli regressiya uchun xulosalar

[16] United States Census Bureau, 2010 Census Urban and Rural Classification and Urban Area Criteria and Housing Characteristics: 2010.

Ushbu bo‘limda regressiya chizig‘i uchun burchak koeffitsiyenti va ozod had parametrlarining baholaridagi noaniqlikni muhokama qilamiz. Avvalgi bo‘limlarda nuqtaviy baholari uchun standart xatolarni aniqlaganimiz kabi, bu yangi baholar uchun standart xatolarni ham birinchi bo‘lib muhokama qilamiz.

8.4.1 O‘rta muddatli saylovlar va ishsizlik darajasi

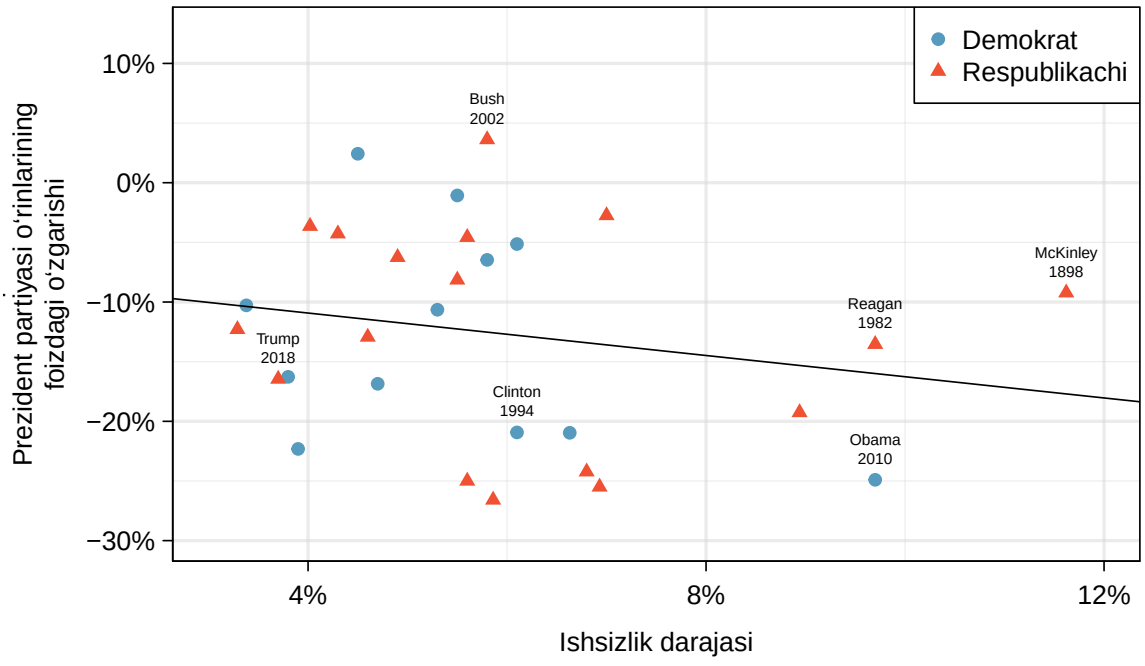
AQShda Vakillar palatasi a’zolari uchun saylovlar har ikki yilda o‘tkaziladi, har to‘rt yilda esa AQSh Prezident saylovlari bilan birga o‘tkaziladi. Prezidentlik muddati o‘rtasida o‘tkaziladigan Vakillar palatasi saylovlariga o‘rta muddatli saylovlar deyiladi. Amerika ikki partiyaviy tizimida bir siyosiy nazariya shuni taklif qiladiki, ishsizlik darajasi qanchalik yuqori bo‘lsa, Prezident partiyasi o‘rta muddatli saylovlarda shuncha yomon natija ko‘rsatadi.

Ushbu da’voning to‘g‘riligini tekshirish uchun biz tarixiy ma’lumotlarni yig‘ishimiz va aloqa izlashimiz mumkin. Biz 1898 yildan 2018 yilgacha bo‘lgan barcha o‘rta muddatli saylovlarni ko‘rib chiqamiz, Buyuk depressiya davridagi saylovlardan tashqari. 8.19-rasm ushbu ma’lumotlarni va eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘ini ko‘rsatadi:

$$\text{Prezident partiyasi o‘rinlaridagi o‘zgarish foizi} = -7{,}36 - 0{,}89 \times (\text{ishsizlik darajasi}).$$

Biz Prezident partiyasi o‘rinlaridagi o‘zgarish foizini (2018 yilda respublikachilar o‘rinlarining o‘zgarish foizi) ishsizlik darajasi bilan solishtiramiz.

Ma’lumotlarni tahlil qilishda chiziqli trenddan, o‘zgarmas dispersiya shartidan yoki sezilarli chetlashgan nuqtalardan biror-bir aniq chetga chiqishlar ko‘zga tashlanmaydi. Ma’lumotlar ketma-ket to‘plangan bo‘lsa-da, alohida tahlil ketma-ket kuzatuvlar orasidagi har qanday aloqani aniqlash uchun ishlatildi; bunday aloqa topilmadi.



8.19-rasm. Prezident partiyasining har bir o‘rta muddatli saylovda Vakillar palatasidagi o‘rinlari foizidagi o‘zgarish va ishsizlik darajasi. Buyuk depressiya davridagi ikkita nuqta olib tashlangan va ma’lumotlarga eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘i joylashtirilgan.

Y

8.18-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Buyuk Depressiya davri uchun ma’lumotlar (1934 va 1938 yillar) ishsizlik darajasi mos ravishda 21% va 18% bo‘lgani uchun olib tashlangan. Ularni ushbu tadqiqotdan olib tashlashga rozimisiz? Nega rozisiz yoki nega rozi emassiz?[17]

8.19-rasmda ko‘rsatilgan chiziqda salbiy burchak koeffitsiyenti mavjud. Ammo, ushbu burchak koeffitsiyenti va ozod had parametr qiymatlarining faqat baholari hisoblanadi. Biz shunday savolni o‘ylashimiz mumkin: “haqiqiy” chiziqli modelda salbiy burchak koeffitsiyenti bormi? Ya’ni, ma’lumotlar siyosiy nazariyaning ishonchli ekanligini ko‘rsatadimi, ya’ni ishsizlik darajasi o‘rta muddatli saylovlar uchun foydali bashoratlovchimi? Biz ushbu tadqiqotni statistik gipoteza testiga aylantirishimiz mumkin:

H_0: $\beta_1 = 0$. Haqiqiy chiziqli modelning qiyaligi nolga teng.

H_A: $\beta_1 \neq 0$. Haqiqiy chiziqli modelning qiyaligi nolga teng emas. Ishsizlik darajasi Prezident partiyasining Vakillar Palatasida o‘rin yutishi yoki yo‘qotishini bashorat qiluvchi omildir.

Agar ma’lumotlar haqiqiy burchak koeffitsiyenti parametri nolga teng emasligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillarni taqdim etsa, biz H_0 ni rad etamiz va H_A ni qabul qilamiz. Gipotezalarni baholash uchun biz baholashning standart xatoligini aniqlaymiz, tegishli test statistikani hisoblaymiz va p-qiymatini aniqlaymiz.

8.4.2 Dasturiy ta’minotdan regressiya natijalarini tushunish

Oldin ko‘rgan boshqa nuqtaviy baholarga o‘xshab, biz b_1 uchun standart xatolik va test statistikani hisoblashimiz mumkin. Odatda, test statistikani T bilan belgilaymiz, chunki u t-taqsimotga bo‘ysunadi.

Biz standart xatolikni hisoblash uchun statistik dasturdan foydalanamiz va ushbu standart xatolik qanday aniqlanishini tushuntirishni ikkinchi yoki uchinchi statistik kursga qoldiramiz. 8.20-rasmda 8.19-rasmda ko‘rsatilgan eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘i uchun dasturiy ta’minot natijalari ko‘rsatilgan. *unemp* qatori burchak koeffitsiyenti uchun nuqta bahosini va boshqa gipoteza testi ma’lumotlarini o‘z ichiga oladi, bu ishsizlik o‘zgaruvchisining koeffitsienti hisoblanadi.

	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	-7,3644	5,1553	-1,43	0,1646
ishsizlik	-0,8897	0,8350	-1,07	0,2961
				$ed = 27$

8.20-rasm. Ishsizlikka javoban Prezident partiyasi uchun o‘rta muddatli saylovdagi o‘rin yo‘qotishlarini modellashtiruvchi regressiya chizig‘i uchun dasturiy ta’minot natijalari.

8.19-MISOL

8.20-rasmning birinchi va ikkinchi ustunlari nimani anglatadi?

Birinchi ustundagi qiymatlar eng kichik kvadratlar baholarini, ya’ni b_0 va b_1 ni ifodalaydi, ikkinchi ustundagi qiymatlar esa har bir bahoning standart xatoliklariga mos keladi. Ushbu baholar yordamida regressiya chizig‘ining tenglamasini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$\hat{y} = -7{,}3644 - 0{,}8897x$$

bu yerda $\hat{y}$ Prezident partiyasining o‘rinlaridagi o‘zgarishni, x esa ishsizlik darajasini anglatadi.

Avvalroq sonli ma’lumotlarda gipotezalarni sinash uchun t-test statistikasi ishlatilgan edi. Regressiyada bu juda o‘xshash. Ko‘rib chiqilayotgan gipotezalarda burchak koeffitsiyenti uchun nol qiymat 0 bo‘lganligi sababli, test statistikani T (yoki Z) ball formulasi yordamida hisoblashimiz mumkin:

$$T = \frac{\text{baholash} - \text{nol qiymat}}{\text{SX}} = \frac{-0{,}8897 - 0}{0{,}8350} = -1{,}07.$$

[17] Biz ikkita jihatni taqdim etamiz. Ushbu nuqtalarning har biri har qanday eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘ida juda yuqori ta’sir kuchi qiymatiga ega bo‘ladi va ishsizlik darajasi juda yuqori bo‘lgan yillar boshqa yillarda, ya’ni ishsizlik darajasi faqat o‘rtacha yuqori bo‘lgan hollarda nima bo‘lishini tushunishga yordam bermasligi mumkin. Boshqa tomondan, bular istisno hollardir va agar ularni yakuniy tahlildan chiqarib tashlasak, biz muhim ma’lumotlarni yo‘qotishimiz mumkin.

Bu 8.20-rasmning uchinchi ustuniga mos keladi.

8.20-MISOL

Gipotezani sinash uchun 8.20-rasmdan p-qiymatini aniqlang.

Jadvalning oxirgi ustuni ishsizlik darajasining koeffitsienti uchun ikki tomonlama gipoteza sinovi uchun p-qiymatini beradi: 0,2961. Ya'ni, ma'lumotlar ishsizlik darajasining Prezident partiyasining Vakillar palatasidagi o'rinlar yo'qotishi yoki ortishi bilan bog'liqligi haqida ishonarli dalil bermaydi.

REGRESSIYADA STATISTIK XULOSA CHIQARISH

Amaliyotda, odatda, nuqtaviy baholarini, standart xatoliklarni, test statistikasini va p-qiymatlarini aniqlash uchun statistik dasturiy ta'minotdan foydalanamiz. Ammo dasturiy ta'minot usulning mosligini tekshirmaydi, shuning uchun shartlar bajarilganligini o'zimiz tekshirishimiz kerak.

8.21-MISOL

300-betdagi 8.15-rasmni ko'rib chiqing, u Elmhurst kolleji yordami va talaba oilasining daromadlari orasidagi munosabatni ko'rsatadi. Siz burchak koeffitsiyentining statistik jihatdan nolga teng bo'lmaganligiga qay darajada ishonasiz? Ya'ni, formal gipoteza testi chiziqning haqiqiy burchak koeffitsiyenti parametri nolga teng bo'lishi haqidagi da'voni rad etadi deb o'ylaysizmi?

---

o'zgaruvchilar orasidagi munosabat mukammal bo'lmasa-da, ma'lumotlarda aniq pasayuvchi tendentsiya kuzatilmoqda. Bu gipoteza testi burchak koeffitsiyentining nolga tengligi haqidagi nol gipotezasini rad etishini ko'rsatadi.

8.22-YO'NALTIRILGAN MASHQ

8.21-rasm Elmhurst kolleji ma'lumotlari uchun eng kichik kvadratlar regressiya chizig'ini moslashtirishdagi statistik dasturiy ta'minot natijalarini ko'rsatadi. Ushbu gipotezalarni formal ravishda baholash uchun ushbu natijalarni ishlating.[18]

H_0: Oilaviy daromad uchun haqiqiy koeffitsient nolga teng.

H_A: Oilaviy daromad uchun haqiqiy koeffitsient nolga teng emas.

	Baho	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	24319,3	1291,5	18,83	<0,0001
oila_daromadi	-0,0431	0,0108	-3,98	0,0002
				$ed = 48$

8.21-rasm. Elmhurst kolleji ma'lumotlari uchun eng kichik kvadratlar regressiya xulosasi, bu yerda universitet tomonidan moliyaviy yordamni talaba oilasining daromadlariga qarab bashorat qilamiz.

8.4.3 Regressiya koeffitsiyenti uchun ishonch intervali

Regressiya natijalaridan foydalanib, model koeffitsienti uchun gipoteza sinovini o'tkazish bilan bir qatorda, ushbu koeffitsient uchun intervalini ham qurishimiz mumkin.

8.23-MISOL

8.21-rasmdagi regressiya natijalaridan foydalanib, `oila_daromadi` koeffitsienti uchun 95% lik is-

[18] Oilaviy daromad o'zgaruvchisi bilan mos keladigan ikkinchi qatorga qaraymiz. Chiziqning burchak koeffitsiyenti bahosi -0,0431 ekanligi ko'rinadi. Ushbu bahoning standart xatoligi 0,0108 va t-test statistikasi $T = -3{,}98$. Biz qiziqqan ikki tomonlama test uchun p-qiymat 0,0002 ga teng. p-qiymat juda kichik bo'lgani uchun, biz nol gipotezani rad qilamiz va Elmhurst kolleji 2011-yilda qabul qilingan talabalar uchun oilaviy daromad va moliyaviy yordam orasida salbiy bog'liqlik bor degan xulosaga kelamiz. Bundan tashqari, haqiqiy burchak koeffitsiyenti parametri haqiqatan ham nolga teng emasligini ishonch bilan ayta olamiz.

honch intervalini hisoblang.

Nuqtaviy baho -0,0431, standart xatolik esa $SX = 0{,}0108$ ga teng. Model koeffitsienti uchun intervalni qurishda odatda t-taqsimotdan foydalanamiz. Taqsimotning erkinlik darajasi regressiya natijalarida berilgan, $ed = 48$, bu bizga $t^\star_{48} = 2{,}01$ ni intervalda ishlatish uchun aniqlash imkonini beradi.

Endi intervalni odatiy usulda qurishimiz mumkin:

$$\text{nuqtaviy baho} \pm t^\star_{48} \times SX \quad \rightarrow \quad -0{,}0431 \pm 2{,}01 \times 0{,}0108 \quad \rightarrow \quad (-0{,}0648; -0{,}0214)$$

Biz 95% lik ishonch bilan ayta olamizki, `oila_daromadi` o‘zgaruvchisining har bir dollarga ortishi universitetning yordami o‘rtacha \$0,0214 dan \$0,0648 gacha kamayishini bashorat qiladi.

REGRESSIYA KOEFFITSIYENTI UCHUN ISHONCH INTERVALI

Model koeffitsientlari uchun ishonch intervalini t-taqsimot yordamida hisoblash mumkin:

$$b_i \ \pm \ t^\star_{ed} \times SX_{b_i}$$

bu yerda $t^\star_{ed}$ bu ishonch va erkinlik darajasiga mos keladigan t-qiymat bildiradi.

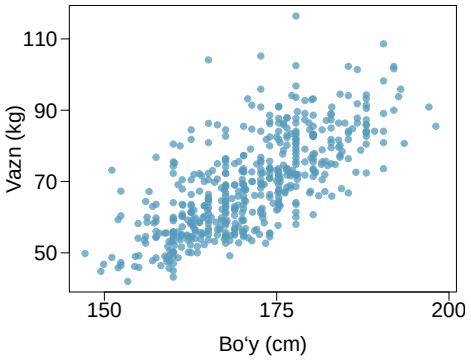
Ushbu kitobda intervallar mavzusida biz faqat model parametrlari uchun ishonch intervallariga e’tibor qaratdik. Biroq, qiziqarli bo‘lishi mumkin bo‘lgan boshqa interval turlari ham mavjud, masalan, javob qiymati uchun bashoratlovchi interval va regressiya mazmunida o‘rtacha javob qiymati uchun interval . Ushbu ikkita interval turi bilan siz quyida tanishishingiz mumkin:

www.openintro.org/d?file=stat_extra_linear_regression_supp

Mashqlar

Quyidagi mashqlarda eng kichik kvadratlar regressiya chizig‘ini moslash uchun shartlarni vizual ravishda tekshiring. Biroq, ushbu shartlarni yechimlaringizda keltirishingiz shart emas.

8.31 Tana o‘lchovlari, 4-qism. Quyidagi tarqoqlik diagrammasi va eng kichik kvadratlar regressiyasi ma’lumotlari 507 nafar jismoniy faol shaxsning vazni (kilogrammlarda) va bo‘yi (santimetrlarda) o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi.



	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	-105,0113	7,5394	-13,93	0,0000
bo‘y	1,0176	0,0440	23,13	0,0000

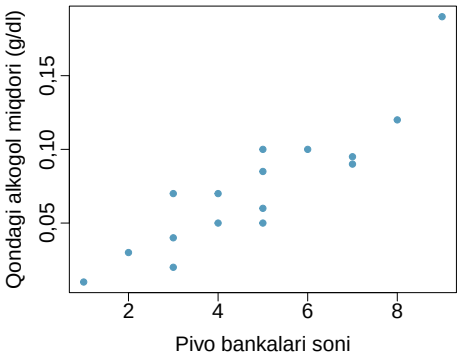
(a) Bo‘y va vazn o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Regressiya chizig‘ining tenglamasini yozing. burchak koeffitsiyenti va ozod had parametrlarini masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

(c) Ma’lumotlar bo‘yning ortishi vaznning ortishi bilan bog‘liq ekanini kuchli dalil bilan tasdiqlaydimi? Nolinchi va muqobil gipotezalarni yozing. p-qiymatni keltiring va xulosangizni bildiring.

(d) Bo‘y va vazn o‘rtasidagi korrelatsiya koeffitsienti 0,72. R^2 ni hisoblang va uni masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

8.32 Pivo va qon tarkibidagi spirt miqdori. Ko‘pchilik spirtli ichimliklar miqdorini bashorat qilishda jins, vazn, ichish odatlari va boshqa ko‘plab omillarni, shunchaki qancha pivo ichilganini hisoblashdan ko‘ra muhimroq deb hisoblaydi. Bu yerda “Ohio State” Universitetidan o‘n olti nafar talabaning ma’lumotlarini ko‘rib chiqamiz. Ushbu talabalar tasodifiy miqdorda pivo ichishgan. Talabalar erkak va ayollar bo‘lib, vaznlari va ichish odatlari bilan farq qilishgan. 30 daqiqadan so‘ng politsiya xodimi ularning qondagi alkogol miqdori har bir desilitr qon uchun grammda o‘lchadi.[19] Quyidagi tarqoqlik diagrammasi va regressiya jadvali natijalarni umumlashtiradi.



	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	-0,0127	0,0126	-1,00	0,3320
Pivo	0,0180	0,0024	7,48	0,0000

(a) Pivo bankalari soni va qondagi alkogol miqdori o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

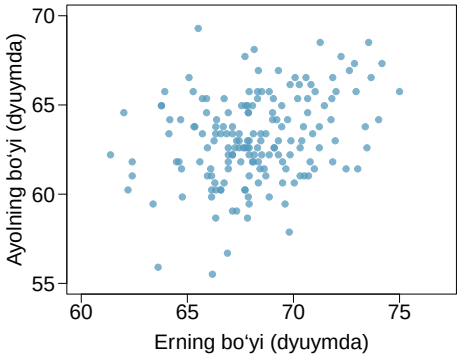
(b) Regressiya chizig‘ining tenglamasini yozing. burchak koeffitsiyenti va ozod had parametrlarini masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

(c) Ma’lumotlar ko‘proq pivo ichish qondagi alkogol miqdorining ortishi bilan bog‘liq ekanini kuchli dalil bilan ta’minlaydimi? Nolinchi va muqobil gipotezalarni yozing. p-qiymatini keltiring va xulosangizni bildiring.

(d) Pivo bankalari soni va qondagi alkogol miqdori o‘rtasidagi korrelatsiya koeffitsienti 0,89. R^2 ni hisoblang va uni masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

(e) Agar biz barga tashrif buyursak, odamlar qancha pivo ichganini so‘rasak va ularning qondagi alkogol miqdorini o‘lchasak, pivo soni va qondagi alkogol miqdori o‘rtasidagi bog‘liqlik Ohio State tadqiqotidagi bog‘liqlik kabi kuchli bo‘ladimi?

8.33 Er va xotinlar, 2-qism. Quyidagi tarqoqlik diagrammasi Britaniyadan tasodifiy tanlangan 170 ta turmush qurgan juftliklarning er va xotin bo‘ylarini umumlashtiradi. Bunda ikkala sherikning yoshi 65 yoshdan kichik. Xotinning bo‘yini er bo‘yidan bashorat qilish uchun eng kichik kvadratlar moslashuvi natijalari jadvalda keltirilgan.



	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	43,5755	4,6842	9,30	0,0000
erning bo‘yi	0,2863	0,0686	4,17	0,0000

(a) Uzunroq bo‘yli erkaklar uzunroq bo‘yli ayollar bilan turmush quradi degan kuchli dalillar bormi? Gipotezalarni yozing va testni o‘tkazish uchun ishlatilgan barcha ma’lumotlarni keltiring.

(b) Xotinning bo‘yini erning bo‘yidan bashorat qilish uchun regressiya chizig‘ining tenglamasini yozing.

(c) burchak koeffitsiyenti va ozod had paramaetrlarini masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

(d) Agar $R^2 = 0{,}09$ bo‘lsa ushbu ma’lumotlar to‘plamida bo‘ylarning korrelatsiyasini hisoblang.

(e) Britaniyada 5’9” (69 dyuym) bo‘lgan bir turmush qurgan erkakni uchratdingiz. Uning xotinining bo‘yini bashorat qiling. Ushbu bashorat qanchalik ishonchli?

(f) Britaniyada 6’7” (79 dyuym) bo‘lgan yana bir turmush qurgan erkakni uchratdingiz. Ushbu er xotinining bo‘yini bashorat qilish uchun bir xil chiziqli modelni ishlatish to‘g‘rimi? Nima uchun?

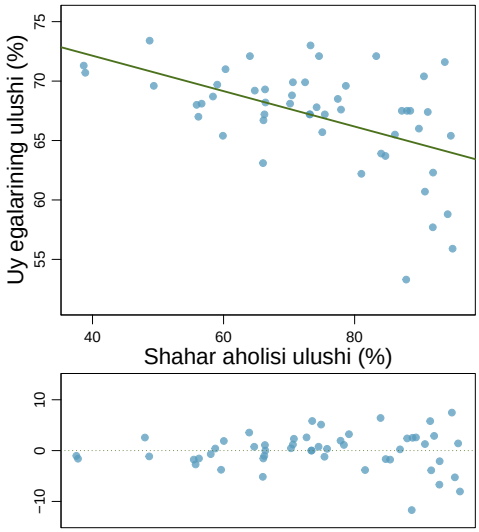
8.34 Shaharlarda uy egalari, 2-qism. 8.29-mashq oilalar o‘z uylariga egalik foizi bilan shahar hududida yashaydigan aholining foizi o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadigan tarqoqlik diagrammasini beradi. Quyida

[19] J. Malkevitch and L.M. Lesser. *For All Practical Purposes: Mathematical Literacy in Today’s World.* WH Freeman & Co, 2008.

Kolumbiya okrugi chiqarib tashlangan o‘xshash tarqoqlik diagrammasi hamda qoldiqlar grafigi keltirilgan 51 holat mavjud.

(a) Ushbu ma’lumotlar uchun $R^2 = 0{,}28$. Korrelatsiya qanday? Uning ijobiy yoki salbiy ekanligini qanday aniqlash mumkin?

(b) Qoldiqlar grafigini tekshiring. Nima kuzatdingiz? Ushbu ma’lumotlar uchun oddiy eng kichik kvadratlar moslashuvi mos keladimi?



8.35 Qotilliklar va qashshoqlik, 2-qism. 8.25-mashq yillik qotilliklar sonini (har millionga) qashshoqlik foizidan bashorat qilish modeli natijalarini keltiradi. Bu tasodifiy tanlangan 20 ta metropoliten hududining tanlanmasi asosida olingan. Model natijalari quyida keltirilgan.

	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	-29,901	7,789	-3,839	0,001
Qashshoqlik%	2,559	0,390	6,562	0,000

$$s = 5{,}512 \qquad R^2 = 70{,}52\% \qquad R^2_{adj} = 68{,}89\%$$

(a) Qashshoqlik foizi qotillik darajasining ahamiyatli bashoratlovchisi ekanligini baholash uchun gipotezalar qanday?

(b) (a)-qismdagi gipoteza testining xulosasini ushbu ma’lumotlar mazmunida yozing.

(c) Qashshoqlik foizining burchak koeffitsiyenti uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang va uni ma’lumotlar mazmunida sharhlang.

(d) Gipoteza testi natijalari va ishonch intervali bir-biriga mos keladimi? Izohlang.

8.36 Chaqaloqlar. Kam vaznli chaqaloqlarda homiladorlik davomiyligi (tug‘ilish vaqti bilan urug‘lanish oralig‘i) tug‘ilishdagi bosh aylanasini bashorat qilish uchun foydali bo‘ladimi? Harvardning o‘quv kasalxonasida 25 ta kam vaznli chaqaloq ustida tadqiqot o‘tkazildi. Tadqiqotchilar bosh aylanasini (santimetrlarda) homiladorlik davomiyligiga (haftalarda) nisbatan regressiya chizig‘ini hisobladilar. Hisoblangan regressiya chizig‘i quyidagicha:

$$\widehat{bosh\ aylana}\ uzunligi = 3{,}91 + 0{,}78 \times homiladorlik\ davomiyligi\ .$$

(a) Homiladorlik davomiyligi 28 hafta bo‘lgan chaqaloqning bosh aylanasini bashorat qiling.

(b) Homiladorlik davomiyligi koeffitsienti uchun standart xatolik 0,35 bo‘lib, bu $ed = 23$ ga mos keladi. Ushbu model homiladorlik davomiyligi bosh aylanasiga ahamiyatli bog‘liq ekanligini ko‘rsatadimi?

Bob bo‘yicha mashqlar

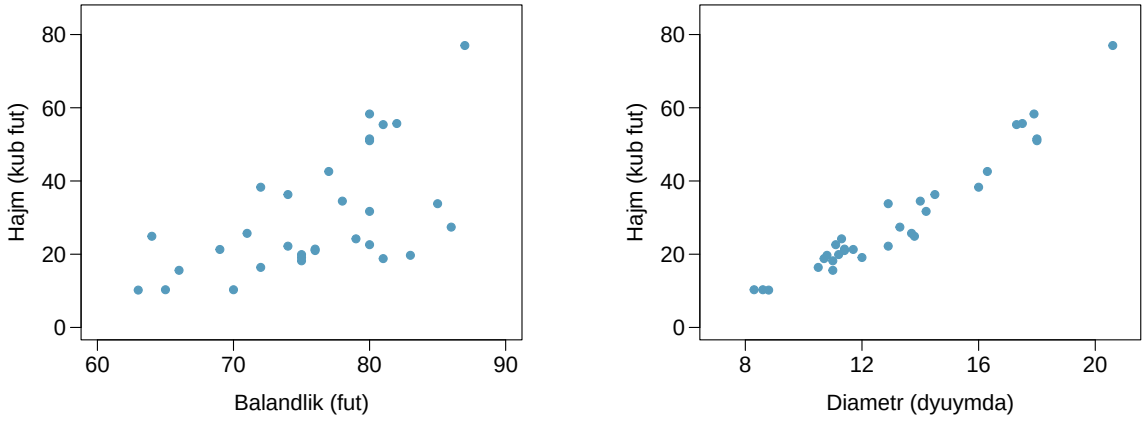
8.37 To‘g‘ri / Noto‘g‘ri. Quyidagi bayonotlar to‘g‘ri yoki noto‘g‘riligini aniqlang. Agar noto‘g‘ri bo‘lsa, sababini tushuntiring.

(a) -0,90 korrelatsiya koeffitsienti 0,5 korrelatsiyaga qaraganda kuchliroq chiziqli bog‘liqlikni ko‘rsatadi.

(b) Korrelatsiya har qanday ikkita o‘zgaruvchi o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘lchaydi.

8.38 Daraxtlar. Quyidagi tarqoqlik diagrammasi qora gilos daraxtlarining bo‘yi, diametri va yog‘och hajmi

o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi. Daraxt diametri yer sathidan 4,5 fut balandlikda o‘lchangan.[20]

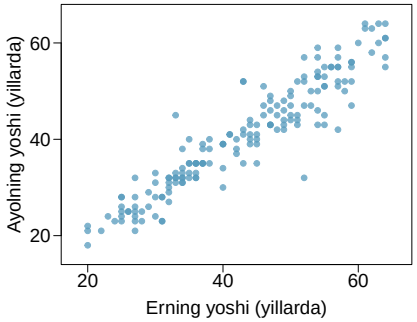


(a) Ushbu daraxtlarning hajmi va bo‘yi o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(b) Ushbu daraxtlarning hajmi va diametri o‘rtasidagi bog‘liqlikni tasvirlab bering.

(c) Yana bir qora gilos daraxtining bo‘yi va diametri ma’lumotlari mavjud deb faraz qiling. Ushbu daraxtning yog‘och hajmini oddiy chiziqli regressiya modeli yordamida bashorat qilish uchun qaysi o‘zgaruvchidan foydalanish kerak? Sababini tushuntiring.

8.39 Er va xotinlar, 3-qism. 8.33-mashqda Britaniyada 170 ta turmush qurgan juftlikning er va xotin yoshlarini aks ettiruvchi tarqoqlik diagrammasini keltiradi. Quyida xotin yoshini er yoshidan bashorat qilish uchun eng kichik kvadratlar moslashuvi natijalari keltirilgan.



	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	1,5740	1,1501	1,37	0,1730
erning yoshi	0,9112	0,0259	35,25	0,0000
				$df = 168$

(a) Er va xotin yoshlaridagi farq har xil yoshlar uchun izchilmi? Agar shunday bo‘lsa, burchak koeffitsiyenti parametri $\beta_1 = 1$ bo‘ladi. Yuqoridagi ma’lumotlardan foydalanib, er va xotin yoshlaridagi farq har xil yoshlar uchun farq qiladimi, shunga kuchli dalillar bor-yo‘qligini baholang.

(b) Xotin yoshini er yoshidan bashorat qilish uchun regressiya chizig‘ining tenglamasini yozing.

(c) Burchak koeffitsiyenti va ozod had parametrlarini masala mazmunidan kelib chiqib sharhlang.

(d) Agar $R^2 = 0{,}88$ bo‘lsa, ushbu ma’lumotlar to‘plamidagi yoshlarning korrelatsiyasi qanday?

(e) Britaniyalik 55 yoshli turmush qurgan erkakni uchratdingiz. Uning xotini yoshini bashorat qiling. Ushbu bashorat qanchalik ishonchli?

(f) Britaniyalik 85 yoshli turmush qurgan boshqa bir erkakni uchratdingiz. Uning xotini yoshini bashorat qilish uchun bir xil chiziqli modeldan foydalanish to‘g‘ri bo‘ladimi? Tushuntiring.

8.40 Mushuklar, 2-qism. 8.26-mashq mushuklarning tana vazni (kg) orqali ularning yurak vazni (gramm) ni bashorat qilish uchun regressiya natijalarini taqdim etadi. Koeffitsientlar 144 uy mushuklari to‘plamidan foydalangan holda baholangan. Model natijalari quyida keltirilgan.

	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	-0,357	0,692	-0,515	0,607
tana vazni	4,034	0,250	16,119	0,000

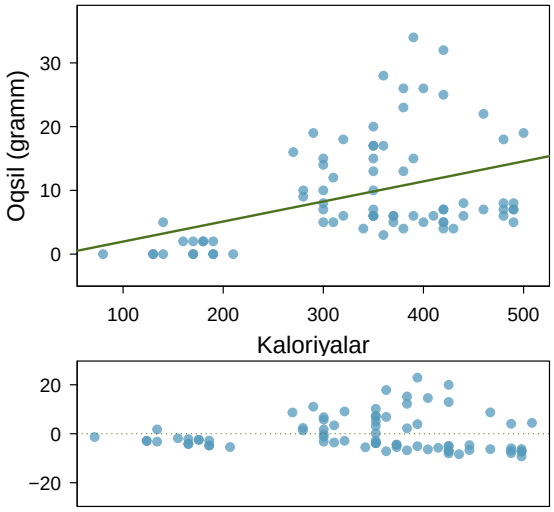
$$s = 1{,}452 \qquad R^2 = 64{,}66\% \qquad R^2_{adj} = 64{,}41\%$$

(a) Burchak koeffitsiyentining nuqtaviy bahosi ijobiy ekanligi ko‘rinadi. Tana vazni mushuklarda yurak vazni bilan ijobiy bog‘liqmi yoki yo‘qligini baholash uchun qanday gipotezalar mavjud?

[20] Source: R Dataset, stat.ethz.ch/R-manual/R-patched/library/datasets/html/trees.html.

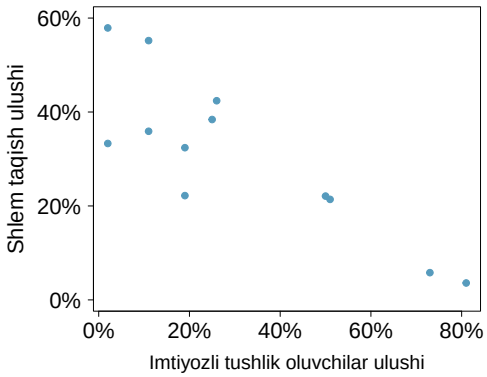
(b) (a) qismdagi gipoteza testining xulosasini ushbu ma'lumotlar mazmunidan kelib chiqib izohlang.
(c) Tana vazni uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang va uni ushbu ma'lumotlar mazmunida izohlang.
(d) Gipoteza testi va ishonch intervali natijalari bir-biriga mos keladimi? Tushuntiring.

8.41 Starbucksdagi oziq-ovqat, 2-qism. 8.22-mashq "Starbucks" oziq-ovqat menyusidagi oziqlanish ma'lumotlari to'plamini taqdim etdi. Quyida taqdim etilgan tarqoqlik diagrammasi va qoldiqlar grafigiga asoslanib, ushbu menyu elementlarining oqsillar tarkibi va kaloriyalari o'rtasidagi bog'liqlikni tasvirlab bering va oddiy chiziqli modeldan oqsillar miqdorini kaloriyalar sonidan bashorat qilishda foydalanish maqsadga muvofiqmi yoki yo'qligini aniqlang.



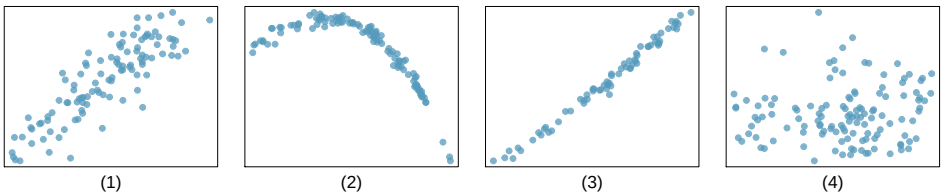
8.42 Shlem va tushliklar. Tarqoqlik diagrammasi maktabda kamaytirilgan narxdagi tushliklar oladigan mahalladagi bolalar foizi va shlem kiyadigan velosipedchilar foizi o'rtasidagi bog'liqlikni ko'rsatadi. Kamaytirilgan narxdagi tushlik oladigan bolalar foizining o'rtacha qiymati 30,8%, standart chetlanishi 26,7%, shlem kiyadigan velosipedchilar foizining o'rtacha qiymati 38,8%, standart chetlanishi 16,9%.

(a) Ushbu ma'lumotlar uchun eng kichik kvadratlar regressiya chizig'i uchun R^2 72% bo'lsa ular o'rtasidagi korrelatsiyani aniqlang.
(b) Ushbu ma'lumotlar uchun eng kichik kvadratlar regressiya chizig'ining burchak koeffitsiyenti va ozod had parametrlarini hisoblang.
(c) Eng kichik kvadratlar regressiya chizig'ining ozod hadini ushbu masala mazmunida izohlang.
(d) Eng kichik kvadratlar regressiya chizig'ining burchak koeffitsiyenti parametrini ushbu masala mazmunida izohlang.
(e) Agar mahallada 40% bolalar kamaytirilgan narxdagi tushlikni olsa va 40% velosipedchilar shlem kiygan bo'lsa, bu holda qoldiqning qiymati qanday bo'ladi? Ushbu qoldiqning ma'nosini masala mazmunida izohlang.



8.43 Korrelatsiyani moslang, 3-qism. Har bir korrelatsiyani mos tarqoqlik diagrammasi bilan moslang.

(a) $r = -0{,}72$
(b) $r = 0{,}07$
(c) $r = 0{,}86$
(d) $r = 0{,}99$



8.44 Professorlarni baholang. Ko'plab kollejlar talabalariga kurs va o'qituvchini anonim baholash imkoniyatini beradi. Biroq, ushbu talabalar baholashlari kurs sifati va o'qitish samaradorligini o'lchashda indikator sifatida ishlatilishi tez-tez tanqid qilinadi. Chunki bu o'lchovlar o'qitishga bog'liq bo'lmagan xususiyatlarning, masalan, o'qituvchining tashqi ko'rinishining ta'sirini aks ettirishi mumkin. Texas Universiteti

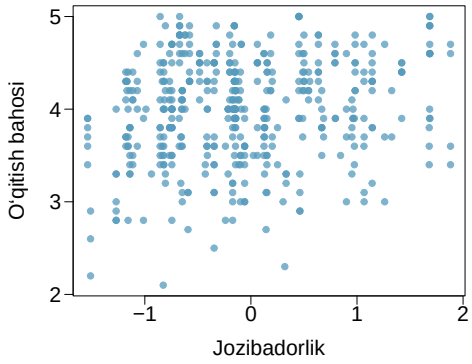
tadqiqotchilari 463 nafar professor uchun o‘qitishni baholash ballari va standartlashtirilgan jozibadorlik ballari (0 o‘rtacha, manfiy ball o‘rtachadan past, ijobiy ball esa o‘rtachadan yuqori ekanligini anglatadi) bo‘yicha ma’lumotlarni to‘pladilar.[21] Quyidagi tarqoqlik diagrammasi ushbu o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadi va regressiya modeli natijasi o‘qitishni baholash ballarini jozibadorlik ballaridan bashorat qilish uchun keltirilgan.

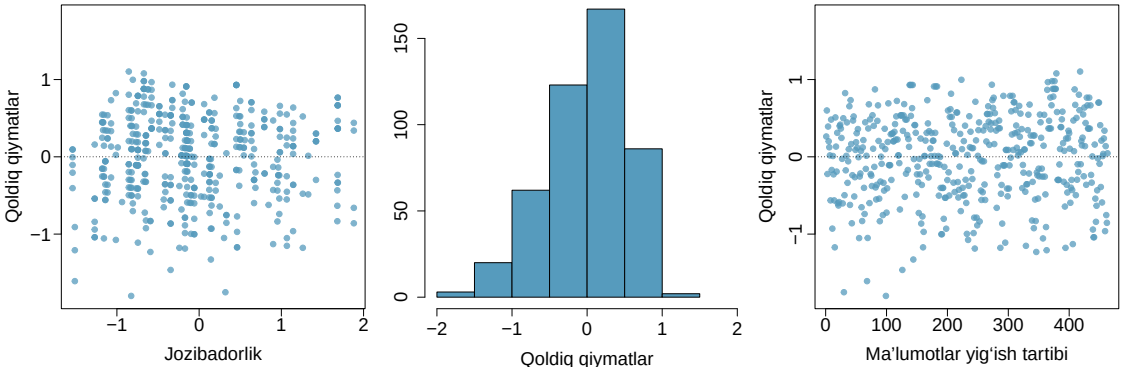
	Baholash	Std. xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
Ozod had	4,010	0,0255	157,21	0,0000
jozibadorlik		0,0322	4,13	0,0000

(a) Agar standartlashtirilgan jozibadorlik ballarining o‘rtacha qiymati -0,0883 va o‘qitishni baholash ballarining o‘rtacha qiymati 3,9983 bo‘lsa, burchak koeffitsiyentini hisoblang. Muqobil ravishda, burchak koeffitsiyentini model xulosasi jadvalidagi ma’lumotlardan foydalanib hisoblash mumkin.

(b) Ushbu ma’lumotlar o‘qitishni baholash va jozibadorlik o‘rtasidagi bog‘liqlikning qiyaligi ijobiy ekanligini ko‘rsatadigan ishonchli dalillarni taqdim etadimi? Sababini tushuntiring.

(c) Chiziqli regressiya uchun zarur bo‘lgan shartlarni sanab o‘ting va quyidagi diagnostik grafiklar asosida ushbu model uchun har biri qanoatlanadimi yoki yo‘qligini tekshiring.





[21] Daniel S Hamermesh and Amy Parker. “Beauty in the classroom: Instructors’ pulchritude and putative pedagogical productivity”. In: *Economics of Education Review* 24.4 (2005), pp. 369–376.

9-BOB

Ko‘p o‘lchovli va logistik regressiya

9.1 Ko‘p o‘lchovli regressiyaga kirish

9.2 Modelni tanlash

9.3 Grafiklar yordamida model shartlarini tekshirish

9.4 Ko‘p o‘lchovli regressiya bo‘yicha ish: Mario Kart

9.5 Logistik regressiyaga kirish

Oddiy chiziqli regressiya tamoyillari keng ko‘lamli murakkab sharoitlarda qo‘llaniladigan yanada mukammal regressiya modellari uchun poydevor yaratadi. 9-bobda biz chiziqli modelda birdan ortiq bashoratlovchidan foydalanish imkoniyatini taqdim etuvchi ko‘p o‘lchovli regressiyani hamda ikkita darajaga ega toifali o‘zgaruvchilarni bashorat qilish usuli bo‘lgan logistik regressiyani ko‘rib chiqamiz.



Ingliz tilidagi videolar, slaydlar va boshqa resurslar uchun quyidagi manzilga tashrif buyuring: **www.openintro.org/os**

9.1 Ko‘p o‘lchovli regressiyaga kirish

Ko‘p o‘lchovli regressiya oddiy ikki o‘zgaruvchili regressiyani kengaytirib, bitta javob o‘zgaruvchisi va bir nechta bashoratlovchilar (x_1, x_2, x_3, ...) bo‘lgan holatlarni o‘rganadi. Ushbu usul bir nechta o‘zgaruvchilar bir vaqtning o‘zida natijaga ta’sir o‘tkazishi mumkin bo‘lgan vaziyatlarda qo‘llaniladi.

Biz “Lending Club”dan olingan qarzlar haqidagi ma’lumotlarni ko‘rib chiqamiz. Ushbu ma’lumotlar to‘plamini biz avval 1- va 2-boblarda ko‘rgan edik. Qarz ma’lumotlari o‘z ichiga qarz shartlari hamda qarz oluvchining ma’lumotlarini oladi. Biz yaxshiroq tushunishni istagan natija o‘zgaruvchisi bu qarzga belgilangan foiz stavkasi hisoblanadi. Masalan, boshqa barcha xususiyatlar bir xil bo‘lsa, kimdir qancha qarzga ega ekanligi muhimmi? Ularning daromadi tasdiqlanganmi yoki yo‘qmi, bu muhimmi? Ko‘p o‘lchovli regressiya bizga ushbu va boshqa savollarga javob berishda yordam beradi.

`loans` ma’lumotlar to‘plamida 10000 ta qarz ma’lumotlari mavjud va biz mavjud o‘zgaruvchilarning faqat kichik bir qismini, avvalgi boblarda ko‘rganlarimizdan ba’zilarini hamda yangi bo‘lgan o‘zgaruvchilarni ko‘rib chiqamiz. Ma’lumotlar to‘plamidagi dastlabki oltita kuzatuv 9.1-rasmda ko‘rsatilgan va har bir o‘zgaruvchining tavsiflari 9.2-rasmda berilgan. E’tibor bering, o‘tmishdagi bankrotlik o‘zgaruvchisi (`bankruptcy`) indikator o‘zgaruvchi . Unda agar qarz oluvchi o‘tmishda bankrotlikka duch kelgan bo‘lsa, qiymati 1, aks holda esa 0 ga teng bo‘ladi. Toifa nomi o‘rniga indikator o‘zgaruvchidan foydalanish ushbu o‘zgaruvchilarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri regressiyada ishlatishga imkon beradi. Boshqa ikkita (`income_ver` va `issued`) o‘zgaruvchilar esa toifali o‘zgaruvchilar bo‘lib, har biri bir nechta nominal qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Ularni modelda qanday ishlatishimizni 9.1.1-bo‘limda muhokama qilamiz.

	interest_rate	income_ver	debt_to_income	credit_util	bankruptcy	term	issued	credit_checks
1	14,07	verified	18,01	0,55	0	60	Mar2018	6
2	12,61	not	5,04	0,15	1	36	Feb2018	1
3	17,09	source_only	21,15	0,66	0	36	Feb2018	4
4	6,72	not	10,16	0,20	0	36	Jan2018	0
5	14,07	verified	57,96	0,75	0	36	Mar2018	7
6	6,72	not	6,46	0,09	0	36	Jan2018	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

9.1-rasm. `loans` ma’lumotlar to‘plamidan dastlabki oltita qator.

o‘zgaruvchi	**tavsif**
`interest_rate`	Qarz uchun foiz stavkasi (`foiz stavkasi`).
`income_ver`	Qarz oluvchining daromad manbai va miqdori tasdiqlanganligini tavsiflovchi toifali o‘zgaruvchi (`daromad tasdig‘i`). Ushbu o‘zgaruvchi `tasdiqlangan` (`verified`), `faqat manba` (`source_only`), va `yo‘q` (`not`) darajalarini qabul qiladi.
`debt_to_income`	Qarzdorlik darajasi, ya’ni qarz oluvchining umumiy qarzlarining umumiy daromadiga nisbatan foizi (`qarzdorlik darajasi`).
`credit_util`	Qarz oluvchi foydalanayotgan barcha kredit imkoniyatlarining ulushi. Masalan, kredit kartasining kreditdan foydalanish ko‘rsatkichi kartaning balansini kartaning kredit limitiga bo‘lish orqali hisoblanadi (`kredit ulushi`).
`bankruptcy`	Qarz oluvchining o‘tmishda bankrotlik holati mavjudligini ko‘rsatuvchi indikator o‘zgaruvchi (`bankrotlik`). Ushbu o‘zgaruvchi agar javob “ha” bo‘lsa, `1` qiymatni va agar javob “yo‘q” bo‘lsa, `0` qiymatni qabul qiladi.
`term`	Qarzning muddati, oylar bilan (`muddati`).
`issued`	Qarz berilgan yil va oy, bu qarzlar har doim 2018 yilning birinchi choragida berilgan (`berilgan vaqti`).
`credit_checks`	So‘nggi 12 oyda kredit tekshiruvlari soni. Masalan, kredit kartasi uchun ariza topshirganda, odatda ariza oluvchi kompaniya kreditni tekshiradi (`kredit tekshiruvi`).

9.2-rasm. `loans` ma’lumotlar to‘plamidagi o‘zgaruvchilar va ularning tavsiflari.

9.1.1 Indikator va toifali o‘zgaruvchilar bashoratlovchi sifatida

Keling, biror kishining o‘tmishda bankrotlik holati mavjudligini ko‘rsatuvchi yagona bashoratlovchi bilan foiz stavkasiga chiziqli regressiya modelini moslashtirishdan boshlaymiz:

$$\widehat{foiz\ stavkasi} = 12.33 + 0{,}74 \times bankrotlik.$$

Ushbu model natijalari 9.3-rasmda keltirilgan.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	12,3380	0,0533	231,49	<0,0001
bankrotlik	0,7368	0,1529	4,82	<0,0001
				$ed = 9998$

9.3-rasm. Qarz oluvchining o‘tmishda bankrotlik holati mavjudligiga asoslangan foiz stavkasini bashorat qilish uchun chiziqli modelning umumlashmasi.

9.1-MISOL

Modeldagi o‘tmishdagi bankrotlik o‘zgaruvchisi uchun koeffitsiyentni talqin qiling. Ushbu koeffitsiyent 0 dan sezilarli darajada farq qiladimi?

`bankrotlik` (`bankruptcy`) o‘zgaruvchisi ikkita qiymatdan birini oladi: qarz oluvchi tarixida bankrotlik mavjud bo‘lsa 1 va aks holda 0. Burchak koeffisiyent 0,74 modelning o‘tmishda bankrotlik holati bo‘lgan qarz oluvchilar uchun foiz stavkasi 0,74% ga yuqori bo‘lishini bashorat qilishini anglatadi. (Ikki darajali toifali bashoratlovchi o‘zgaruvchilarni talqin qilish uchun 8.2.8-bobga qarang.) 9.3-rasmdagi regressiya natijalarini tekshirib, `bankrotlik` uchun p-qiymat nolga juda yaqinligini ko‘rishimiz mumkin. Bu shuni ko‘rsatadiki, ushbu oddiy bitta bashoratlovchili modeldan foydalangan holda koeffitsiyentning 0 dan farq qilishi uchun kuchli dalillari mavjud.

Faraz qilaylik, biz uchta darajaga ega toifali o‘zgaruvchi, masalan, `daromad tasdig‘i` (`income_ver`) yordamida modelni moslashtirdik. Dasturiy ta’minot natijalari 9.4-rasmda keltirilgan. Ushbu regressiya natijalari `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi uchun bir nechta qatorlarni taqdim etadi. Har bir qator `daromad tasdig‘i` ning har bir darajasi uchun nisbiy farqni anglatadi. Ammo, biz darajalardan biri `yo‘q` (`not`) ni (tasdiqlanmagani uchun) ko‘rsatmayapmiz. Ushbu `yo‘q` daraja **etalon daraja** deb ataladi va bu boshqa darajalar qiyoslanadigan standart darajani ifodalaydi.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	11,0995	0,0809	137,18	<0,0001
daromad tasdig‘i: *faqat manba*	1,4160	0,1107	12,79	<0,0001
daromad tasdig‘i: *tasdiqlangan*	3,2543	0,1297	25,09	<0,0001
				$ed = 9998$

9.4-rasm. Qarz oluvchining daromad manbai va miqdori tasdiqlangani asosida foiz stavkasini bashorat qilish uchun chiziqli modelning umumlashmasi. Ushbu bashoratlovchi uchta darajaga ega, bu esa regressiya natijalarida 2 qatorni hosil qiladi.

9.2-MISOL

Ushbu regressiya modeli uchun tenglamani qanday yozamiz?

Regressiya modelining tenglamasi ikkita bashoratlovchi model sifatida quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\widehat{foiz\ stavkasi} = 11{,}10 + 1{,}42 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} + 3{,}25 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}}.$$

Biz $\texttt{o‘zgaruvchi}_{\texttt{daraja}}$ belgilaridan foydalanib, toifali o‘zgaruvchi ma’lum bir qiymatni olganini ifodalash uchun ishlatiladigan indikator o‘zgaruvchilarni tasvirlaymiz.

Masalan, $\texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}}$ agar qarz oluvchi uchun `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi

`faqat manba` qiymatini olgan bo‘lsa, 1 qiymatga ega bo‘ladi, aks holda esa 0 qiymatni oladi. Xuddi shunday, `daromad tasdig‘i`$_{\texttt{tasdiqlangan}}$ agar `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi `tasdiqlangan` qiymatini olgan bo‘lsa 1 va boshqa har qanday qiymatni olganda 0 qiymatga ega bo‘ladi.

Tushunarli bo‘lishi uchun 9.2-misoldagi holatni batafsil ko‘rib chiqamiz. Keling, `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi uchun har bir darajadan tenglamada qanday foydalanishni aniqlaymiz.

9.3-MISOL

9.2-misoldagi modeldan foydalanib, daromad manbai va miqdori tasdiqlanmagan qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasini hisoblang.

Agar `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi `not` qiymatini olgan bo‘lsa, unda 9.2-misoldan tenglamadagi ikkala indikator funksiyalari nolga teng bo‘ladi:

$$\widehat{foiz\ stavkasi} = 11{,}10 + 1{,}42 \times 0 + 3{,}25 \times 0 = 11{,}10.$$

Ushbu qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasi 11,1% ni tashkil etadi. Chunki `not` darajasi o‘z koeffitsiyentiga ega emas va bu etalon qiymat bo‘lib xizmat qiladi. Ushbu o‘zgaruvchining boshqa darajalari uchun indikatorlar tenglamadan tushib qoladi.

9.4-MISOL

9.2-misoldagi modeldan foydalanib, daromad manbai tasdiqlangan, lekin miqdori tasdiqlanmagan qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasini hisoblang.

Agar `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi `faqat manba` qiymatini olgan bo‘lsa, unga mos keluvchi o‘zgaruvchi 1 qiymatni oladi, boshqa o‘zgaruvchi (`daromad tasdig‘i`$_{\texttt{tasdiqlangan}}$) esa 0 bo‘ladi:

$$\widehat{foiz\ stavkasi} = 11{,}10 + 1{,}42 \times 1 + 3{,}25 \times 0 = 12{,}52.$$

Ushbu qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasi 12,52% ni tashkil etadi.

9.5-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Daromad manbai va miqdori tasdiqlangan qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasini hisoblang.[1]

BIR NECHTA TOIFAGA EGA BASHORATLOVCHILAR

Agar $k > 2$ bo‘lgan k darajali toifali o‘zgaruvchiga ega bo‘lgan regressiya modeli moslashtirilsa, dasturiy ta’minot ushbu darajalarning $k - 1$ tasi uchun koeffitsiyentni beradi. Ko‘rsatkichga ega bo‘lmagan so‘nggi daraja **etalon daraja** deb ataladi va boshqa darajalar uchun keltirilgan koeffitsiyentlar ushbu etalon darajaga nisbatan baholanadi.

9.6-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

`daromad tasdig‘i` modelidagi koeffitsiyentlarni talqin qiling.[2]

Daromad manbai yoki miqdori tasdiqlangan qarz oluvchilar uchun foiz stavkasining yuqoriroq bo‘lishi ajablanarli. Mantiqan, qarz oluvchining daromadi tasdiqlangan bo‘lsa, qarz xavfi kamroq ko‘rinishi kerak edi. Ammo vaziyat murakkabroq bo‘lishi mumkin, va biz hisobga olmagan boshqa o‘zgaruvchi omillar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, kredit beruvchilar yomon kreditga ega qarz oluvchilardan daromadni tasdiqlashni talab qilishlari mumkin. Ya’ni, bizning ma’lumotlar to‘plamimizda daromadni tasdiqlash qarz oluvchi haqida xavotir belgisi bo‘lishi mumkin, qarzni qaytarish qobiliyati haqida ishonch emas. Shuning uchun, qarz oluvchi yuqori xavfli deb baholanadi

[1] Agar `daromad tasdig‘i` o‘zgaruvchisi `tasdiqlangan` qiymatini olgan bo‘lsa, unga mos keluvchi o‘zgaruvchi 1 qiymatni oladi, boshqa o‘zgaruvchi (`daromad tasdig‘i`$_{\texttt{faqat manba}}$) esa 0 bo‘ladi:

$$\widehat{foiz\ stavkasi} = 11{,}10 + 1{,}42 \times 0 + 3{,}25 \times 1 = 14{,}35.$$

Ushbu qarz oluvchilar uchun o‘rtacha foiz stavkasi 14,35% ni tashkil etadi.

[2] Har bir koeffitsiyent ushbu darajaning `not` darajasiga nisbatan foiz stavkasidagi o‘sishini bildiradi, bu etalon daraja hisoblanadi. Masalan, daromad manbai va miqdori tasdiqlangan qarz oluvchilar uchun model ularning foiz stavkasi daromad manbai va miqdori tasdiqlanmagan qarz oluvchilarga nisbatan 3.25% yuqori bo‘lishini bashorat qiladi.

va natijada yuqori foiz stavkasi belgilanishi mumkin. (Bu model tomonidan taklif etilgan mantiqiy bo‘lmagan munosabatni tushuntirish uchun yana qanday omillar bo‘lishi mumkin?)

Y **9.7-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Daromad manbai va miqdori tasdiqlangan qarz oluvchi uchun faqat daromad manbai tasdiqlangan qarz oluvchiga nisbatan foiz stavkasi qancha yuqori bo‘lishini kutamiz?[3]

9.1.2 Modelga ko‘plab o‘zgaruvchilarni kiritish va baholash

Dunyo murakkab va statistik modellashtirishda bir vaqtning o‘zida ko‘plab omillarni hisobga olish foydali bo‘lishi mumkin. Masalan, qarz oluvchining olingan foiz stavkasini bashorat qilish uchun yagona o‘zgaruvchi o‘rniga qarz oluvchining to‘liq kontekstini ishlatishni xohlashimiz mumkin. Bu strategiya **ko‘p o‘lchovli regressiya** deb ataladi. Biz kuzatilgan ma’lumotlarga asoslangan ko‘p o‘lchovli regressiyadan foydalanishda har qanday sababiy talqinlarni amalga oshirishda ehtiyot bo‘lsak ham, bunday modellar ko‘pincha tushuncha olish yoki sababiy bog‘lanish haqida ba’zi dalillarni taqdim etish uchun birinchi qadam bo‘lib xizmat qiladi.

Biz nafaqat o‘tmishdagi bankrotlik yoki qarz oluvchining daromad manbai yoki miqdori tasdiqlanganligini hisobga oladigan, balki bir vaqtning o‘zida ma’lumotlar to‘plamidagi barcha o‘zgaruvchilarni hisobga oladigan modelni qurmoqchimiz: `daromad tasdig‘i`, `qarzdorlik darajasi`, `kredit ulushi`, `bankrotlik`, `muddati`, `berilgan vaqti`, va `kredit tekshiruvi`.

$$\begin{aligned}\texttt{foiz stavkasi} = \beta_0 &+ \beta_1 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} + \beta_2 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}} + \\ &+ \beta_3 \times \texttt{qarzdorlik darajasi} + \beta_4 \times \texttt{kredit ulushi} + \beta_5 \times \texttt{bankrotlik} + \\ &+ \beta_6 \times \texttt{muddati} \beta_7 \times \texttt{berilgan sana}_{\texttt{Yan2018}} + \beta_8 \times \texttt{berilgan sana}_{\texttt{Mar2018}} + \\ &+ \beta_9 \times \texttt{kredit tekshiruvi}.\end{aligned}$$

Ushbu tenglama barcha o‘zgaruvchilarni bir vaqtning o‘zida modellashtirish yondashuvini ifodalaydi. E’tibor bering, `daromad tasdig‘i` va `berilgan sana` uchun ikkita koeffitsiyent mavjud, chunki ikkalasi ham 3-darajali toifali o‘zgaruvchilardir.

β_0, β_1, β_2, ..., β_9 parametrlarni yagona bashoratlovchi holatida bo‘lgani kabi baholaymiz. b_0, b_1, b_2, ..., b_9 ni shunday tanlaymizki, qoldiqlarning kvadratlari yig‘indisi minimal bo‘lsin:

$$KSX = e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_{10000}^2 = \sum_{i=1}^{10000} e_i^2 = \sum_{i=1}^{10000} (y_i - \hat{y}_i)^2 . \tag{9.8}$$

bu yerda y_i va $\hat{y}_i$ mos ravishda kuzatilgan foiz stavkalari va model bo‘yicha baholangan qiymatlarni anglatadi. 10000 ta qoldiq har bir kuzatuv uchun hisoblanadi. Kvadratlar yig‘indisini minimallashtirish va nuqtaviy baholarini hisoblash uchun odatda kompyuterdan foydalanamiz. Buni 9.5-rasmdagi namunaviy natijada ko‘rishimiz mumkin. Ushbu natijadan foydalanib, har bir β_i uchun b_i nuqtaviy baholarni, xuddi bitta bashoratlovchi holatida bo‘lgani kabi aniqlaymiz.

KO‘P O‘LCHOVLI REGRESSIYA MODELI

Ko‘p o‘lchovli regressiya modeli ko‘plab bashoratlovchilarga ega chiziqli modeldir. Umuman olganda, model quyidagicha yoziladi:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

bu yerda k ta bashoratlovchi o‘zgaruvchilar mavjud. β_i parametrlari har doim statistik dasturiy ta’minot yordamida baholanadi.

M **9.9-MISOL**

9.5-rasmdagi nuqtaviy baholaridan foydalangan holda regressiya modelini yozing. Ushbu modelda

[3] `not` kategoriyasiga nisbatan `tasdiqlangan` kategoriyasining foiz stavkasi 3.25% yuqoridir, `faqat manba` kategoriyasi esa faqat 1.42% yuqoridir. Shunday qilib, `tasdiqlangan` qarz oluvchilar odatda `faqat manba` qarz oluvchilarga qaraganda $3.25\% - 1.42\% = 1.83\%$ yuqori foiz stavkasi oladi.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	1,9251	0,2102	9,16	<0,0001
daromad tasdig‘i: *faqat manba*	0,9750	0,0991	9,83	<0,0001
daromad tasdig‘i: *tasdiqlangan*	2,5374	0,1172	21,65	<0,0001
qarzdorlik darajasi	0,0211	0,0029	7,18	<0,0001
kredit ulushi	4,8959	0,1619	30,24	<0,0001
bankrotlik	0,3864	0,1324	2,92	0,0035
muddati	0,1537	0,0039	38,96	<0,0001
berilgan sana: *Yan2018*	0,0276	0,1081	0,26	0,7981
berilgan sana: *Mar2018*	-0,0397	0,1065	-0,37	0,7093
kredit tekshiruvi	0,2282	0,0182	12,51	<0,0001

$ed = 9990$

9.5-rasm. Regressiya modeli natijalari, bu yerda `foiz stavkasi` (`interest_rate`) natija o‘zgaruvchisi bo‘lib, ro‘yxatdagi o‘zgaruvchilar bashoratlovchi hisoblanadi.

nechta bashoratlovchi mavjud?

---

foiz stavkasi uchun moslashtirilgan model quyidagicha berilgan:

$$\begin{aligned}\widehat{\texttt{foiz stavkasi}} = {} & 1{,}925 + 0{,}975 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} + 2{,}537 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}} + \\ & + 0{,}021 \times \texttt{qarzdorlik darajasi} + 4{,}896 \times \texttt{kredit ulushi} + 0{,}386 \times \texttt{bankrotlik} + \\ & + 0{,}154 \times \texttt{muddati} + 0{,}028 \times \texttt{berilgan vaqti}_{\texttt{Yan2018}} - 0{,}040 \times \texttt{berilgan vaqti}_{\texttt{Mar2018}} + \\ & + 0{,}228 \times \texttt{credit_checks} \ .\end{aligned}$$

Agar biz bashoratlovchi koeffitsiyentlarni sanasak $k = 9$, modeldagi *samara ko‘rsatkichlari* sonini olamiz. E’tibor bering, `berilgan vaqti` toifali bashoratlovchi ikkita daraja sifatida hisobga olinadi, chunki modelda ikkita daraja ko‘rsatilgan. Umuman olganda, p xil darajaga ega toifali bashoratlovchi ko‘p o‘lchovli regressiya modelida $p - 1$ atama bilan ifodalanadi.

Y **9.10-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

`kredit ulushi` o‘zgaruvchisi uchun β_4 koeffitsiyenti nimani anglatadi? β_4 uchun nuqtaviy baho qanday?[4]

M **9.11-MISOL**

9.1-rasmdagi birinchi kuzatuvning qoldig‘ini hisoblang (318-betga qarang.) va buni hisoblash uchun 9.9-yo‘natirilgan mashqda berilgan tenglamadan foydalaning.

Qoldiqni hisoblash uchun, avvalo bashorat qilingan qiymatni topish kerak. Bu esa 9.9-misoldagi tenglamaga qiymatlarni kiritish orqali hisoblanadi. Masalan $\texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}}$ qiymati 0 ga teng bo‘ladi, $\texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}}$ qiymati 1 ga teng bo‘ladi (chunki qarz oluvchining daromad manbai va miqdori tasdiqlangan). `qarzdorlik darajasi` esa 18,01 va hokazo. Bu $\widehat{foiz\ stavkasi}_1 = 18{,}09$ ga teng bashoratni beradi. Kuzatilgan foiz stavkasi 14.07% bo‘lib, bu $e_1 = 14{,}07 - 18{,}09 = -4{,}02$ qoldiqni beradi.

M **9.12-MISOL**

9.1.1-bo‘limda oddiy chiziqli regressiyadan foydalanib `bankrotlik` uchun $b_4 = 0{,}74$ va Standart xatolik $SX_{b_1} = 0{,}15$ bahosi hisoblangan edi. Ko‘p o‘lchovli regressiya kontekstida 0,39 koeffitsiyentining bahosi nega farq qiladi?

Agar ma’lumotlarni diqqat bilan ko‘rib chiqsak, ba’zi bashoratlovchilar o‘zaro bog‘liq ekanligini ko‘ramiz. Masalan, oddiy chiziqli regressiyadan foydalanib `foiz stavkasi` natijasi va `bankrotlik` bashoratlovchi o‘rtasidagi bog‘lanishni baholaganimizda, boshqa o‘zgaruvchilarni, masalan, qarz oluvchining daromadi tasdiqlanganligi, qarzdorlik darajasi va boshqa o‘zgaruvchilarni nazorat qila olmadik. Dastlabki model izolyatsiyada tuzilgan edi va to‘liq holat hisobga olinmagan. Barcha o‘zgaruvchilarni kiritganimizda, ushbu boshqa o‘zgaruvchilar

[4] β_4 biror kishining kreditdan foydalanish darajasi 0 dan 1 gacha o‘zgarsa, barcha boshqa omillar bir xil bo‘lganda foiz stavkasidagi o‘zgarishni anglatadi. Nuqtaviy bahosi $b_4 = 4{,}90\%$ ni tashkil qiladi.

tomonidan kiritilgan yashirin va noxush tarafkashlik kamayadi yoki bartaraf etiladi. Albatta, boshqa konfonding o‘zgaruvchilardan kelib chiqadigan tarafkashlik hali ham mavjud bo‘lishi mumkin.

9.12-misol ko‘p o‘lchovli regressiyada uchraydigan keng tarqalgan muammoni, ya’ni bashoratlovchi o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘liqlikni tasvirlaydi. Agar ikkita bashoratlovchi o‘zgaruvchi o‘zaro korrelyatsiyaga ega bo‘lsa, biz ularni kollinear deb ataymiz va bu kollinearlik modelni baholashni qiyinlashtiradi. Kuzatuv ma’lumotlarida kollinearlik yuzaga kelishining oldini olish imkonsiz bo‘lsa-da, tajribalar (eksperimentlar), odatda, bashoratlovchilarning kollinear bo‘lib qolmasligini ta’minlaydigan tarzda loyihalashtiriladi.

Y **9.13-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Ozod hadning baholangan qiymati 1,925 bo‘lib, bu koeffitsiyentni talqin qilish zarurati tug‘ilishi mumkin. Masalan, bu har bir o‘zgaruvchi nol qiymatini olganda daromad manbai tasdiqlanmagan, qarz oluvchi qarzga ega emas va hokazo holatdir. Bu mantiqiymi? Ushbu talqinni amalga oshirish orqali biron-bir foyda olinadimi?[5]

9.1.3 Tuzatilgan R^2 — ko‘p o‘lchovli regressiya uchun yaxshiroq baholash vositasi

Biz birinchi marta R^2 ni 8.2-bo‘limda javobdagi o‘zgaruvchanlikning model tomonidan tushuntirilgan qismini aniqlash uchun ishlatgan edik:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{qoldiqlardagi o‘zgaruvchanlik}}{\text{natijadagi o‘zgaruvchanlik}} = 1 - \frac{Var(e_i)}{Var(y_i)}$$

bu yerda e_i modelning qoldiqlarini, y_i esa natijalarni ifodalaydi. Ushbu tenglama ko‘p o‘lchovli regressiya mazmunida ham amal qiladi. Lekin modellarning solishtirilishi va uni yanada foydali qilish uchun kichik o‘zgartirish kiritilishi mumkin.

Y **9.14-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

9.9-yo‘natirilgan mashqda berilgan model uchun qoldiqlarning dispersiyasi 18,53, barcha auksionlardagi umumiy narxning dispersiyasi esa 25,01. Ushbu model uchun R^2 ni hisoblang.[6]

Bu R^2 ni baholash strategiyasi faqat bitta o‘zgaruvchi bo‘lganda qabul qilinadi. Ammo, ko‘p o‘zgaruvchilar mavjud bo‘lganda u unchalik foydali bo‘lmaydi. Oddiy R^2 yangi ma’lumotlar to‘plamiga nisbatan model tomonidan tushuntirilgan o‘zgaruvchanlikning tarafkash bahosi hisoblanadi. Yaxshiroq baholash uchun biz R^2_{tuz} dan foydalanamiz.

MODELNI BAHOLASH UCHUN R^2_{tuz} VOSITASI

Tuzatilgan R^2 quyidagicha hisoblanadi:

$$R^2_{tuz} = 1 - \frac{s^2_{\text{qoldiqlar}}/(n-k-1)}{s^2_{\text{natija}}/(n-1)} = 1 - \frac{s^2_{\text{qoldiqlar}}}{s^2_{\text{natija}}} \times \frac{n-1}{n-k-1}$$

bu yerda n modelni moslashtirishda ishlatilgan holatlar soni, k esa modeldagi bashoratlovchi o‘zgaruvchilar soni. Yodda tutingki, p darajaga ega bo‘lgan toifali bashoratlovchi modeldagi o‘zgaruvchilar soniga $p-1$ miqdorda hissa qo‘shadi.

k hech qachon manfiy bo‘lmaganligi sababli, tuzatilgan R^2_{tuz} oddiy R^2 ga qaraganda kichikroq bo‘ladi, ko‘pincha juda ozgina kichikroq. Tuzatilgan R^2 ni asoslaydigan mantiq **erkinlik darajalari** bilan bog‘liq bo‘lib, bu ko‘p o‘lchovli regressiya kontekstida $n-k-1$ ga teng. Agar hozirgi modelimizdan foydalanib *yangi ma’lumotlar* bashorat qilsak, oddiy R^2 haddan tashqari optimistik bo‘lib

[5] Ko‘p o‘zgaruvchilar kamida bir ma’lumot nuqtasi uchun nol qiymatini oladi va bunday o‘zgaruvchilar uchun bu mantiqiy. Ammo bitta o‘zgaruvchi `muddati` nol qiymatini hech qachon olmaydi. Bu qarzni qaytarilish muddatini oylar bilan ifodalaydi. Agar `muddati` nolga o‘rnatilgan bo‘lsa, qarz darhol qaytarilishi kerak. Qarz oluvchi mablag‘ni olishi bilan qaytarishi kerak. Ya’ni, bu haqiqiy qarz emas. Natijada, ushbu holatda ozod hadning talqini unchalik foydali emas.

[6] $R^2 = 1 - \frac{18{,}53}{25{,}01} = 0{,}2591$.

chiqadi, holbuki tuzatilgan R^2 bu tarafkashlikni tuzatishda yordam beradi.

Y **9.15-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

`loans` ma’lumotlar to‘plamida $n = 10000$ ta auksion va modelda $k = 9$ bashoratlovchi o‘zgaruvchilar mavjud edi. n, k va 9.14-yo‘natirilgan mashqda keltirilgan dispersiyalardan foydalanib, foiz stavkasi modeli uchun R^2_{tuz} ni hisoblang.[7]

Y **9.16-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

Modelga yana bir bashoratlovchi qo‘shganingizni tasavvur qiling, lekin xatoliklar dispersiyasi $Var(e_i)$ kamaymadi. R^2 ga nima bo‘ladi? Tuzatilgan R^2 ga nima bo‘ladi? [8]

Tuzatilgan R^2 8-bobda qo‘llanilgan bo‘lishi mumkin edi. Ammo, agar faqat $k = 1$ bashoratlovchi mavjud bo‘lsa, tuzatilgan R^2 oddiy R^2 ga juda yaqin bo‘ladi. Shuning uchun model faqat bitta bashoratlovchiga ega bo‘lganda bu noziklik odatda muhim emas.

Mashqlar

9.1 Chaqaloq vazni, 1-qism. Bolalar salomatligi va rivojlanishi tadqiqotlari turli mavzularni o‘rganadi. Bir tadqiqot 1960- va 1967-yillar orasida San-Fransisko Sharqiy Bay hududidagi “Kaiser Foundation” sog‘liqni saqlash rejasi doirasida ayollar o‘rtasidagi barcha homiladorliklarni ko‘rib chiqdi. Bu yerda biz chekish va chaqaloqning vazni o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganamiz. `chekish` (`smoke`) o‘zgaruvchisi agar ona chekuvchi bo‘lsa 1 va aks holda 0 deb kodlangan. Quyidagi umumlashma jadvali onaning chekish holati asosida chaqaloqning o‘rtacha tug‘ilgan vaznini (unsa bilan o‘lchanadi) bashorat qilish uchun chiziqli regressiya modelining natijalarini ko‘rsatadi.[9]

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	123,05	0,65	189,60	0,0000
chekish	-8,94	1,03	-8,65	0,0000

Chekuvchi va chekmaydiganlar o‘rtasidagi o‘zgaruvchanlik taxminan teng va taqsimotlar simmetrik. Ushbu shartlar bajarilganligi sababli, modelni qo‘llash mantiqan to‘g‘ri (Qayd etish joizki, biz chiziqlilikni tekshirishga ehtiyoj sezmaymiz, chunki bashoratlovchi faqat ikki darajaga ega).

(a) Regressiya modelining tenglamasini yozing.

(b) Ushbu masala mazmunidan kelib chiqib burchak koeffitsiyentni talqin qiling va chekuvchi va chekmaydigan onalardan tug‘ilgan chaqaloqlarning bashorat qilingan vaznini hisoblang.

(c) O‘rtacha tug‘ilgan vazn va chekish o‘rtasida statistik jihatdan ahamiyatli bog‘liqlik bormi?

9.2 Chaqaloq vazni, 2-qism. 9.1-mashq chaqaloqlarning tug‘ilish vaznlariga oid ma’lumotlarni taqdim etadi. Biz ko‘rib chiqadigan boshqa o‘zgaruvchi `tug‘ilish tartibi` (`parity`) agar bola birinchi bo‘lib tug‘ilgan bo‘lsa 1 va aks holda 0 deb kodlanadi. Quyidagi umumlashgan jadval chaqaloqlarning tug‘ilgan o‘rtacha vaznini (unsa bilan o‘lchanadi) `tug‘ilish tartibi` o‘zgaruvchisi asosida bashorat qilish uchun chiziqli regressiya modelining natijalarini ko‘rsatadi.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	120,07	0,60	199,94	0,0000
tug‘ilish tartibi	-1,93	1,19	-1,62	0,1052

(a) Regressiya modelining tenglamasini yozing.

(b) Ushbu mazmunidan kelib chiqib burchak koeffitsiyentni talqin qiling va birinchi tug‘ilganlar va boshqalar uchun bashorat qilingan tug‘ilish vaznini hisoblang.

(c) O‘rtacha tug‘ilgan vazn va `tug‘ilish tartibi` o‘rtasida statistik jihatdan ahamiyatli bog‘liqlik bormi?

9.3 Chaqaloq vazni, 3-qism. 9.1- va 9.2mashqlarda biz chaqaloqlarning tug‘ilgan vaznlarini alohida-alohida `chekish` va `tug‘ilish tartibi` o‘zgaruvchilaridan foydalangan holda modellashni ko‘rib chiqdik. Chaqaloqning vaznini modellashning yanada realistik yondashuvi, barcha mumkin bo‘lgan bog‘liq o‘zgaruvchilarni bir vaqtning o‘zida ko‘rib chiqishdir. Qiziqish uyg‘otadigan boshqa o‘zgaruvchilar quyidagilarni o‘z ichiga oladi: homiladorlik davomiyligi (`gestation`, kunlarda), onaning yoshi (`age`, yillarda), onaning bo‘yi (`height`, dyuymlarda) va onaning homiladorlikdagi vazni (`weight`, funtlarda). Quyida ushbu ma’lumotlar to‘plamidan uchta kuzatuv ko‘rsatilgan.

[7] $R^2_{tuz} = 1 - \frac{18,53}{25,01} \times \frac{10000-1}{10000-9-1} = 0,2584$. Farq juda kichik bo‘lsa-da, bu keyingi bo‘limda modelni nozik sozlashda muhim bo‘ladi.

[8] Oddiy R^2 o‘zgarishsiz qoladi, tuzatilgan R^2 esa pasayadi.

[9] Child Health and Development Studies, Baby weights data set.

	bwt	gestation	parity	age	height	weight	smoke
1	120	284	0	27	62	100	0
2	113	282	0	33	64	135	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1236	117	297	0	38	65	129	0

Quyidagi umumlashma jadvali ma’lumotlar to‘plamidagi barcha o‘zgaruvchilarga asoslanib chaqaloqlarning o‘rtacha tug‘ilish vaznini bashorat qilish uchun regressiya modelining natijalarini ko‘rsatadi.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	-80,41	14,35	-5,60	0,0000
gestation	0,44	0,03	15,26	0,0000
parity	-3,33	1,13	-2,95	0,0033
age	-0,01	0,09	-0,10	0,9170
height	1,15	0,21	5,63	0,0000
weight	0,05	0,03	1,99	0,0471
smoke	-8,40	0,95	-8,81	0,0000

(a) Barcha o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan regressiya modelining tenglamasini yozing.

(b) Ushbu mazmunda `gestation` va `age` o‘zgaruvchilarining burchak koeffitsiyentlarini talqin qiling.

(c) `parity` uchun koeffitsient 9.2-mashqda ko‘rsatilgan chiziqli modeldan farqli ekanligi sababini tushuntiring.

(d) Ma’lumotlar to‘plamidagi birinchi kuzatuv uchun qoldiqni hisoblang.

(e) Qoldiqlar dispersiyasi 249,28 va ma’lumotlar to‘plamidagi barcha chaqaloqlarning tug‘ilish vaznlarining dispersiyasi 332,57. R^2 va tuzatilgan R^2 ni hisoblang. Ma’lumotlar to‘plamida 1236 ta kuzatuv borligini hisobga oling.

9.4 Maktabdan qolish, 1-qism. Maktabdan qolish va bolalarning ma’lum demografik xususiyatlari o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganayotgan tadqiqotchilar Avstraliyaning Yangi Janubiy Uels qishloq hududlaridan tasodifiy tanlangan 146 nafar talabadan o‘quv yilida ma’lumot to‘plashdi. Quyida ushbu ma’lumotlar to‘plamidan uchta kuzatuv ko‘rsatilgan.

	etnik	jinsi	o‘qishi	kunlar
1	0	1	1	2
2	0	1	1	11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
146	1	0	0	37

Quyidagi umumlashma jadvali etnik kelib chiqish (0 - aborigen, 1 - aborigen emas), jinsi (0 - ayol, 1 - erkak) va o‘qish holati (0 - o‘rtacha o‘quvchi, 1 - sekin o‘quvchi) asosida o‘quv kunlarini o‘tkazib yuborishning o‘rtacha sonini bashorat qilish uchun chiziqli regressiya modelining natijalarini ko‘rsatadi.[10]

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	18,93	2,57	7,37	0,0000
etnik	-9,11	2,60	-3,51	0,0000
jinsi	3,10	2,64	1,18	0,2411
o‘qishi	2,15	2,65	0,81	0,4177

(a) Regressiya modelining tenglamasini yozing.

(b) Ushbu mazala mazmunidan kelib chiqib har bir burchak koeffitsiyentini talqin qiling.

(c) Ma’lumotlar to‘plamidagi birinchi kuzatuv uchun qoldiqni hisoblang. Bu aborigen, erkak, sekin o‘quvchi bo‘lgan va maktabga 2 kun qatnashmagan o‘quvchi.

(d) Qoldiqlarning dispersiyasi 240,57 va ma’lumotlar to‘plamidagi barcha talabalar uchun o‘quv kunlarini o‘tkazib yuborish sonining dispersiyasi 264,17. R^2 va tuzatilgan R^2 ni hisoblang. Ma’lumotlar to‘plamida 146 ta kuzatuv borligini hisobga oling.

9.5 GPA. Duke Universitetining 55 nafar talabasi o‘rtasida o‘tkazilgan so‘rovda ularning GPA, tunda necha soat o‘qishlari, necha marta kechga tashqariga chiqishlari va jinslari so‘ralgan. Quyidagi jadval regressiya modelining umumlashgan natijalarini ko‘rsatadi. E’tibor bering, erkak 1 deb kodlangan.

[10] W. N. Venables and B. D. Ripley. *Modern Applied Statistics with S*. Fourth Edition. Data can also be found in the R MASS package. New York: Springer, 2002.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	3,45	0,35	9,85	0,00
o‘quv soati	0,00	0,00	0,27	0,79
tungi uyqu	0,01	0,05	0,11	0,91
kechasi ko‘chaga	0,05	0,05	1,01	0,32
jinsi	-0,08	0,12	-0,68	0,50

(a) Modeldagi jins o‘zgaruvchisi uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang va uni ma’lumotlar mazmunida talqin qiling.

(b) Qolgan o‘zgaruvchilarning burchak koeffitsiyentlari uchun 95% lik ishonch intervali 0 ni o‘z ichiga olishini kutasizmi? Izohlang.

9.6 Gilos daraxtlari. Yog‘och hosili daraxt hajmiga taxminan teng bo‘lsa-da, bu qiymatni daraxtni kesmasdan o‘lchash qiyin. Buning o‘rniga, balandlik va diametr kabi boshqa o‘zgaruvchilar daraxt hajmi va hosilini bashorat qilish uchun ishlatilishi mumkin. Qora gilos daraxtlarida ushbu o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi bog‘liqlikni tushunishni xohlagan tadqiqotchilar Pensilvaniya shtatidagi Allegheny milliy o‘rmonidan 31 ta daraxt haqida ma’lumot yig‘ishdi. Balandlik futda, diametr dyuymda (yerdan 54 dyuym balandlikda), va hajm kub futda o‘lchangan.[11]

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	-57,99	8,64	-6,71	0,00
balandlik	0,34	0,13	2,61	0,01
diametr	4,71	0,26	17,82	0,00

(a) Balandlik koeffitsienti uchun 95% lik ishonch intervalini hisoblang va uni ma’lumotlar mazmunidan kelib chiqib talqin qiling.

(b) Ushbu tanlanmadagigi bir daraxt 79 fut balandlikka ega, diametri 11,3 dyuym, va hajmi 24,2 kub fut. Model ushbu daraxt hajmini oshirib yuboradimi yoki kamaytiradimi va qanchaga?

9.2 Modelni tanlash

Eng yaxshi model har doim eng murakkab model emas. Ba’zida ahamiyatli bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni kiritish bashoratlarning aniqligini pasaytirishi mumkin. Ushbu bo‘limda biz modelni tanlash strategiyalarini muhokama qilamiz. Bu bizga modeldan unchalik ahamiyatli bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni chiqarib tashlashga yordam beradi. Amalda, bunday qisqartirishga uchragan o‘zgaruvchilarni modellarga **tejamkor** (inglizcha: parsimonious) model deb ataladi.

Amalda, barcha mavjud tushuntiruvchi o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan model ko‘pincha **to‘liq model** deb ataladi. To‘liq model har doim eng yaxshi model bo‘lmasligi mumkin. Agar unday bo‘lmasa, biz kichikroq, lekin afzal modelni aniqlashni istaymiz.

9.2.1 Modelda foydali bo‘lmasligi mumkin bo‘lgan o‘zgaruvchilarni aniqlash

Tuzatilgan R^2 model moslashuvining kuchini tavsiflaydi va bu bashoratlovchilarning modelga qiymat qo‘shayotganini baholash uchun foydali vositadir. Bu erda *qiymat qo‘shish* degani kelajakdagi natijalarni bashorat qilish aniqligini yaxshilashni anglatadi.

Keling, ikkita modelni ko‘rib chiqaylik, ular 9.6- va 9.7-jadvallarda keltirilgan. Birinchi jadval to‘liq modelni, ya’ni barcha bashoratlovchilarni o‘z ichiga olgan modelni tasvirlaydi, ikkinchisi esa `berilgan vaqti` o‘zgaruvchisini o‘z ichiga olmaydi.

9.17-MISOL

Ikki modeldan qaysi biri yaxshiroq?

Har bir model uchun tuzatilgan R^2 ni taqqoslab, qaysi birini tanlashimizni aniqlaymiz. Birinchi

[11] D.J. Hand. *A handbook of small data sets.* Chapman & Hall/CRC, 1994.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	1,9251	0,2102	9,16	< 0,0001
daromad tasdig‘i: *faqat manba*	0,9750	0,0991	9,83	< 0,0001
daromad tasdig‘i: *tasdiqlangan*	2,5374	0,1172	21,65	< 0,0001
qarzdorlik darajasi	0,0211	0,0029	7,18	< 0,0001
kredit ulushi	4,8959	0,1619	30,24	< 0,0001
bankrotlik	0,3864	0,1324	2,92	0,0035
muddati	0,1537	0,0039	38,96	< 0,0001
berilgan vaqti: *Yan2018*	0,0276	0,1081	0,26	0,7981
berilgan vaqti: *Mar2018*	−0,0397	0,1065	−0,37	0,7093
kredit tekshiruvi	0,2282	0,0182	12,51	< 0,0001
$R^2_{tuz} = 0{,}25843$				$ed = 9990$

9.6-rasm. To‘liq regressiya modeli uchun moslik natijalari, tuzatilgan R^2 ni ham o‘z ichiga oladi.

	Bahosi	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	1,9213	0,1982	9,69	< 0,0001
daromad tasdig‘i: *faqat manba*	0,9740	0,0991	9,83	< 0,0001
daromad tasdig‘i: *tasdiqlangan*	2,5355	0,1172	21,64	< 0,0001
qarzdorlik darajasi	0,0211	0,0029	7,19	< 0,0001
kredit ulushi	4,8958	0,1619	30,25	< 0,0001
bankrotlik	0,3869	0,1324	2,92	0,0035
muddati	0,1537	0,0039	38,97	< 0,0001
kredit tekshiruvi	0,2283	0,0182	12,51	< 0,0001
$R^2_{tuz} = 0{,}25854$				$ed = 9992$

9.7-rasm. `berilgan vaqti` o‘zgaruvchisi chiqarib tashlangandan keyingi regressiya modeli moslik natijalari.

modelning R^2_{tuz} ikkinchi modelning R^2_{tuz} dan kichikroq bo‘lgani uchun, biz ikkinchi modelni afzal ko‘ramiz.

`berilgan vaqti` bo‘lmagan model `berilgan vaqti` bo‘lgan modeldan yaxshiroq bo‘ladimi? Buni aniq bilolmaymiz, lekin tuzatilgan R^2 asosida bu bizning eng yaxshi baholashimiz.

9.2.2 Modelni tanlashning ikkita strategiyasi

Ko‘p o‘lchovli regressiya modelida o‘zgaruvchilarni qo‘shish yoki chiqarish uchun ishlatiladigan ikki keng tarqalgan strategiya *orqa tomondan yo‘qotish* (inglizcha: backward elimination) va *oldinga tanlash* (inglizcha: forward selection) deb ataladi. Bu texnikalar ko‘pincha **bosqichli** (inglizcha: stepwise) model tanlash strategiyalari deb ataladi, chunki ular nomzod bashoratlovchilarni “bir qadamda” qo‘shadi yoki o‘chiradi.

Orqa tomondan yo‘qotish barcha potentsial bashoratlovchi o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan modeldan boshlanadi. Modeldagi o‘zgaruvchilar tuzatilgan R^2 ni yaxshilash imkoniyati qolmaguncha birma-bir chiqarib tashlanadi. Strategiya har bir bosqichda tuzatilgan R^2 ni eng katta yaxshilashga olib keladigan o‘zgaruvchini olib tashlashdir.

Ⓜ **9.18-MISOL**

`loans` ma’lumotlar to‘plami uchun *to‘liq model* ga mos keluvchi natijalar 9.6-rasmda ko‘rsatilgan. Orqa tomondan yo‘qotish strategiyasi ostida qanday davom etishimiz kerak?

To‘liq modeldan olingan boshlang‘ich tuzatilgan R^2 qiymati $R^2_{tuz} = 0{,}258\,43$ va biz bashoratlovchilarni chiqarib tashlash tuzatilgan R^2 ni yaxshilaydimi yoki yo‘qligini aniqlashimiz kerak. Buni tekshirish uchun biz har bir bashoratlovchini olib tashlagan holda moslashtirilgan modellarning tuzatilgan R^2 ni qayd qilamiz:

Qoldirilsin ...

`daromad tasdig‘i`	`qarzdorlik darajasi`	`kredit ulushi`	`bankrotlik`
$R^2_{tuz} = 0{,}22380$	$R^2_{tuz} = 0{,}25468$	$R^2_{tuz} = 0{,}19063$	$R^2_{tuz} = 0{,}25787$
`muddati`	`berilgan vaqti`	`kredit tekshiruvi`	
$R^2_{tuz} = 0{,}14581$	$R^2_{tuz} = 0{,}25854$	$R^2_{tuz} = 0{,}24689$	

`berilgan vaqti` bo‘lmagan model tuzatilgan R^2 ni eng yuqori, 0,25854 ga ega, bu esa to‘liq modeldan yuqoriroq. `berilgan vaqti` ni chiqarib tashlash tuzatilgan R^2 ni yaxshiroq modelga olib kelgani uchun, biz `berilgan vaqti` ni modeldan chiqaramiz.

Birinchi bosqichda bashoratlovchini chiqarib tashlaganimiz uchun, boshqa bashoratlovchilarni ham chiqarish kerakligini ko‘rib chiqamiz. Bizning boshlang‘ich tuzatilgan R^2 endi $R^2_{tuz} = 0{,}25854$. Endi biz yangi modellarga moslashamiz, bunda qolgan bashoratlovchilardan har birini `berilgan vaqti` ga qo‘shib chiqarib tashlashni ko‘rib chiqamiz:

`berilgan vaqti` va shu tariqa ham chiqarib tashlang

`daromad tasdig‘i`	`qarzdorlik darajasi`	`kredit ulushi`
$R^2_{tuz} = 0{,}22395$	$R^2_{tuz} = 0{,}25479$	$R^2_{tuz} = 0{,}19074$
`bankrotlik`	`muddati`	`credit_checks`
$R^2_{tuz} = 0{,}25798$	$R^2_{tuz} = 0{,}14592$	$R^2_{tuz} = 0{,}24701$

Ushbu modellarning hech biri tuzatilgan R^2 ni yaxshilamaydi, shuning uchun qolgan bashoratlovchilarning birortasini o‘chirmaymiz. Ya’ni, orqa tomondan yo‘qotishdan so‘ng, bizda faqat `berilgan vaqti` chiqarilgan, qolgan barcha bashoratlovchilarni saqlagan model qoladi. Uni 9.7-rasmdan olingan koeffitsiyentlardan foydalanib quyidagicha jamlaymiz:

$$\begin{aligned}\widehat{foiz\ stavkasi} = {} & 1{,}921 + 0{,}974 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} \\ & + 2{,}535 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}} + 0{,}021 \times \texttt{qarzdorlik darajasi} \\ & + 4{,}896 \times \texttt{kredit ulushi} + 0{,}387 \times \texttt{bankrotlik} + 0{,}154 \times \texttt{muddati} \\ & + 0{,}228 \times \texttt{kredit tekshiruvi}\end{aligned}$$

Oldinga tanlash strategiyasi orqaga tomon yo‘qotish texnikasining teskari shaklidir. Bunda o‘zgaruvchilar birma-bir qo‘shilib boriladi, toki tuzatilgan R^2 ni yaxshilaydigan o‘zgaruvchini topa olmagunimizcha.

Ⓜ **9.19-MISOL**

`loans` ma’lumotlar to‘plami uchun oldinga tanlash strategiyasidan foydalanib modelni yarating.

Biz hech qanday o‘zgaruvchi kiritilmagan modeldan boshlaymiz. So‘ng, faqat bitta o‘zgaruvchi kiritilgan har bir mumkin bo‘lgan modelni moslaymiz. Ya’ni, faqat `daromad tasdig‘i` ni o‘z ichiga olgan modelni, so‘ng faqat `qarzdorlik darajasi` ni o‘z ichiga olgan modelni, keyin faqat `kredit ulushi` ni o‘z ichiga olgan modelni va hokazolarni. So‘ngra har bir modelning tuzatilgan R^2 ni tekshiramiz:

Qo‘shing ...

`daromad tasdig‘i`	`qarzdorlik darajasi`	`kredit ulushi`	`bankrotlik`
$R^2_{tuz} = 0{,}05926$	$R^2_{tuz} = 0{,}01946$	$R^2_{tuz} = 0{,}06452$	$R^2_{tuz} = 0{,}00222$
`muddati`	`berilgan vaqti`	`kredit tekshiruvi`	
$R^2_{tuz} = 0{,}12855$	$R^2_{tuz} = 0{,}000\,18$	$R^2_{tuz} = 0{,}01711$	

Ushbu birinchi bosqichda, biz tuzatilgan R^2 ni hech qanday bashoratlovchi bo‘lmagan model bilan solishtiramiz. Bashoratlovchisiz model har doim $R^2_{tuz} = 0$ ga ega. Tuzatilgan R^2 eng yuqori

bo‘lgan model `muddati` bashoratlovchini o‘z ichiga oladi va bu tuzatilgan R^2 bashoratlovchisiz modeldan ($R^2_{tuz} = 0$) kattaroq bo‘lganligi sababli, biz ushbu o‘zgaruvchini modelga qo‘shamiz.

Jarayonni takrorlaymiz, bu safar `muddati` bashoratlovchisini o‘z ichiga olgan 2-bashoratlovchili modellarni ko‘rib chiqamiz va yangi boshlang‘ich qiymat $R^2_{tuz} = 0{,}128\,55$ ni belgilaymiz:

Qo‘shing `muddati` va ...

`daromad tasdig‘i`	`qarzdorlik darajasi`	`kredit ulushi`
$R^2_{tuz} = 0{,}16851$	$R^2_{tuz} = 0{,}14368$	$R^2_{tuz} = 0{,}20046$
`bankrotlik`	`berilgan vaqti`	`kredit tekshiruvi`
$R^2_{tuz} = 0{,}13070$	$R^2_{tuz} = 0{,}12840$	$R^2_{tuz} = 0{,}14294$

Eng yaxshi ikkinchi bashoratlovchi `kredit ulushi` bo‘lib, uning tuzatilgan R^2 qiymati 0,20046 boshlang‘ich qiymat 0,12855 dan yuqori. Shuning uchun biz `kredit ulushi` ni ham modelga qo‘shamiz.

O‘zgaruvchi qo‘shganimiz uchun, uchinchi o‘zgaruvchini qo‘shish foydali bo‘ladimi-yo‘qligini ko‘rib chiqamiz:

Qo‘shing `muddati`, `kredit ulushi` va ...

`daromad tasdig‘i`	`qarzdorlik darajasi`	
$R^2_{tuz} = 0{,}24183$	$R^2_{tuz} = 0{,}20810$	
`bankrotlik`	`berilgan vaqti`	`kredit tekshiruvi`
$R^2_{tuz} = 0{,}20169$	$R^2_{tuz} = 0{,}20031$	$R^2_{tuz} = 0{,}21629$

`daromad tasdig‘i` ni qo‘shgan model tuzatilgan R^2 ni 0,20046 dan 0,24183 gacha yaxshilagan. Shuning uchun biz `daromad tasdig‘i` ni modelga qo‘shamiz.

Shu tarzda davom etamiz, keyingi bosqichda `qarzdorlik darajasi` qo‘shiladi. So‘ng `kredit tekshiruvi`, va `bankrotlik`. Ushbu bosqichda biz yana `berilgan vaqti` o‘zgaruvchisiga duch kelamiz: ushbu o‘zgaruvchini qo‘shish $R^2_{tuz} = 0{,}258\,43$ ga olib keladi. Lekin barcha boshqa o‘zgaruvchilarni saqlab `berilgan vaqti` ni chiqarib tashlash $R^2_{tuz} = 0{,}258\,54$ ga olib keladi. Bu degani, biz `berilgan vaqti` ni qo‘shmaymiz. Ushbu misolda, biz orqaga tomon yo‘qotish strategiyasidan aniqlangan model bilan bir xil modelga keldik.

MODEL TANLASH STRATEGIYALARI

Orqaga tomon yo‘qotish eng ko‘p sonli bashoratlovchilarni o‘z ichiga olgan modeldan boshlanadi va har bir bosqichda bir o‘zgaruvchi chiqarib tashlanadi. Bunda barcha qolgan o‘zgaruvchilar model uchun muhim ekanligi tasdiqlanadi. Oldinga tanlash hech qanday bashoratlovchi kiritilmagan modeldan boshlanadi va muhimlik darajasiga qarab o‘zgaruvchilar qo‘shiladi. Shunda boshqa muhim o‘zgaruvchilar topilmaguncha jarayon davom etadi.

Orqaga tomon yo‘qotish va oldinga tanlash ba’zida turli yakuniy modellarni beradi. Agar ikkala texnika ham qo‘llanib, turli modellar hosil qilinsa, R^2_{tuz} ning qiymati yuqori bo‘lgan model tanlanadi.

9.2.3 p-qiymat yondashuvi, R^2_{tuz} ga muqobil alternativ

p-qiymatdan model tanlashda R^2_{tuz} o‘rniga foydalanish mumkin:

Orqaga tomon yo‘qotish va p-qiymat yondashuvi. Orqaga tomon yo‘qotishda biz eng katta p-qiymatga ega bo‘lgan bashoratlovchini aniqlaymiz. Agar p-qiymat ahamiyatlilik darajasidan yuqori bo‘lsa (odatda $\alpha = 0{,}05$), biz ushbu o‘zgaruvchini modeldan chiqarib tashlaymiz, modelni qayta moslaymiz va jarayonni takrorlaymiz. Agar eng katta p-qiymat $\alpha = 0{,}05$ dan

kichik bo‘lsa, boshqa bashoratlovchilarni chiqarib tashlamaymiz va qolgan model bizning eng mos modelimiz deb hisoblanadi.

Oldinga tanlash va p-qiymat yondashuvi. Oldinga tanlashda biz hech qanday bashoratlovchi bo‘lmagan modeldan boshlaymiz, keyin har bir mumkin bo‘lgan bashoratlovchini o‘z ichiga olgan modelni moslaymiz va eng kichik p-qiymatga ega bo‘lgan modelni aniqlaymiz. Agar ushbu p-qiymat $\alpha = 0{,}05$ dan kichik bo‘lsa, ushbu bashoratlovchini modelga qo‘shamiz va jarayonni takrorlaymiz, har safar bitta o‘zgaruvchini qo‘shib chiqamiz. Agar qolgan bashoratlovchilarning hech biri modelga qo‘shilganda p-qiymati 0.05 dan kichik bo‘lmasa, jarayonni to‘xtatamiz va hozirgi model eng mos model hisoblanadi.

Y

9.20-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

327-sahifadagi 9.7-rasmga e’tibor bering, undagi model kredit berilgan oy haqidagi o‘zgaruvchidan tashqari barcha o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga oladi. Agar biz p-qiymat yondashuvini orqaga tomon yo‘qotish bilan foydalangan holda qo‘llayotgan bo‘lsak, ushbu modeldagi qaysi o‘zgaruvchilarni chiqarib tashlash kerak? Bu o‘zgaruvchini modeldan chiqaramizmi yoki uni saqlab qolamizmi?[12]

R^2_{tuz} va p-qiymat yondashuvlari o‘xshash bo‘lsa ham, ular ba’zan turli modellarni olib keladi, bunda R^2_{tuz} yondashuvi yakuniy modelga ko‘proq bashoratlovchilarni qo‘shish tendensiyasiga ega.

TUZATILGAN R^2 VA P-QIYMAT YONDASHUVI

Agar asosiy maqsad bashorat aniqligini yaxshilash bo‘lsa, R^2_{tuz} dan foydalaning. Bu odatda mashinani o‘rganish (machine learning) dasturlarida qo‘llaniladi.

Agar qaysi o‘zgaruvchilar javobning statistik jihatdan muhim bashoratlovchilari ekanligini tushunish yoki oddiyroq model yaratish muhim bo‘lsa (bunda bashorat aniqligi biroz pasayishi mumkin), unda p-qiymat yondashuvi afzalroq bo‘ladi.

R^2_{tuz}, p-qiymat yondashuvi, orqaga tomon yo‘qotish yoki oldinga tanlashdan foydalanishingizdan qat’i nazar, model tanlashdan so‘ng biz hali ham modelning shartlari mantiqiy ekanligini tasdiqlashimiz kerak.

Mashqlar

9.7 Chaqaloq vazni, 4-qism. 9.3-mashq yangi tug‘ilgan chaqaloqning vaznini bir qancha bashoratlovchilar (homiladorlik davomiyligi, tug‘ilish tartibi, onaning yoshi, onaning bo‘yi, onaning vazni, onaning chekish holati) yordamida bashorat qiluvchi modelni ko‘rib chiqadi. Quyidagi jadval to‘liq model uchun tuzatilgan R^2 qiymatini shuningdek, orqaga tomon yo‘qotish jarayonining birinchi bosqichida baholangan barcha modellar uchun tuzatilgan R^2 qiymatlarini ko‘rsatadi.

	Model	Tuzatilgan R^2
1	To‘liq model	0,2541
2	Homiladorlik yo‘q	0,1031
3	Tartibi yo‘q	0,2492
4	Yosh yo‘q	0,2547
5	Bo‘y yo‘q	0,2311
6	Vazn yo‘q	0,2536
7	Chekish holati yo‘q	0,2072

Qaysi o‘zgaruvchi birinchi bo‘lib modeldan chiqarilishi kerak?

9.8 Maktabdan qolish, 2-qism. 9.4-mashq maktabdan qolgan kunlarni uchta bashoratlovchilar: etnik kelib chiqish, jins va o‘quv holati asosida bashorat qiluvchi modelni ko‘rib chiqadi. Quyidagi jadval model uchun tuzatilgan R^2 qiymatini va orqaga tomon yo‘qotish jarayonining birinchi bosqichida baholangan barcha modellar uchun tuzatilgan R^2 qiymatlarini ko‘rsatadi.

[12] `bankrotlik` bashoratlovchisi chiqarib tashlash uchun nomzod bo‘ladi, chunki uning p-qiymati eng katta. Ammo ushbu p-qiymat 0.05 dan kichik bo‘lganligi sababli, biz uni modelda saqlab qolamiz.

	Model	Tuzatilgan R^2
1	To‘liq model	0,0701
2	Etnik kelib chiqish yo‘q	-0,0033
3	Jins yo‘q	0,0676
4	O‘quv holati yo‘q	0,0723

Qaysi o‘zgaruvchi birinchi bo‘lib modeldan chiqarilishi kerak?

9.9 Chaqaloq vazni, 5-qism. 9.3-mashq chaqaloqning tug‘ilgan vaznini bashorat qilish uchun barcha tushuntiruvchi o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan to‘liq model uchun regressiya natijalarini beradi. Ushbu mashqda oldinga tanlash algoritmini ko‘rib chiqamiz va o‘zgaruvchilarni birin-ketin modelga qo‘shamiz. Quyidagi jadval faqat mos o‘zgaruvchini o‘z ichiga olgan har bir model uchun p-qiymat va tuzatilgan R^2 qiymatlarini ko‘rsatadi. Ushbu jadvalga asoslanib, qaysi o‘zgaruvchi birinchi bo‘lib modelga qo‘shilishi kerak?

o‘zgaruvchi	homiladorlik vaqti	tug‘ilish tartibi	yosh	bo‘y	vazn	chekish
p-qiymat	$2{,}2 \times 10^{-16}$	0,1052	0,2375	$2{,}97 \times 10^{-12}$	$8{,}2 \times 10^{-8}$	$2{,}2 \times 10^{-16}$
R^2_{tuz}	0,1657	0,0013	0,0003	0,0386	0,0229	0,0569

9.10 Maktabdan qolish, 3-qism. 9.4-mashq maktabdan qolgan kunlarni bashorat qilish uchun barcha tushuntiruvchi o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan to‘liq model uchun regressiya natijalarini beradi. Ushbu mashqda oldinga tanlash algoritmini ko‘rib chiqamiz va o‘zgaruvchilarni birin-ketin modelga qo‘shamiz. Quyidagi jadval faqat mos o‘zgaruvchini o‘z ichiga olgan har bir model uchun p-qiymat va tuzatilgan R^2 qiymatlarini ko‘rsatadi. Ushbu jadvalga asoslanib, qaysi o‘zgaruvchi birinchi bo‘lib modelga qo‘shilishi kerak?

o‘zgaruvchi	etnik kelib chiqish	jins	o‘quv holati
p-qiymat	0,0007	0,3142	0,5870
R^2_{tuz}	0,0714	0,0001	0

9.11 Kinofilmlar, 1-qism. Tasavvur qiling, bir ijtimoiy olim tomoshabinlar kinofilmlarni sevishlari yoki yoqtirmasliklarini nima belgilashini o‘rganishni xohlaydi. U tasodifiy tanlangan kinofilmlar (janr, davomiyligi, aktyorlar tarkibi, rejissyor, byudjet va hokazolar) va kinofilmlar muvaffaqiyatini o‘lchovchi indikator (kinofilmlar sharhlarini yig‘adigan veb-saytidagi ballar) bo‘yicha ma’lumot yig‘adi. Agar uning tadqiqoti kinofilmlar muvaffaqiyatining asosiy bashoratlovchilarini topishga qaratilgan bo‘lsa, qanday modelni tanlash usulidan foydalanishi kerak?

9.12 Kinofilmlar, 2-qism. Tasavvur qiling, bir onlayn media oqim kompaniyasi kinofilmlarni tavsiya qilish tizimini yaratishni istaydi. Veb-sayt o‘z ma’lumotlar bazasidagi kinofilmlar bo‘yicha ma’lumotlarni (janr, davomiyligi, aktyorlar tarkibi, rejissyor, byudjet va hokazo) saqlaydi va qo‘shimcha ravishda o‘z obunachilaridan (demografik ma’lumotlar, avval tomosha qilingan kinofilmlar, ular tomosha qilgan kinofilmlarni baholashlari va hokazo) ma’lumot yig‘adi. Tavsiya tizimi obunachilar tavsiya qilingan kinofilmlarni haqiqatda tomosha qilishlari va yuqori baholashlari bilan muvaffaqiyatli deb baholanadi. Kompaniya o‘z tavsiya tizimida o‘zgaruvchilarni tanlash uchun tuzatilgan R^2 yoki p-qiymat yondashuvini ishlatishi kerakmi?

9.3 Grafiklar yordamida model shartlarini tekshirish

Ko‘p o‘zgaruvchili regressiya usullari quyidagi modeldan foydalanadi:

$$\hat{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k$$

umuman olganda, quyidagi to‘rtta shartlarga asoslanadi:

1. modelning qoldiqlari deyarli normal bo‘ladi (kattaroq ma’lumot to‘plamlari uchun bu kamroq ahamiyatga ega),
2. qoldiqlarning o‘zgaruvchanligi deyarli barqaror,
3. qoldiqlar bog‘liqsiz va
4. har bir o‘zgaruvchi natija bilan chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

9.3.1 Diagnostik grafiklar

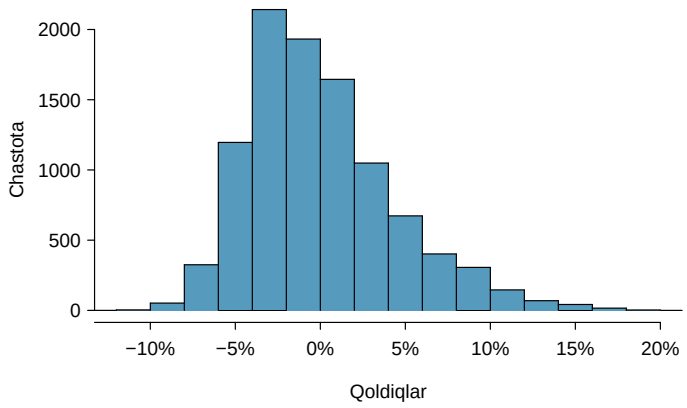
Diagnostik grafiklar yordamida yuqoridagi shartlarning har birini tekshirish mumkin. Biz “Lending Club” qarzlari ma’lumotlari modelini ko‘rib chiqamiz va qandaydir muhim xavotirlar mavjudligini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}\widehat{foiz\ stavkasi} = \ & 1{,}921 + 0{,}974 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} \\ & + 2{,}535 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}} + 0{,}021 \times \texttt{qarzdorlik darajasi} \\ & + 4{,}896 \times \texttt{kredit ulushi} + 0{,}387 \times \texttt{bankrotlik} + 0{,}154 \times \texttt{muddati} \\ & + 0{,}228 \times \texttt{kredit tekshiruvi}.\end{aligned}$$

Chetlashgan nuqtalarni tekshirish. Nazariy jihatdan, qoldiqlarning taqsimoti deyarli normal bo‘lishi kerak. Amaliyotda esa normalik ko‘pgina ilovalar uchun yumshatilishi mumkin. Buning o‘rniga, qoldiqlarning gistogrammasini tekshiramiz va chetlashgan nuqtalar mavjudligini aniqlaymiz. 9.8-rasm ushbu chetlashgan nuqtalarning gistogrammasidir. Bu juda katta ma’lumotlar to‘plami bo‘lganligi sababli, faqat juda ekstremal kuzatuvlar ushbu holda xavotirga sabab bo‘lishi mumkin. Bizning holatda hech qanday ekstremal kuzatuvlar xavotirga sabab bo‘lmaydi.

Agar biz kelajakdagi kuzatuvlar uchun **bashorat intervallarini** qurishni mo‘ljallagan bo‘lsak, qoldiqlarning deyarli normal bo‘lishini talab qilamiz. Bashorat intervallari haqida qo‘shimcha ma’lumot OpenIntro veb-saytida onlayn qo‘shimcha sifatida muhokama qilingan:

www.openintro.org/d?id=stat_extra_linear_regression_supp

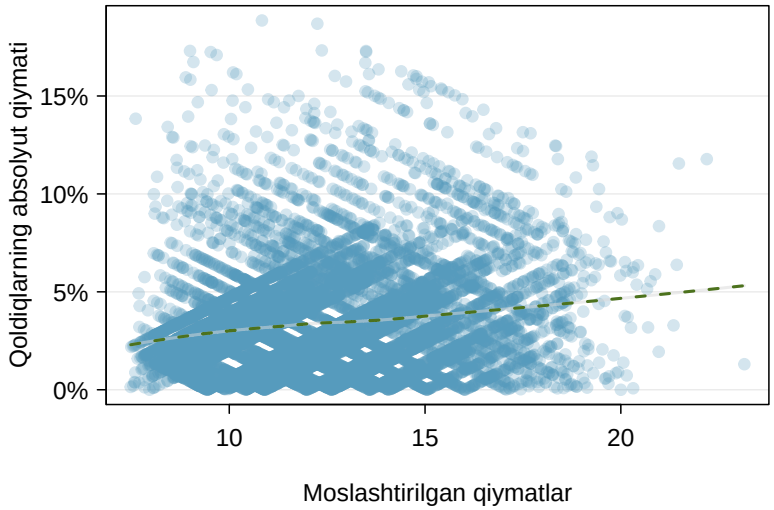


9.8-rasm. Qoldiqlarning gistogrammasi.

Qoldiqlarning absolyut qiymatlari va mos qiymatlari. Qoldiqlarning absolyut qiymatlari va ularga mos qiymatlar ($\hat{y}_i$) o‘rtasidagi bog‘liqlikni ko‘rsatadigan grafik 9.9-rasmda keltirilgan. Ushbu grafik qoldiqlarning dispersiyasi taxminan doimiy bo‘lishi kerakligini tekshirishda yordam beradi. Ushbu grafikga silliqlashtirilgan chiziq qo‘shilgan bo‘lib, bu grafikning taxminiy tendensiyani ifodalaydi. Kattaroq mos qiymatlar uchun dispersiyada sezilarli farq mavjud bo‘lib, biz bu mavzuni keyinroq muhokama qilamiz.

Qoldiqlarning ma’lumot yig‘ilishiga ko‘ra tartibi. Ushbu turdagi grafik kuzatuvlar ketma-ketlikda yig‘ilgan hollarda foydali bo‘lishi mumkin. Bunday grafik yaqin joylashgan holatlar o‘rtasidagi bog‘liqlikni aniqlashda yordam beradi. Ushbu ma’lumotlar to‘plamidagi qarzlar 3 oylik davrda chiqarilgan va qarz chiqarilgan oy muhim emasligi aniqlangan. Bu ushbu ma’lumotlar to‘plami uchun xavotirga sabab emasligini ko‘rsatadi. Agar ma’lumotlar to‘plamida bu shart uchun biron bir tendensiya ko‘rsatilsa, bu holatda **vaqtli qatorlar** usullari foydali bo‘lishi mumkin.

Qoldiqlarni har bir bashoratlovchi o‘zgaruvchi bo‘yicha taqsimoti. 9.10-rasmda qoldiqlarning har bir bashoratlovchi o‘zgaruvchisi bo‘yicha taqsimoti grafiklari keltirilgan. 2-3 ta guruh



9.9-rasm. Qoldiqlarning absolyut qiymatlarini mos qiymatlar ($\hat{y}_i$) bilan solishtirish doimiy dispersiya bahosi bo‘yicha og‘ishlarni aniqlashga yordam beradi.

bo‘lgan hollarda, qutili diagrammalar ko‘rsatilgan. Raqamli natijalar uchun ma’lumotlarga silliqlashtirilgan chiziq moslashtirilgan bo‘lib, ko‘rib chiqishni osonlashtiradi. Nihoyat, biz guruhlar o‘rtasidagi o‘zgaruvchanlikda sezilarli o‘zgarish yoki ma’lumotlarda biron bir tendensiya mavjudligini aniqlaymiz.

Ushbu grafiklarda quyidagi jihatlar muhim:

- Tasdiqlangan daromad guruhlari orasidagi o‘zgaruvchanlikda kichik farqlar mavjud.
- Qarzdorlik darajasi o‘zgaruvchisi uchun juda aniq tendensiya mavjud. Bundan tashqari, ushbu o‘zgaruvchi juda kuchli o‘ngga og‘uvchi ekanligi seziladi. Ya’ni qarzdorlik darajasi juda yuqori bo‘lgan kuzatuvlar kam.
- Kreditdan foydalanish va kredit tekshiruvi grafiklarining o‘ng tomonida pastga qaragan egri chiziq katta qiymatlar uchun bir oz noto‘g‘ri moslashtirishni ko‘rsatadi.

Diagnostik grafiklarni ko‘rib chiqqandan so‘ng, ikkita variant mavjud. Birinchi variant - agar kuzatilgan masalalar bizni tashvishga solmasa, ushbu modelni yakuniy model sifatida qabul qilamiz. Agar ushbu yo‘nalishni tanlasak, diagnostika natijalaridagi har qanday g‘ayrioddiyliklarni qayd etish muhimdir. Ikkinchi variant - modelni yaxshilashga urinish, bu aynan ushbu modelga nisbatan qilmoqchi bo‘lgan harakatimizdir.

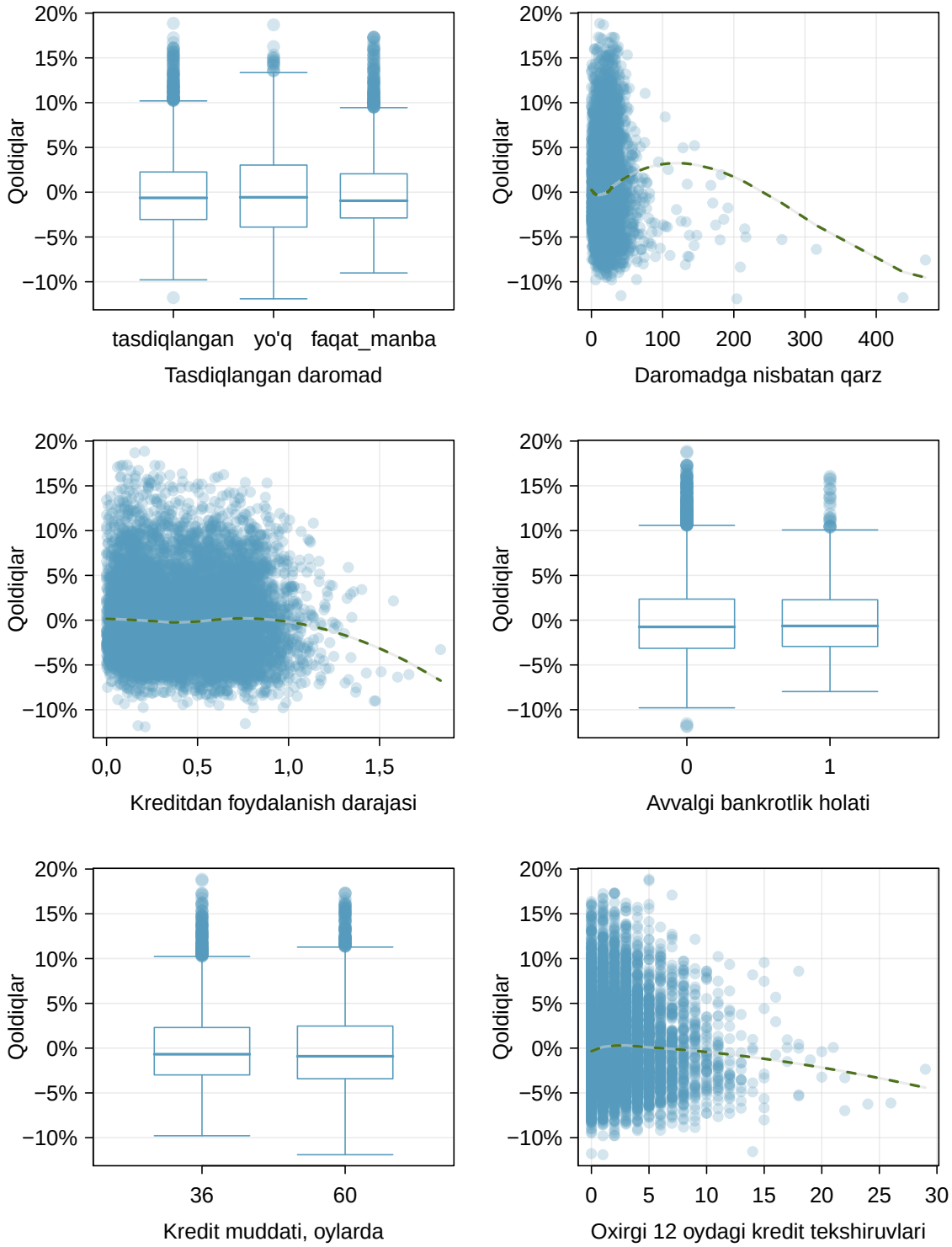
9.3.2 Modelni moslashtirishni yaxshilash uchun variantlar

Modelni yaxshilash uchun bir nechta variantlar mavjud. Masalan, o‘zgaruvchilarni transformatsiya qilish, model bo‘shliqlarini to‘ldirish uchun qo‘shimcha o‘zgaruvchilarni izlash yoki bashoratlovchi o‘zgaruvchilar va natija o‘rtasidagi chiziqsiz bog‘liqlik yoki noto‘g‘ri o‘zgaruvchanlikni hisobga oladigan murakkabroq usullarni qo‘llash.

Dastlabki model uchun asosiy muammo shundaki, qarzdorlik darajasi o‘zgaruvchisi va natija o‘rtasidagi aniq chiziqsiz bog‘liqlik mavjudligi 9.10-rasmda kuzatilgan. Ushbu muammoni hal qilish uchun, bashoratlovchi o‘zgaruvchi va natija o‘rtasidagi bog‘liqlikni sozlash uchun bir nechta strategiyalarni ko‘rib chiqamiz.

Keling, avval `qarzdorlik darajasi` uchun gistogrammani 9.11-rasmda ko‘rib chiqamiz. Ushbu o‘zgaruvchi juda og‘uvchi taqsimotga ega va yuqori qiymatlar moslashtirishga kuchli ta’sir ko‘rsatadi. Quyida bir nechta variantlar keltirilgan:

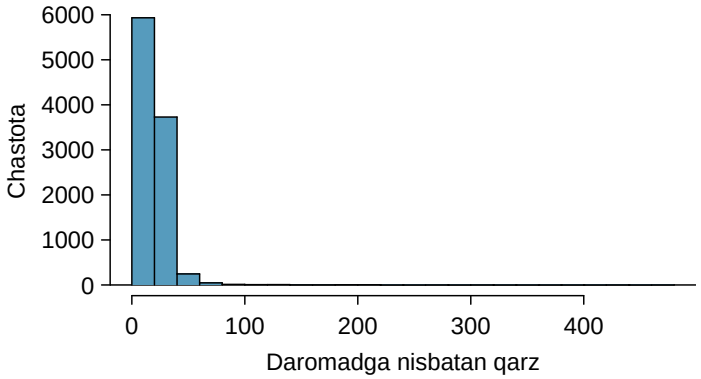
- log transformatsiyasi ($\log x$),
- kvadrat ildiz transformatsiyasi ($\sqrt{x}$),



9.10-rasm. Har bir bashoratlovchi o‘zgaruvchisi uchun qoldiqlarning diagnostik grafiklari. Qutili diagrammalar uchun biz o‘zgaruvchanlikda sezilarli farqlarni izlaymiz. Raqamli o‘zgaruvchilar uchun biz ma’lumotlarda tendensiyalar yoki boshqa tuzilmalarni tekshiramiz.

- teskari transformatsiya $(1/x)$,
- chegaralash (maksimal mumkin bo‘lgan qiymatni belgilash)

Agar ma’lumotlarni batafsilroq tekshirsak, ba’zi hollarda o‘zgaruvchining qiymati 0 ga teng bo‘lganligini kuzatamiz, va $\log(x)$ va $1/x$ transformatsiyalari $x = 0$ bo‘lganda aniqlanmagan. Shuning uchun ushbu transformatsiyalarni keyinroq ko‘rib chiqamiz.[13] Kvadrat ildiz transformatsiyasi ushbu o‘zgaruvchi qabul qiladigan barcha qiymatlar uchun amal qiladi. Katta kuzatuvlarning bir qismini chegaralash ham yaroqli yondashuvdir. Biz ushbu ikkala yondashuvni ko‘rib chiqamiz.



9.11-rasm. `qarzdorlik darajasi` uchun gistogramma, unda o‘ta og‘uvchanlik seziladi.

O‘zgaruvchini transformatsiya qilishni sinab ko‘rish uchun transformatsiya qilingan versiyalarni ifodalovchi ikkita yangi o‘zgaruvchi yaratiladi:

Kvadrat ildiz. Yangi o‘zgaruvchi, `sqrt_qarzdorlik darajasi`, yaratiladi, bunda barcha qiymatlar `qarzdorlik darajasi` qiymatlarining kvadrat ildizlari sifatida hisoblanadi va model avvalgidek qayta moslashtiriladi. Natijalar 9.12-rasmning chap panelida keltirilgan. Kvadrat ildiz yuqori qiymatlarni biroz kamaytiradi, lekin moslashtirish hali ham yaxshi ko‘rinmaydi, chunki silliqlashtirilgan chiziq hali ham egri.

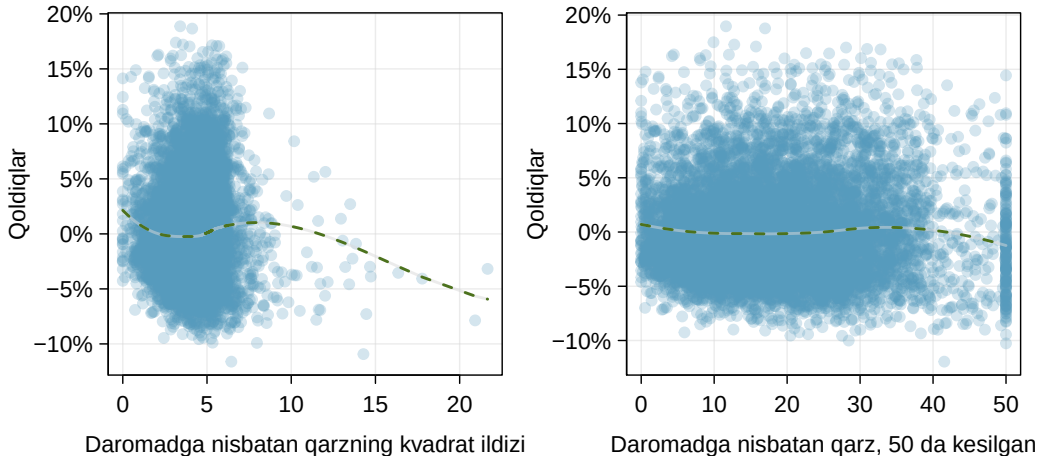
50 da chegaralash. Yangi o‘zgaruvchi, `qarzdorlik darajasi_50`, yaratiladi. Bunda `qarzdorlik darajasi` dagi har qanday qiymatlar 50 dan katta bo‘lsa, aniq 50 ga qisqartiriladi. Model yana bir bor qayta moslashtiriladi va ushbu yangi o‘zgaruvchi uchun diagnostik grafik 9.12-rasmning o‘ng panelida keltirilgan. Bu yerda moslash juda oqilonadek ko‘rinadi, shuning uchun bu maqul yondashuv sifatida ko‘rib chiqiladi.

Transformatsiyalardan foydalanishning kamchiligi natijalarni tushunishni biroz murakkablashtiradi. Yaxshiyamki, chegaralash transformatsiyasi nisbatan oz sonli holatga ta’sir qilgani uchun, talqin qilishga jiddiy ta’sir o‘tkazmaydi.

Keyingi qadam sifatida, `qarzdorlik darajasi` ning chegaralangan versiyasidan foydalangan holda yangi modelni baholaymiz va oldingi barcha protseduralarni takrorlaymiz. 9.3.1-bo‘limda diagnostika davomida ko‘rib chiqilgan boshqa ikkita masala yangilangan modelda ham mavjud. Agar modelni o‘rganishni xohlasak, ushbu kamchiliklarni ham muhokama qilishimiz va ishimizda shaffof bo‘lishimiz kerak. Model nima uchun ishlatilishi kerakligiga qarab, ushbu masalalarni hal qilishga urinib ko‘rishimiz yoki ular jiddiy bo‘lmagani uchun to‘xtashimiz mumkin. Agar o‘zgaruvchan dispersiya biroz ko‘proq yomonroq bo‘lganida, bu ustuvorlikka aylangan bo‘lardi. Oxir-oqibat, model oqilona deb qaror qildik va uning yakuniy shaklini bu yerda keltiramiz:

$$\begin{aligned} \widehat{foiz\ stavkasi} = {} & 1{,}562 + 1{,}002 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{faqat manba}} \\ & + 2{,}436 \times \texttt{daromad tasdig‘i}_{\texttt{tasdiqlangan}} + 0{,}048 \times \texttt{qarzdorlik darajasi_50} \\ & + 4{,}694 \times \texttt{kredit ulushi} + 0{,}394 \times \texttt{bankrotlik} + 0{,}153 \times \texttt{muddati} \\ & + 0{,}223 \times \texttt{kredit tekshiruvi}. \end{aligned}$$

[13] Bu usullarni ishlashini ta’minlashning yo‘llari mavjud, ammo bu imkoniyatlarni keyingi kursga qoldiramiz.



9.12-rasm. `qarzdorlik darajasi` ning transformatsiya qilingan versiyalari uchun qoldiq grafiklari.

Kuchli kuzatuvchi shuni sezadiki, `qarzdorlik darajasi_50` o‘zgaruvchisi uchun koeffitsiyent avvalgi modeldagi `qarzdorlik darajasi` o‘zgaruvchisi uchun koeffitsiyentdan ikki baravar kattaroq. Bu yuqori qiymatlar nafaqat kuchli ta’sirga ega nuqtalar, balki koeffitsiyentga sezilarli ta’sir ko‘rsatadigan ta’sirchan nuqtalar ekanligini ko‘rsatadi.

“HAMMA MODELLARDA XATOLIK BOR, LEKIN BA’ZILARI FOYDALI” -JORJ E.P. BOX

Haqiqat shundaki, hech qaysi model mukammal emas. Ammo, mukammal bo‘lmagan modellar ham foydali bo‘lishi mumkin. Bunday holda kamchiliklari bor model haqida hisobot berish, buni ochiq-oydin bayon qilish va modelning zaif tomonlarini ko‘rsatib o‘tish maqsadga muvofiq bo‘ladi.

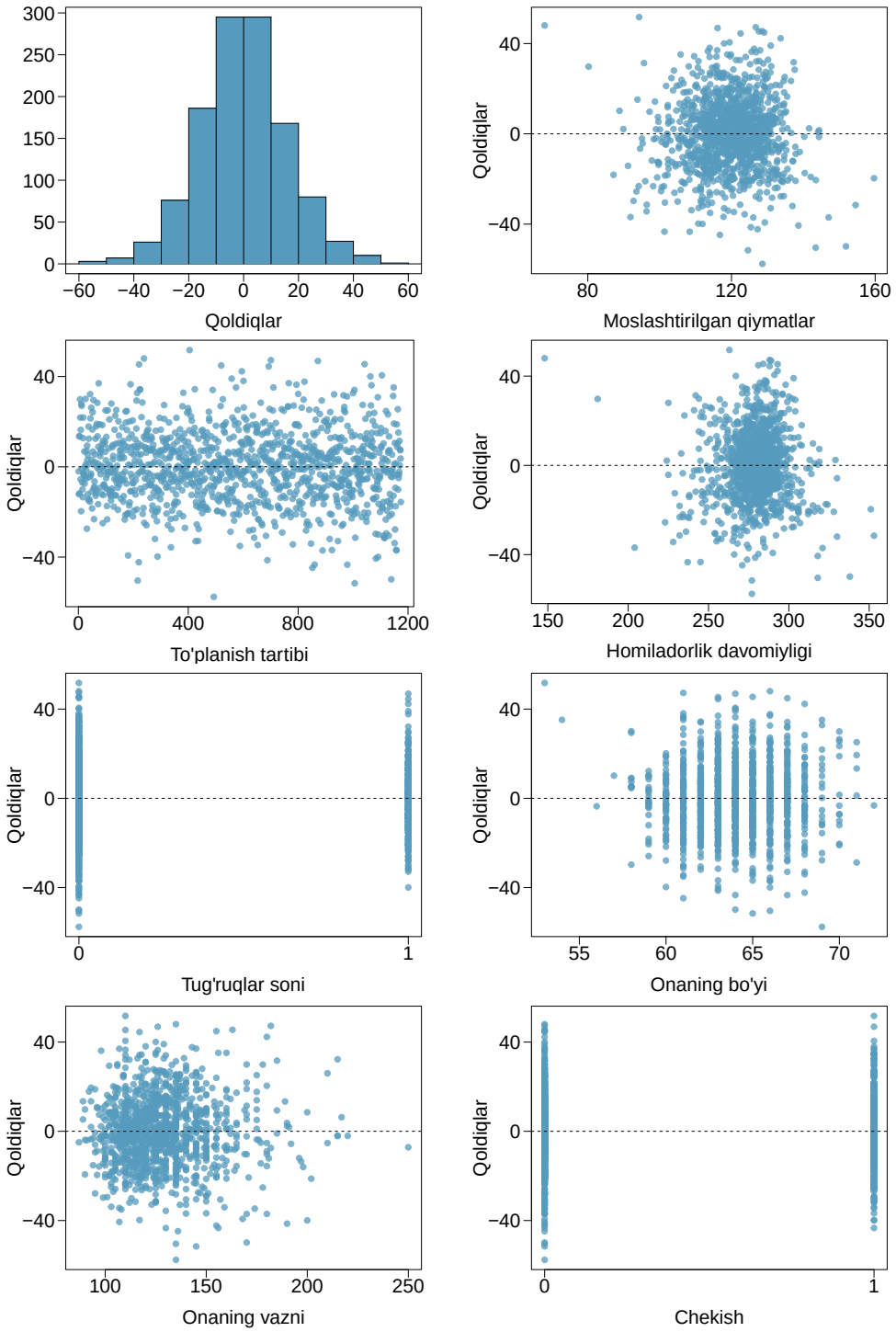
Statistik shartlar qo‘pol ravishda buzilganda, tahlil natijalari haqida hisobot bermang. Model shartlarida biroz og‘ishlarga yo‘l qo‘yilishi mumkin bo‘lsa-da, me’yordan juda uzoqlashib ketmang. Agar model shartlari ochiq-oydin buzilgan bo‘lsa, hatto bu ko‘proq statistik usullarni o‘rganish yoki yordam bera oladigan mutaxassisni yollashni anglatsa ham, yangi modeldan foydalanishni ko‘rib chiqing. Sizga ishni boshlashda ko‘maklashish uchun OpenIntro veb-saytida topishingiz mumkin bo‘lgan bir nechta qo‘shimcha bo‘limlar ishlab chiqilgan. Ushbu bo‘limlar **o‘zaro ta’sir hadlari** deb ataladigan tushunchalar va ma’lumotlarga **egri chiziq**larni moslashtirish bilan qisqacha tanishtiradi:

www.openintro.org/d?file=stat_extra_interaction_effects

www.openintro.org/d?file=stat_extra_nonlinear_relationships

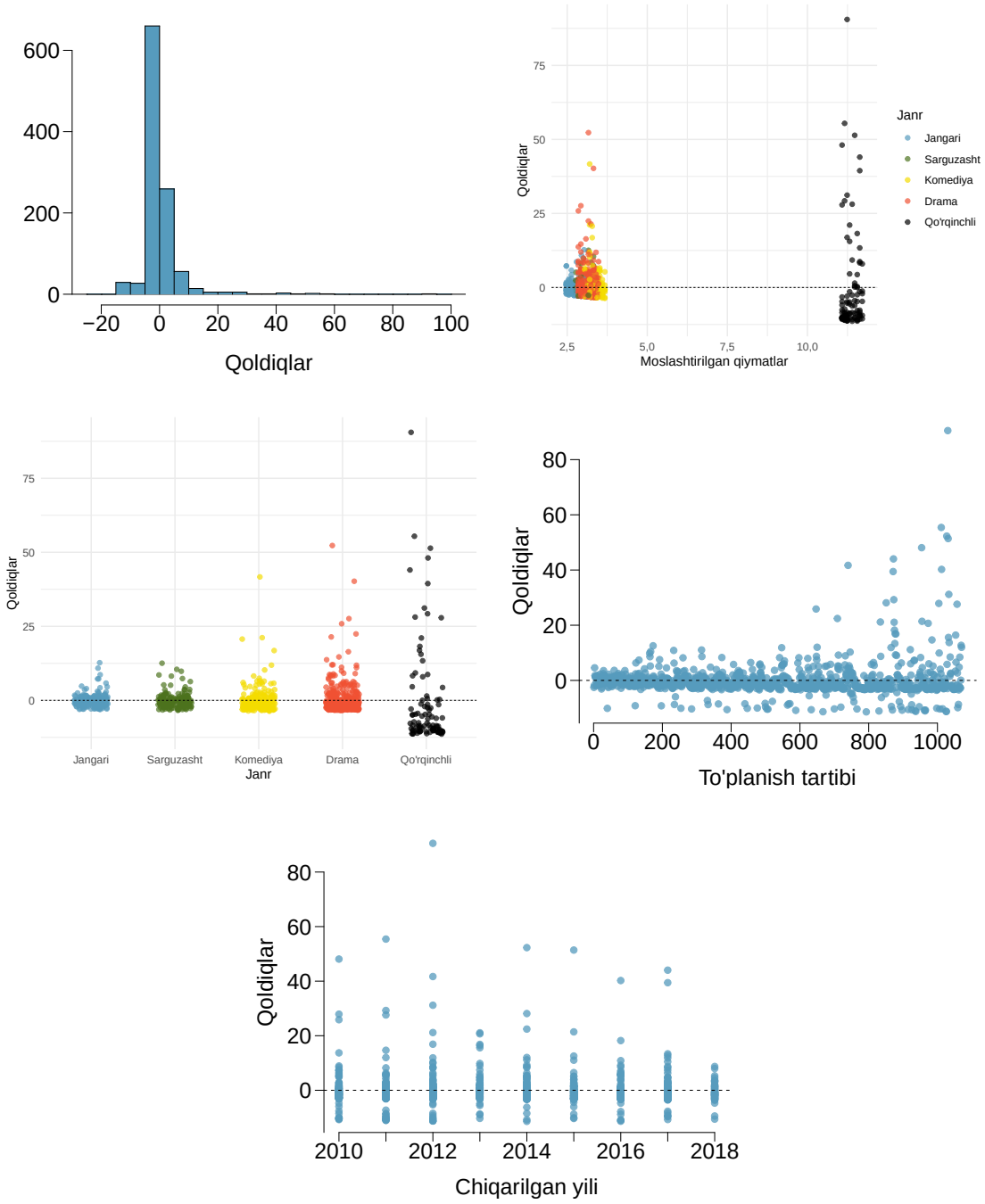
Mashqlar

9.13 Chaqqaloqlar vazni, 4-qism. 9.3-mashq regressiya modelini taqdim etadi, bu model chaqaloqlar tug‘ilgan paytdagi o‘rtacha vaznini onaning homiladorlik davomiyligi, tartibi, bo‘yi, og‘irligi va chekish holatiga asoslanib bashorat qilish uchun ishlatiladi. Quyidagi grafiklardan foydalanib, modelning taxminlari bajarilganmi yoki yo‘qligini aniqlang. Agar bajarilmagan bo‘lsa, tahlil bilan qanday davom etishni tasvirlang.



9.14 Kinofilm foydasi, 1-qism. FiveThirtyEight.com bir maqolasida shunday yozadi: “Qo‘rqinchli filmlar katta yozgi blokbasterlar yoki sarguzasht/harakat filmlari kabi kassada katta daromad keltirmaydi ... lekin studiyalarni ularni chiqarishni davom ettirishga undaydigan ulkan rag‘bat mavjud. Qo‘rqinchli filmlar uchun investitsiya qaytarilishining salohiyati nihoyatda katta.” Jangrlar o‘rtasida investitsiya qaytarilishi qanday solishtiriladi va ushbu munosabat vaqt davomida qanday o‘zgarganligini o‘rganish uchun kirish statistikasi talabasining modeli 2000-2018 yillar oralig‘ida chiqarilgan 1070 ta film uchun janr va chiqarilgan yil asosida filmning yalpi daromadi nisbatini bashorat qildi. Quyidagi grafiklardan foydalanib, ushbu regressiya modeli berilgan ma’lumotlar uchun mos ekanligini aniqlang.[14]

[14] FiveThirtyEight, Scary Movies Are The Best Investment In Hollywood.



9.4 Ko‘p o‘lchovli regressiya bo‘yicha ish: Mario Kart

Nintendo Wii uchun *Mario Kart* video o‘yini bo‘yicha Ebay savdolari ko‘rib chiqiladi. Savdolarning qiziqish o‘zgaruvchisi bu savdoning umumiy narxi, ya’ni eng yuqori taklif va yetkazib berish narxining yig‘indisi. Savdoning umumiy narxi har bir xususiyat bilan qanday bog‘liq ekanligini aniqlashga harakat qilamiz, shu bilan birga boshqa o‘zgaruvchilarni nazorat qilib turamiz. Masalan, barcha boshqa xususiyatlar o‘zgarmas holatda, uzoqroq davom etuvchi savdolar yuqori yoki pastroq narxlar bilan bog‘liqmi? Shuningdek xaridorlar, savdolarda qo‘shimcha Wii rulchalari (plastik rulchalar, ular Wii boshqaruvchiga ulanadi) uchun o‘rtacha qancha ko‘proq to‘lashga moyil? Ko‘p o‘zgaruvchili regressiya ushbu va boshqa savollarga javob berishda yordam beradi.

9.4.1 Ma’lumotlar to‘plami va to‘liq model

`mariokart` ma’lumotlar to‘plami 141 ta savdoning natijalarini o‘z ichiga oladi. Ushbu ma’lumotlar to‘plamidan to‘rtta kuzatuv 9.13-rasmda ko‘rsatilgan va har bir o‘zgaruvchi uchun tavsiflar 9.14-rasmda berilgan. Diqqat qiling, `holati` (`holati`) va `stok_fotosurat` (`stok_fotosurat`) o‘zgaruvchilari indikator o‘zgaruvchilar bo‘lib, `loan` ma’lumotlar to‘plamidagi `bankrotlik` o‘zgaruvchisiga o‘xshaydi.

	narx	holati	stok_fotosurat	davomiyligi	rullar
1	51,55	1	1	3	1
2	37,04	0	1	7	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
140	38,76	0	0	7	0
141	54,51	1	1	1	2

9.13-rasm. `mariokart` ma’lumotlar to‘plamidan to‘rtta kuzatuv.

o‘zgaruvchi	**tavsif**
`narx`	Yakuniy savdo narxi va etkazib berish narxi, AQSh dollarida (`narxi`).
`holati`	Agar savdoga qo‘yilgan o‘yin yangi bo‘lsa (`1`), ishlatilgan bo‘lsa (`0`) indikator o‘zgaruvchi (`holati`).
`stok_fotosurat`	Agar savdoning asosiy surati stock photo bo‘lsa indikator o‘zgaruvchi (`stok_fotosurat`)
`davomiyligi`	Savdoning davomiyligi, kunlarda, 1 dan 10 gacha qiymatlar oladi (`davomiyligi`)
`rullar`	Savdoda Wii rulchalari soni. *Wii wheel* - bu Wii boshqaruvchini ushlab turuvchi ixtiyoriy rulcha aksessuari (`rullar`).

9.14-rasm. `mariokart` ma’lumotlar to‘plamidagi o‘zgaruvchilar va ularning ta’riflari.

Y

9.21-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Biz savdo narxini bashorat qilish uchun o‘yin holati bashoratlovchi o‘zgaruvchisi sifatida ishlatilgan chiziqli regressiya modelini moslashtirdik. Ushbu model natijalari quyida keltirilgan:

	Baho	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	42,8711	0,8140	52,67	< 0,0001
holati	10,8996	1,2583	8,66	< 0,0001
				$ed = 139$

Model uchun tenglamani yozing, burchak koefitsiyenti nolga nisbatan statistik jihatdan farq qiladimi yoki yo‘qligini va koeffitsiyentning talqinini keltiring.[15]

Ba’zida bashorat o‘zgaruvchilari o‘rtasida asosiy tuzilmalar yoki bog‘liqliklar mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, Ebay’da sotilayotgan yangi o‘yinlar ko‘pincha ko‘proq Wii rulchalari bilan birga sotiladi, bu esa ushbu savdolar uchun narxning oshishiga olib kelishi mumkin edi. Bashorat o‘zgaruvchisi va natija o‘rtasidagi bog‘liqlikni boshqa o‘zgaruvchilarning potentsial ta’sirini nazorat qilib baholash uchun barcha muhim o‘zgaruvchilarni bir vaqtning o‘zida o‘z ichiga olgan modelni moslashtirishni xohlaymiz.

9.21-yo‘natirilgan mashqdagi kabi o‘yin holatini hisobga oluvchi modelni tuzish bilan birga,

[15] Chiziq tenglamasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\widehat{narx} = 42{,}87 + 10{,}90 \times holati.$$

9.21-yo‘natirilgan mashqdagi regressiya natijalarini ko‘rib chiqib, `holati` uchun p-qiymat nolga juda yaqin ekanligini ko‘rishimiz mumkin. Bu ushbu oddiy bir o‘zgaruvchili modelda koeffitsiyentning nolga nisbatan farq qilishi bo‘yicha kuchli dalil borligini anglatadi.

`holati` ikki darajali toifali o‘zgaruvchi bo‘lib, agar o‘yin yangi bo‘lsa qiymati 1, ishlatilgan bo‘lsa qiymati 0 bo‘ladi. Bu shuni anglatadiki, 10,90 model koeffitsiyenti yangi o‘yinlar ishlatilganlarga nisbatan $10,90 qo‘shimcha qiymatni bashorat qiladi.

yana uchta o‘zgaruvchini ham bir vaqtning o‘zida hisobga oluvchi modelni qurmoqchimiz:

$$\widehat{\texttt{narx}} = \beta_0 + \beta_1 \times \texttt{holati} + \beta_2 \times \texttt{stok_fotosurat} + \beta_3 \times \texttt{davomiylik} + \beta_4 \times \texttt{rullar}\ .$$

9.15-rasm to‘liq modelning natijalarini umumlashtiradi. Ushbu natijalar yordamida har bir koeffitsiyentning nuqtaviy baholarini aniqlaymiz.

	Baho	Standart xatolik	t qiymat	Pr(>|t|)
(Ozod had)	36,2110	1,5140	23,92	< 0,0001
holati	5,1306	1,0511	4,88	< 0,0001
stok_fotosurat	1,0803	1,0568	1,02	0,3085
davomiyligi	−0,0268	0,1904	−0,14	0,8882
rullar	7,2852	0,5547	13,13	< 0,0001
				$ed = 136$

9.15-rasm. `narx` natija va `holati`, `stok_fotosurat`, `davomiyligi` va `rullar` bashorat o‘zgaruvchilari bo‘lgan regressiya modelining natijalari.

9.22-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Modelning tenglamasini 9.15-rasmdagi nuqtaviy baholardan foydalangan holda yozing. Ushbu modelda nechta bashoratlovchi o‘zgaruvchi mavjud?[16]

9.23-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

O‘zgaruvchi x_4 (Wii rulchalari) uchun β_4 koeffitsiyenti nimani anglatadi? β_4 uchun nuqtaviy baho qanday?[17]

9.24-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

9.22-yo‘natirilgan mashqda aniqlangan tenglamadan foydalanib, 9.13-rasmdagi birinchi kuzatuvning qoldig‘ini hisoblang.[18]

9.25-MISOL

9.21bo‘limda `holati` uchun $b_1 = 10{,}90$ va oddiy chiziqli regressiyada standart xatolik $SX_{b_1} = 1{,}26$ deb baholandi. Nima uchun ushbu baholash va ko‘p o‘zgaruvchili regressiya sharoitidagi baholash o‘rtasida farq bo‘lishi mumkin?

Agar ma’lumotlarni diqqat bilan ko‘rib chiqsak, ba’zi bashoratlovchi o‘zgaruvchilar o‘rtasida kollinearlik mavjudligini ko‘rar edik. Masalan, natija `narx` va bashorat o‘zgaruvchi `holati` o‘rtasidagi bog‘liqlikni oddiy chiziqli regressiya yordamida baholaganimizda, savdoga qo‘shilgan Wii rulchalari soni kabi boshqa o‘zgaruvchilarni nazorat qila olmagan edik. Ushbu model `rullar` Konfaunding o‘zgaruvchisi tomonidan ta’sirlangan edi. Ikkala o‘zgaruvchini birga qo‘llaganimizda, ushbu asosiy va tasodifiy xatolik kamayadi yoki bartaraf etiladi (Garchi boshqa konfaunding o‘zgaruvchilardan kelib chiqadigan xatolik hali ham saqlanib qolishi mumkin).

9.4.2 Modelni tanlash

Keling, Mario Kart savdosi modeli bo‘yicha qayta ko‘rib chiqamiz va orqaga tanlash usulidan foydalanib model tanlashni yakunlaymiz. Eslatib o‘tamiz, to‘liq model quyidagi shaklga ega edi:

$$\widehat{narx} = 36{,}21 + 5{,}13 \times \texttt{holati} + 1{,}08 \times \texttt{stok_fotosurat} - 0{,}03 \times \texttt{davomiyligi} + 7{,}29 \times \texttt{rullar}\ .$$

[16] $\widehat{narx} = 36{,}21 + 5{,}13 \times \texttt{holati} + 1{,}08 \times \texttt{stok_fotosurat} - 0{,}03 \times \texttt{davomiyligi} + 7{,}29 \times \texttt{rullar}$, $k = 4$ ta bashoratlovchi o‘zgaruvchilar yordamida baho.

[17] Bu boshqa o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas holda saqlagan holatda savdo narxining har bir qo‘shimcha Wii rulchasi uchun o‘rtacha farqini bildiradi. Nuqtaviy baho $b_4 = 7{,}29$ ga teng.

[18] $e_i = y_i - \hat{y}_i = 51{,}55 - 49{,}62 = 1{,}93$, bu yerda 49,62 kuzatuvdagi o‘zgaruvchilar qiymatlaridan va 9.22-yo‘natirilgan mashqda aniqlangan tenglamadan foydalanib hisoblangan.

9.26-MISOL

`mariokart` ma’lumotlari bo‘yicha to‘liq modelga tegishli natijalar 340-betdagi 9.15-rasmda ko‘rsatilgan edi. Ushbu model uchun modeldagi har bir o‘zgaruvchini chiqarib tashlaganimizda nima bo‘lishini ko‘rib chiqamiz:

Quyidagilarni chiqarib tashlang ...

`holati`	`stok_fotosurat`	`davomiyligi`	`rullar`
$R^2_{tuz} = 0{,}6626$	$R^2_{tuz} = 0{,}7107$	$R^2_{tuz} = 0{,}7128$	$R^2_{tuz} = 0{,}3487$

To‘liq model uchun $R^2_{tuz} = 0{,}7108$. Orqaga tomon yo‘qotish strategiyasiga ko‘ra qanday harakat qilishimiz kerak?

Uchinchi model, ya’ni `davomiyligi` o‘zgaruvchisisiz, $R^2_{tuz} = 0{,}7128$ qiymati bilan eng yuqori R^2_{tuz} ga ega, shuning uchun uni to‘liq modelning R^2_{tuz} qiymati bilan solishtiramiz.
`davomiyligi` ni chiqarib tashlash modelni yuqori R^2_{tuz} ga olib kelganligi sababli, `davomiyligi` o‘zgaruvchisini modeldan chiqaramiz.

9.27-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

9.26-misolda `davomiyligi` o‘zgaruvchisi chiqarib tashlandi va natijada $R^2_{tuz} = 0{,}7128$ ga ega bo‘lgan model hosil bo‘ldi. Keling, orqaga tomon yo‘qotish usulidan foydalanib, yana biror o‘zgaruvchini modeldan chiqarib tashlashni ko‘rib chiqamiz:

`davomiyligi` chiqarib tashlang va ...	`holati`	`stok_fotosurat`	`rullar`
	$R^2_{tuz} = 0{,}6587$	$R^2_{tuz} = 0{,}7124$	$R^2_{tuz} = 0{,}3414$

Qo‘shimcha o‘zgaruvchini chiqarib tashlashimiz kerakmi, agar kerak bo‘lsa, qaysi o‘zgaruvchini chiqarishimiz kerak?[19]

9.28-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

Modeldan savdo davomiyligini chiqarib tashlaganimizdan so‘ng, quyidagi qisqartirilgan model qoldi:

$$\widehat{narx} = 36{,}05 + 5{,}18 \times \texttt{holati} + 1{,}12 \times \texttt{stok_fotosurat} + 7{,}30 \times \texttt{rullar} \ .$$

Mario Kart o‘yini uchun savdo narxini qanday bashorat qilasiz, agar u ishlatilgan, stok fotosurat ishlatilgan, ikkita rulcha o‘z ichiga olgan va Mario Kart ma’lumotlari yig‘ilgan davrda savdoga qo‘yilgan bo‘lsa?[20]

9.29-YO‘NALTIRILGAN MASHQ

9.28-yo‘natirilgan mashqda sotuvchi aynan bashorat qilingan narxni olmagan bo‘lsa, hayron bo‘larmidingiz?[21]

9.4.3 Grafiklardan foydalanib model sharoitlarini tekshirish

Biz aniqlagan modelimiz qanchalik asosli ekanligini tekshirish uchun, keling, MarioKart modeli diagnostikasini batafsilroq ko‘rib chiqamiz.

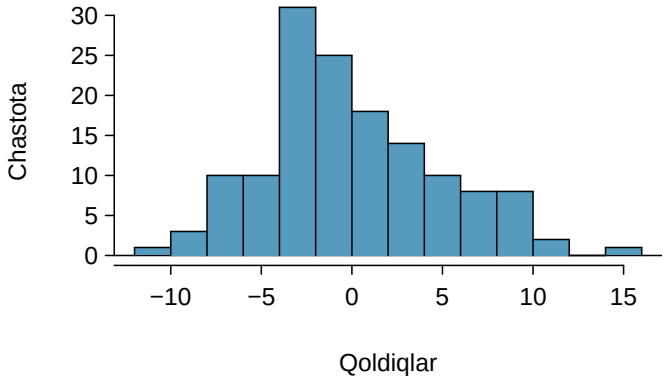
Chetlashgan nuqtalarni tekshirish. Qoldiqlarning gistogrammasi 9.16-rasmda ko‘rsatilgan. Ma’lumotlar to‘plami yuzdan oshganligi sababli, asosan asosiy chetlashgan nuqtalarni izlaymiz. Yuqori tomonda bir kichik chetlashgan nuqta mavjud, ammo bu katta ma’lumotlar to‘plami uchun tashvishga sabab emas.

Qoldiqlarning absolyut qiymatlari va mos qiymatlari. Qoldiqlarning absolyut qiymatlari va

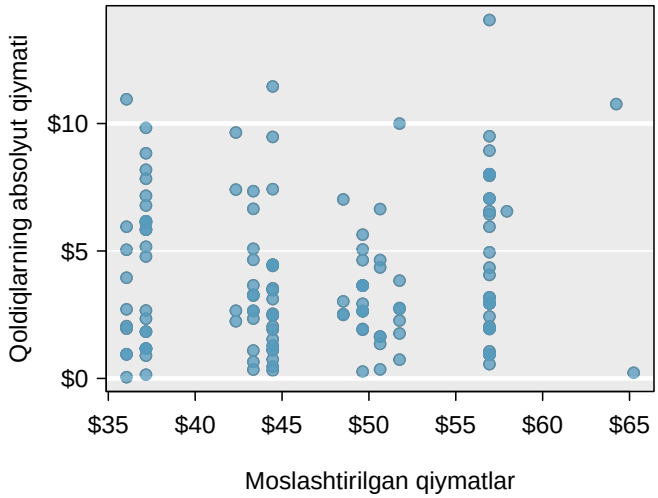
[19] Qolgan uchta o‘zgaruvchilarning birortasini chiqarib tashlash R^2_{tuz} ning kamayishiga olib keladi, shuning uchun `davomiyligi` ni chiqarib tashlaganimizdan so‘ng, modeldan boshqa o‘zgaruvchilarni chiqarib tashlash kerak emas.

[20] `holati` uchun `0`, `stok_fotosurat` uchun `1`, va `rullar` uchun `2` qiymatlarini tenglamaga qo‘shamiz, bu \$51,77 qiymatini qaytaradi, bu savdo uchun kutilgan umumiy narxdir.

[21] Yo‘q. Model bizga savdo uchun kutilayotgan *o‘rtacha* narxni beradi, va bir savdodan ikkinchi savdoga narx biroz farq qilishi davom etadi (ammo bu farq model ishlatilmaganda bo‘ladigan farqdan kichikroq bo‘ladi).



9.16-rasm. Qoldiqlarning gistogrammasi. Hech qanday aniq chetlashgan nuqtalar yo‘q.



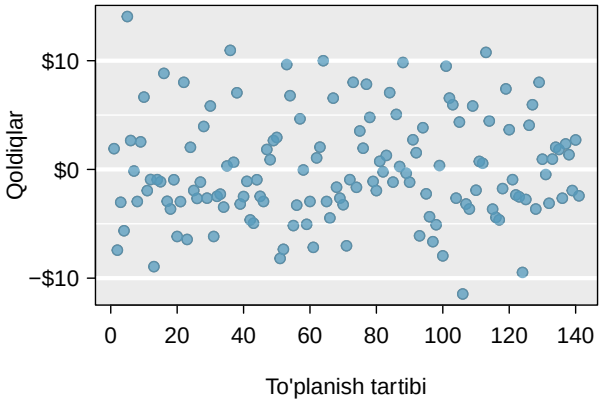
9.17-rasm. Qoldiqlarning absolyut qiymatlari va mos qiymatlari. Hech qanday aniq naqshlar yo‘q.

ularning mos qiymatlari ($\hat{y}_i$) o‘rtasidagi grafik 9.17-rasmda ko‘rsatilgan. Ushbu misolda doimiy dispersiyadan sezilarli og‘ishlar kuzatilmaydi.

Qoldiqlarning ma’lumot yig‘ishga ko‘ra tartibi. Savdolarning kuzatuvlari tartibiga ko‘ra qoldiqlar grafigi 9.18-rasmda ko‘rsatilgan. Bu yerda muammoni ko‘rsatuvchi tuzilma yo‘q.

Qoldiqlarni har bir bashoratlovchi o‘zgaruvchi bo‘yicha taqsimoti. Qoldiqlarning `holati` o‘zgaruvchisi, `stok_fotosurat` o‘zgaruvchisi va `rullar` o‘zgaruvchisi bo‘yicha grafiklari 9.19-rasmda ko‘rsatilgan. Ikki darajali `holati` o‘zgaruvchisi uchun sezilarli naqshlar ko‘rinmay va buning o‘rniga o‘zgaruvchanlikning guruhlar bo‘ylab o‘zgarib turmasligi aniqlaymiz. Ammo, `stok_fotosurat` o‘zgaruvchisiga qaraganda, ikkita guruhda qoldiqlarning o‘zgaruvchanligida biroz farq mavjud. Bundan tashqari, `rullar` o‘zgaruvchisiga qaraganda, qoldiqlarda bir oz tuzilma mavjud bo‘lishi mumkin. Qoldiqlarda egri chiziqli bog‘lanish mavjud bo‘lib, bu bog‘liqlik ehtimol chiziqli emasligini ko‘rsatadi.

Mario Kart savdosi uchun diagnostik xulosalar `loans` tahlilida bo‘lgani kabi, model natijalarini hisobot qilganimizda ham umumlashtiriladi. Ushbu savdo ma’lumotlari holatida, stock photo o‘zgaruvchisi uchun doimiy bo‘lmagan dispersiya mavjudligini va umumiy narx bilan savdoda kiritilgan rulchalar soni o‘rtasida chiziqsiz bog‘liqlik bo‘lishi mumkinligini hisobot qilamiz. Ushbu ma’lumot tahlilni ko‘rib chiqishi mumkin bo‘lgan xaridorlar va sotuvchilar uchun muhimdir va bu ma’lumotni chiqarib tashlash modeldan foyda olish imkoniyatiga ega bo‘lgan odamlarga zarar yetkazishi mumkin.



9.18-rasm. Qoldiqlar kuzatuvlarning yig‘ilish tartibida. Hech qanday aniq naqshlar yo‘q.

Eslatma: Ushbu bo‘lim uchun hech qanday mashqlar mavjud emas.

9.5 Logistik regressiyaga kirish

Ushbu bo‘limda biz **logistik regressiyani** ikkita darajali toifali javob o‘zgaruvchi uchun, masalan, ha yoki yo‘q bo‘lgan holatlarda modellarni qurish vositasi sifatida taqdim qilamiz. Logistik regressiya **umumlashtirilgan chiziqli model** (inglizcha: generalized linear models, **GLM**) turi bo‘lib, javob o‘zgaruvchilari uchun oddiy ko‘p o‘zgaruvchili regressiya yaxshi ishlamaydigan holatlarda qo‘llaniladi. Xususan, bunday holatlarda javob o‘zgaruvchisi odatda normal taqsimotdan butunlay farq qiluvchi qoldiqlar ko‘rinishiga ega bo‘ladi.

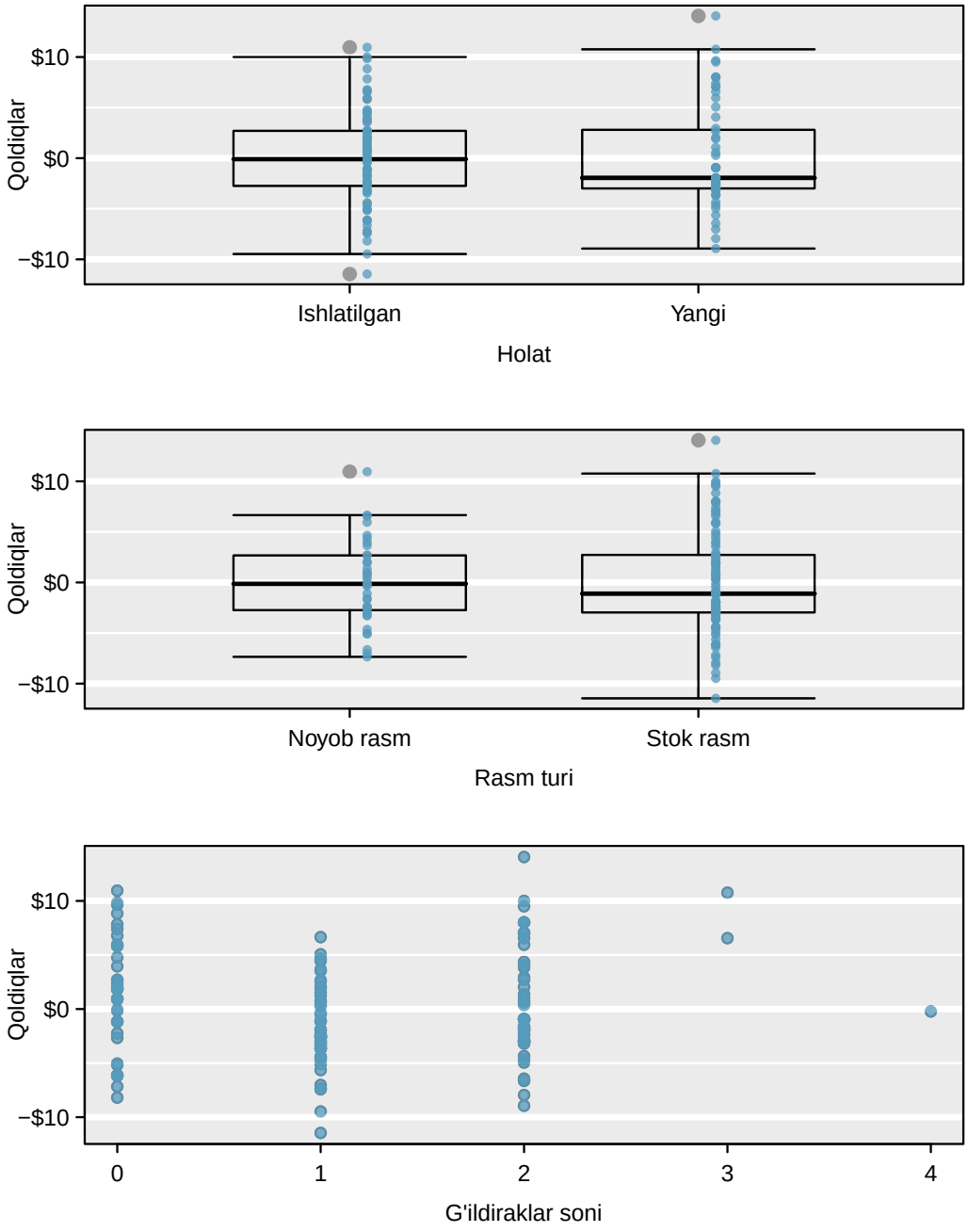
GLM larni ikki bosqichli modellashtirish yondashuvi sifatida qarash mumkin. Avvalo, javob o‘zgaruvchisini binomial yoki Poisson taqsimoti kabi ehtimollik taqsimoti yordamida modellashtiramiz. Keyin, ushbu taqsimot parametrini bir qator bashorat o‘zgaruvchilari yordamida va maxsus ko‘rinishga ega bo‘lgan ko‘p o‘zgaruvchili regressiya orqali modellashtiramiz. Oxir-oqibat, GLM ni qo‘llash ko‘p o‘zgaruvchili regressiyaga juda o‘xshash tuyuladi, garchi ba’zi tafsilotlar boshqacha bo‘lsa ham.

9.5.1 Rezyume ma’lumotlari

Biz ishga ariza topshirishda irq va jinsning chaqiruv stavkalariga ta’sirini o‘rganishga qaratilgan tajriba ma’lumotlarini ko‘rib chiqamiz; o‘rganish tafsilotlari va ma’lumotlar to‘plamiga havola Appendix B.9 da topilishi mumkin. Muhim omillarni baholash uchun, tadqiqotchilar Boston va Chikagodagi ish e’lonlarini aniqlab, ushbu ishlar uchun muhim xususiyatlarni, masalan, tajriba yillari va ta’lim tafsilotlarini belgilab, soxta rezyumelar yaratdilar. Keyin, har bir rezyumega tasodifiy ism biriktirildi, bu ism murojaat etuvchining irqi va jinsini tushunish uchun mo‘ljallangan edi.

Tajribada ishlatilgan birinchi ismlar, asosiy tanlangan irqiy guruhlarga tegishli bo‘lishi kutilgan Black yoki White shaxslarni anglatgan; boshqa irqlar ushbu tadqiqotda ko‘rib chiqilmagan. Har bir ism uchun irqiy bog‘liqlikni aniqlash maqsadida so‘rov o‘tkazildi; so‘rovdan o‘tmagan ismlar tajribada ishlatilmagan. So‘rovdan o‘tgan va oxir-oqibat tadqiqotda ishlatilgan to‘liq ismlar to‘plamini 9.20-rasmda topishingiz mumkin. Masalan, Lakisha ismi tadqiqot natijalariga ko‘ra Black ayolni anglatadi, Greg ismi esa odatda White erkakka tegishli deb qabul qilingan.

Javob o‘zgaruvchisi ish beruvchi tomonidan ariza topshirilganidan so‘ng murojaat qilgan-qilmaganligini bildiradi va biz ko‘rib chiqadigan 8 tasodifiy belgilanadigan atributlar mavjud, shu jumladan irq va jins o‘zgaruvchilariga alohida e’tibor beriladi. Irq va jins AQShda **himoyalangan toifalar** hisoblanadi, ya’ni ishga olish yoki ish bilan bog‘liq qarorlar uchun qonuniy ravishda e’tiborga olinishi mumkin emas. Ko‘rib chiqilgan atributlarning to‘liq ro‘yxati 9.21-rasmda keltirilgan.



9.19-rasm. Qoldiqlar `holati`, `stok_fotosurat` va `rullar` o‘zgaruvchilari bo‘yicha. `rullar` o‘zgaruvchisiga qaraganda, qoldiqlarda biroz egri chiziqli shakllanish seziladi.

first_name	race	sex
Aisha	black	female
Allison	white	female
Anne	white	female
Brad	white	male
Brendan	white	male
Brett	white	male
Carrie	white	female
Darnell	black	male
Ebony	black	female
Emily	white	female
Geoffrey	white	male
Greg	white	male

first_name	race	sex
Hakim	black	male
Jamal	black	male
Jay	white	male
Jermaine	black	male
Jill	white	female
Kareem	black	male
Keisha	black	female
Kenya	black	female
Kristen	white	female
Lakisha	black	female
Latonya	black	female
Latoya	black	female

first_name	race	sex
Laurie	white	female
Leroy	black	male
Matthew	white	male
Meredith	white	female
Neil	white	male
Rasheed	black	male
Sarah	white	female
Tamika	black	female
Tanisha	black	female
Todd	white	male
Tremayne	black	male
Tyrone	black	male

9.20-rasm. Hamma 36 noyob ismlar ro‘yxati, ularning irqi va jinsi bilan bog‘liq umumiy talqin.

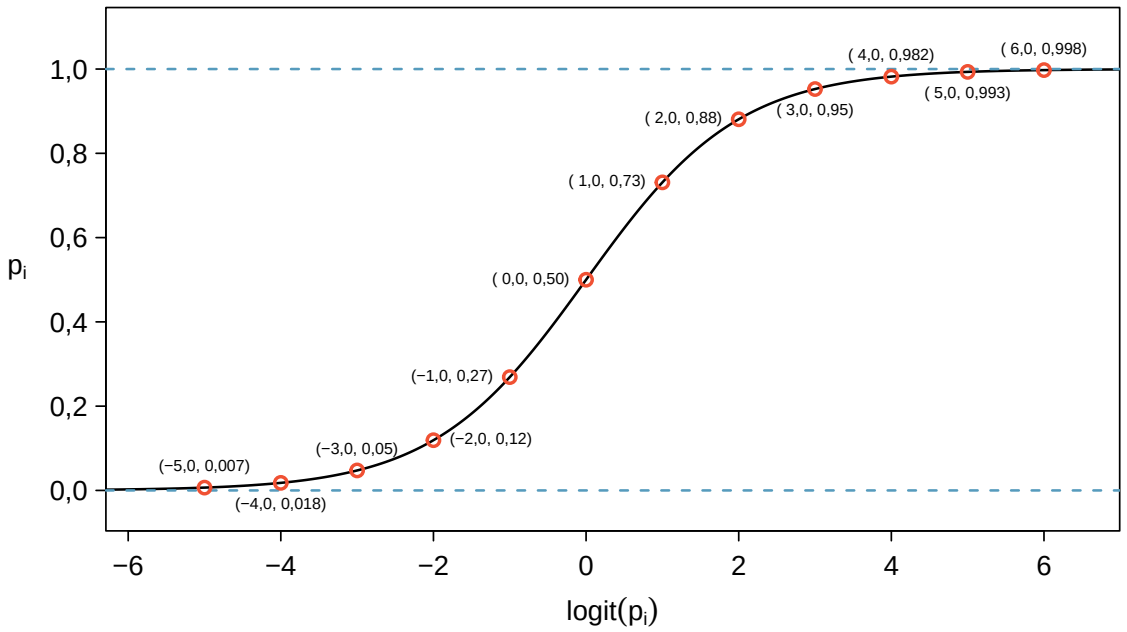
o‘zgaruvchi	**ta’rif**
`callback`	Ish beruvchi tomonidan murojaat qilinish-qilinmasligini ko‘rsatadi, ya’ni ariza topshirilgandan keyin chaqirilganmi.
`job_city`	Ish joylashgan shahar: Boston yoki Chikago.
`college_degree`	Rezyumeda kollej darajasining ko‘rsatilganligini bildiradi.
`years_experience`	Rezyumedagi tajriba yillari soni.
`honors`	Rezyumeda qandaydir mukofotlar (masalan, oy xodimi) ko‘rsatilganligini bildiradi.
`military`	Rezyumeda harbiy tajribaning ko‘rsatilganligini bildiradi.
`email_address`	Rezyumeda murojaat qiluvchining elektron pochta manzili mavjudligini bildiradi.
`race`	Rezyumeda ko‘rsatilgan ism orqali murojaat qiluvchining irqi.
`sex`	Murojaat qiluvchining jinsi (ushbu tadqiqotda faqat `male` va `female` bilan cheklangan), rezyumedagi ism orqali aniqlangan.

9.21-rasm. `callback` o‘zgaruvchisi va `resume` ma’lumotlar to‘plamidagi 8 boshqa o‘zgaruvchilarning ta’riflari. Ko‘pgina o‘zgaruvchilar indikator o‘zgaruvchilar bo‘lib, ular 1 qiymatini qabul qiladi, agar belgilangan xususiyat mavjud bo‘lsa va 0 aks holda.

Har bir rezyumedagi atributlar tasodifiy belgilangandi. Bu shuni anglatadiki, ishga olish uchun foydali yoki zararli bo‘lishi mumkin bo‘lgan atributlar bir demografik guruhni boshqasiga nisbatan ko‘proq qo‘llab-quvvatlamaydi. Muhimi, ushbu tadqiqotning eksperimental xususiyati tufayli, biz ushbu o‘zgaruvchilar va chaqiruv stavkasi o‘rtasidagi sababiyatni, agar o‘zgaruvchi statistik jihatdan muhim bo‘lsa, aniqlashimiz mumkin. Bizning tahlilimiz har bir o‘zgaruvchining amaliy ahamiyatini bir-biriga nisbatan taqqoslashga imkon beradi.

9.5.2 Hodisa ehtimolini modellashtirish

Logistik regressiya bu umumlashtirilgan chiziqli model bo‘lib, natija ikki darajali toifali o‘zgaruvchi hisoblanadi. Natija, Y_i, 1 qiymatini qabul qiladi (bizning misolimizda bu rezyume uchun chaqiruvni anglatadi) ehtimol p_i bilan, va 0 qiymatini $1 - p_i$ ehtimol bilan. Har bir kuzatuvning biroz boshqacha konteksti mavjud bo‘lganligi sababli, masalan, ta’lim darajasi yoki tajriba yillari soni, p_i ehtimoli har bir kuzatuv uchun farq qiladi. Oxir-oqibat, biz aynan shu ehtimolni bashorat o‘zgaruvchilar bilan bog‘liq holda modellashtiramiz: qaysi rezyume xususiyatlari yuqori yoki pastroq chaqiruv stavkalariga mos kelishini ko‘rib chiqamiz.



9.22-rasm. p_i qiymatlari va $logit(p_i)$ qiymatlari orasidagi bog‘liqlik.

LOGISTIK REGRESSIYA MODELI UCHUN BELGILASH

GLM ning natija o‘zgaruvchisi Y_i bilan belgilanadi, bu yerda i indeks kuzatuv i ni ifodalash uchun ishlatiladi. Rezyume ilovasida Y_i rezyume i chaqiruv olganligini ($Y_i = 1$) yoki olmaganligini ($Y_i = 0$) ifodalash uchun ishlatiladi.

Bashorat o‘zgaruvchilar quyidagicha ifodalanadi: $x_{1,i}$ - kuzatuv i uchun 1-o‘zgaruvchining qiymati, $x_{2,i}$ - kuzatuv i uchun 2-o‘zgaruvchining qiymati, va hokazo.

Logistik regressiya modeli rezyume chaqiruv olish ehtimolini (p_i) bashorat o‘zgaruvchilar $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, ..., $x_{k,i}$ bilan ko‘p o‘zgaruvchili regressiyaga o‘xshash tuzilma orqali bog‘laydi:

$$transformation(p_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \cdots + \beta_k x_{k,i} \ . \tag{9.30}$$

Biz tenglamada mantiqan va matematik jihatdan ma’qul bo‘lgan transformatsiyani tanlashni istaymiz. Masalan, tenglamaning chap tomonidagi mumkin bo‘lgan qiymatlar oralig‘i o‘ng tomondagilarga teng bo‘lishini ta’minlaydigan transformatsiya kerak; agar ushbu tenglama uchun transformatsiya bo‘lmaganida, chap tomoni faqat 0 va 1 orasidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo‘lgan bo‘lsa-da, o‘ng tomoni bu oralig‘dan tashqaridagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin edi. p_i uchun keng tarqalgan transformatsiya **logit transformatsiyasi** bo‘lib, u quyidagicha yoziladi:

$$logit(p_i) = \log_e \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right) \ .$$

Logit transformatsiyasi 9.22-rasmda ko‘rsatilgan. Quyida Y_i ning bashorat o‘zgaruvchilari bilan bog‘liqligini p_i logit transformatsiyasi orqali ifodalangan tenglamani qayta yozamiz:

$$\log_e \left(\frac{p_i}{1 - p_i} \right) = \beta_0 + \beta_1 x_{1,i} + \beta_2 x_{2,i} + \cdots + \beta_k x_{k,i} \ .$$

Rezyume misolimizda 8 bashoratlovchi o‘zgaruvchisi mavjud, shuning uchun $k = 8$. Logit funksiyasining aniq tanlovi intuitiv emas, ammo u umumlashtirilgan chiziqli modellar asosidagi nazariyaga asoslangan, bu esa ushbu kitob doirasidan tashqarida. Yaxshiyamki, dasturiy ta’minot yordamida modelni moslashtirganimizdan so‘ng, bu yana ko‘p o‘zgaruvchili regressiya kontekstiga o‘xshash bo‘lib tuyuladi, garchi koeffitsiyentlarni talqin qilish murakkabroq bo‘lsa ham.

9.31-MISOL

Biz bitta bashorat o‘zgaruvchi bilan modelni moslashtirishdan boshlaymiz: `honors`. Ushbu o‘zgaruvchi rezyumeda biror mukofot turi, masalan, oy xodimi, ko‘rsatilganligini bildiradi. Quyidagi logistik regressiya modeli statistik dastur yordamida moslashtirildi:

$$\log_e\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = -2{,}4998 + 0{,}8668 \times \texttt{honors}\ .$$

(a) Agar ushbu tadqiqotdan tasodifiy tanlangan bir rezyumeda mukofotlar ko‘rsatilmagan bo‘lsa, chaqiruv ehtimoli qancha bo‘ladi?
(b) Agar rezyumeda biror mukofot ko‘rsatilgan bo‘lsa, ehtimol qancha bo‘ladi?

(a) Agar topshirilgan rezyumelar orasidan tasodifiy tanlangan rezyume ko‘rib chiqilsa va unda mukofotlar ko‘rsatilmagan bo‘lsa, `honors` 0 qiymatini qabul qiladi va model tenglamasining o‘ng tomoni -2,4998 ga teng bo‘ladi. p_i ni yechamiz: $\frac{e^{-2{,}4998}}{1+e^{-2{,}4998}} = 0{,}076$. Bir o‘zgaruvchili va ko‘p o‘zgaruvchili regressiyada bashorat qiymat y_i uchun ”shlyapa” belgisini ishlatganimiz kabi, ushbu ehtimol uchun ham shunday qilamiz: $\hat{p}_i = 0{,}076$.

(b) Agar rezyumeda biror mukofot ko‘rsatilgan bo‘lsa, model tenglamasining o‘ng tomoni $-2{,}4998 + 0{,}8668 \times 1 = -1{,}6330$, bu esa ehtimolga mos keladi: $\hat{p}_i = 0{,}163$.

Shuni ta’kidlash kerakki, biz -2,4998 va -1,6330 ni 9.22-rasmda ko‘rib chiqib, qiymatni formal hisoblashdan oldin ehtimolni baho qilishimiz mumkin edi.

Logistik regressiya shkala qiymatlarini (e.g. -2,4998 va -1,6330 9.31-misoldagi kabi) ehtimollikka aylantirish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz, bu regressiya modelida p_i ni yechish natijasida olinadi:

$$p_i = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_{1,i}+\cdots+\beta_k x_{k,i}}}{1 \ + \ e^{\beta_0+\beta_1 x_{1,i}+\cdots+\beta_k x_{k,i}}}\ .$$

Ko‘pgina qo‘llanma ma’lumotlari muammolarida bo‘lgani kabi, ushbu formuladan foydalanish uchun parametrlarga (β_i) mos keladigan nuqtaviy baholarni o‘rnini bosamiz. 9.31-misolda ehtimollar quyidagicha hisoblangan edi:

$$\frac{e^{-2{,}4998}}{1 \ + \ e^{-2{,}4998}} = 0{,}076 \qquad\qquad \frac{e^{-2{,}4998+0{,}8668}}{1 \ + \ e^{-2{,}4998+0{,}8668}} = 0{,}163\ .$$

Rezyumeda mukofotlar mavjudligi ish beruvchi tomonidan chaqiruv olinishini bashorat qilishda ma’lum bir signalni taqdim etsa ham, biz chaqiruv ehtimoliga ta’sir qilgan har bir turli rezyume xususiyatlarini tushunish uchun bir vaqtning o‘zida ko‘plab o‘zgaruvchilarni hisobga olishni xohlaymiz.

9.5.3 Ko‘p o‘zgaruvchili logistik modelni qurish

Biz statistik dastur yordamida 9.21-rasmda ta’riflangan barcha 8 bashorat o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga olgan logistik regressiya modelini moslashtirdik. Ko‘p o‘zgaruvchili regressiyada bo‘lgani kabi, natijalar xulosa jadvalida taqdim etilishi mumkin, bu esa 9.23-rasmda ko‘rsatilgan. Ushbu jadvalning tuzilishi ko‘p o‘zgaruvchili regressiyaga deyarli identik; yagona sezilarli farq shundaki, p-qiymatlar t-taqsimot o‘rniga normal taqsimotdan foydalanib hisoblanadi.

Ko‘p o‘zgaruvchili regressiyada bo‘lgani kabi, modeldan ba’zi o‘zgaruvchilarni chiqarib tashlashimiz mumkin. Bu yerda biz **Akaike axborot mezoni** (inglizcha: Akaike Information Criterion), **AIC** deb nomlangan statistikadan foydalanamiz, bu ko‘p o‘zgaruvchili regressiyada moslashtirilgan R^2 ga analog bo‘lib, orqaga tomon yo‘qotish strategiyasi orqali quyi AIC qiymatli modellarni qidiramiz. Ushbu mezondan foydalanganimizdan so‘ng, `college_degree` o‘zgaruvchisi chiqarib tashlandi va 9.24-rasmda umumlashtirilgan kichikroq model qoldi. Ushbu bo‘limning qolgan qismida aynan shu modelga tayanamiz.

9.32-MISOL

`race` o‘zgaruvchisi faqat ikkita darajaga ega edi: `black` va `white`. Model natijalariga asoslanib, ish beruvchi tomonidan chaqiruv bo‘lishi uchun irq muhim omil bo‘lganmi?

	Baho	Standart xatolik	z qiymat	Pr(>|z|)
(Ozod had)	−2,6632	0,1820	−14,64	< 0,0001
job_city: *Chicago*	−0,4403	0,1142	−3,85	0,0001
college_degree	−0,0666	0,1211	−0,55	0,5821
years_experience	0,0200	0,0102	1,96	0,0503
honors	0,7694	0,1858	4,14	< 0,0001
military	−0,3422	0,2157	−1,59	0,1127
email_address	0,2183	0,1133	1,93	0,0541
race: *white*	0,4424	0,1080	4,10	< 0,0001
sex: *male*	−0,1818	0,1376	−1,32	0,1863

9.23-rasm. Rezyume chaqiruv misoliga oid to‘liq logistik regressiya modeli uchun xulosa jadvali.

	Baho	Standart xatolik	z qiymat	Pr(>|z|)
(Ozod had)	−2,7162	0,1551	−17,51	< 0,0001
job_city: *Chicago*	−0,4364	0,1141	−3,83	0,0001
years_experience	0,0206	0,0102	2,02	0,0430
honors	0,7634	0,1852	4,12	< 0,0001
military	−0,3443	0,2157	−1,60	0,1105
email_address	0,2221	0,1130	1,97	0,0494
race: *white*	0,4429	0,1080	4,10	< 0,0001
sex: *male*	−0,1959	0,1352	−1,45	0,1473

9.24-rasm. Rezyume chaqiruv misoliga oid logistik regressiya modeli uchun AIC yordamida o‘zgaruvchilarni tanlash amalga oshirilgan xulosa jadvali.

Ko‘ramizki, ushbu koeffitsiyent uchun p-qiymat juda kichik (deyarli nol), bu esa irq nomzod chaqiruv olganligi yoki olmaganligida statistik jihatdan ahamiyatli rol o‘ynaganini ko‘rsatadi. Shuningdek, koeffitsiyent `white` darajasiga mos kelishini va u musbat ekanligini ko‘ramiz. Ushbu musbat koeffitsiyent, nomzodning ismi odatda White deb talqin qilinadigan rezyumelar uchun chaqiruv stavkasida musbat o‘sishni aks ettiradi. Ma’lumotlar, nomzodning ismi odatda White sifatida talqin qilinadigan rezyumelarni ish beruvchilar tomonidan qo‘llab-quvvatlovchi kamsitishni aniq ko‘rsatadi.

Ko‘rinib turibdiki, to‘liq modelda 9.23-rasmdagi $\texttt{race}_{\texttt{white}}$ koeffitsiyenti deyarli 9.24-rasmdagi modeldagi bilan bir xil. Ushbu tajribadagi bashorat o‘zgaruvchilari shunday joylashtirilganki, koeffitsiyent baholari odatda modelda qaysi boshqa bashorat o‘zgaruvchilari kiritilganligiga ko‘p ta’sir qilmaydi, bu esa chaqiruv olish uchun muhim bo‘lgan ta’sirlarni ajratib ko‘rsatishga qaratilgan tadqiqot maqsadiga mos keladi. Ko‘pchilik kuzatuv ma’lumotlarida esa, nuqtaviy baholar modelga qaysi boshqa o‘zgaruvchilar kiritilganiga qarab bir oz, ba’zan esa sezilarli darajada o‘zgarishi mumkin.

M **9.33-MISOL**

9.24-rasmda umumlashtirilgan modeldan foydalanib, 14 yillik tajribaga ega, mukofot ko‘rsatilmagan, harbiy tajribaga ega bo‘lmagan, elektron pochta manzilini ko‘rsatgan, va ismi White erkak deb talqin qilinadigan shaxsning Chikagodagi ishga chaqirilish ehtimolini hisoblang.

Modellar uchun koeffitsiyentlarni yozib chiqishdan boshlaymiz, so‘ngra ushbu shaxs uchun har bir o‘zgaruvchining tegishli qiymatlarini qo‘shamiz:

$$log_e\left(\frac{p}{1-p}\right) =$$
$$= -2{,}7162 - 0{,}4364 \times \texttt{job_city}_{\texttt{Chicago}} + 0{,}0206 \times \texttt{years_experience} + 0{,}7634 \times \texttt{honors} =$$
$$= -0{,}3443 \times \texttt{military} + 0{,}2221 \times \texttt{email} + 0{,}4429 \times \texttt{race}_{\texttt{white}} - 0{,}1959 \times \texttt{sex}_{\texttt{male}} =$$
$$= -2{,}7162 - 0{,}4364 \times 1 + 0{,}0206 \times 14 + 0{,}7634 \times 0 =$$
$$= -0{,}3443 \times 0 + 0{,}2221 \times 1 + 0{,}4429 \times 1 - 0{,}1959 \times 1 = -2{,}3955.$$

Endi p uchun qiymatni yechamiz: bunday shaxsning chaqiruv olish ehtimoli taxminan 8,35%.

Ⓜ **9.34-MISOL**

Avvalgi misolda (9.33-misol) ko‘rsatilgan xususiyatlarga ega bo‘lgan, lekin ismi odatda Black erkak deb talqin qilinadigan shaxs uchun chaqiruv ehtimolini hisoblang.

Shu xususiyatlarga ega, lekin irq bo‘yicha $\texttt{race}_{\texttt{white}}$ qiymati `0` bo‘lgan shaxs uchun xuddi shu amallarni bajaramiz. Hisoblash natijasida 0,0553 ehtimol hosil bo‘ladi. Keling, bu natijalarni 9.33-misol bilan solishtiramiz.

Amaliy jihatdan, ismi White deb talqin qilinadigan shaxsning chaqiruv olishi uchun o‘rtacha $\frac{1}{0{,}0835} \approx 12$ ta ishga murojaat qilishi kerak, Black deb talqin qilinadigan shaxs esa o‘rtacha $\frac{1}{0{,}0553} \approx 18$ ta ishga murojaat qilishi kerak. Ya’ni, ismi odatda Black deb talqin qilinadigan nomzod ismi White deb talqin qilinadigan shaxsga qaraganda 50% ko‘proq ish beruvchilarga murojaat qilishi kerak, bu esa ushbu tadqiqotda keltirilgan ishlarga o‘xshash sharoitlarda chaqiruv olish ehtimolini ta’minlash uchun.

Ushbu bo‘limda kvantifikatsiya qilgan natijalarimiz tashvishli va achinarli. Ammo, bu irqchilikni bartaraf etishni juda qiyinlashtiradigan bir jihat shundaki, tajriba qanday mukammal ishlab chiqilgan bo‘lmasin, qaysi ish beruvchilar kamsitayotganini aniq aytib beruvchi signalni bera olmaydi. Biz faqatgina kamsitish yuz berayotganini aytishimiz mumkin, lekin qaysi aniq chaqiruvlar yoki chaqirilmasliklar kamsitishni ifodalashini ayta olmaymiz. Shaxsiy holatlar bo‘yicha irqchilikka oid kuchli dalillar topish kamsitishga qarshi qonunlarni amalga oshirishda doimiy muammo hisoblanadi.

9.5.4 Chaqiruv stavkasi modeli uchun diagnostika

LOGISTIK REGRESSIYA SHAROITLARI

Logistik regressiya modelini moslashtirish uchun ikkita asosiy shart mavjud:

1. Har bir natija Y_i boshqa natijalardan mustaqil bo‘lishi kerak.
2. Har bir bashorat o‘zgaruvchi x_i boshqa barcha bashorat o‘zgaruvchilar doimiy bo‘lsa, $\text{logit}(p_i)$ bilan chiziqli bog‘liq bo‘lishi kerak.

Logistik regressiya modelining birinchi sharti – natijalar mustaqilligi – eksperiment uchun asosli, chunki rezyumelarning xususiyatlari tasodifiy belgilanib, yuborilgan rezyumelarga tushirilgan edi.

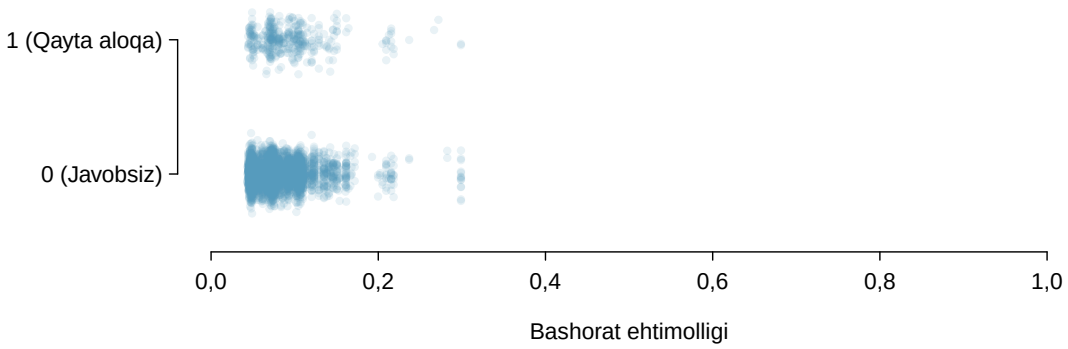
Logistik regressiya modelining ikkinchi sharti ma’lumotlar miqdori yetarlicha katta bo‘lmasa, osonlik bilan tekshirilmaydi. Yaxshiyamki, ma’lumotlar to‘plamida bizda 4870 ta rezyume mavjud! Avval ushbu ma’lumotlarni vizualizatsiya qilish uchun, modelning mos ehtimollari bilan rezyumelarning haqiqiy klassifikatsiyasini chizib chiqamiz, bu esa 9.25-rasmda ko‘rsatilgan.

Model sifatini baholashni xohlaymiz. Masalan, agar biz chaqiruv olish ehtimoli 10% deb baholangan rezyumelarni ko‘rib chiqsak, ularning taxminan 10% haqiqatan ham chaqiruv oladimi? Buni ma’lumotlar guruhlari uchun quyidagicha grafik qurib tekshirishimiz mumkin:

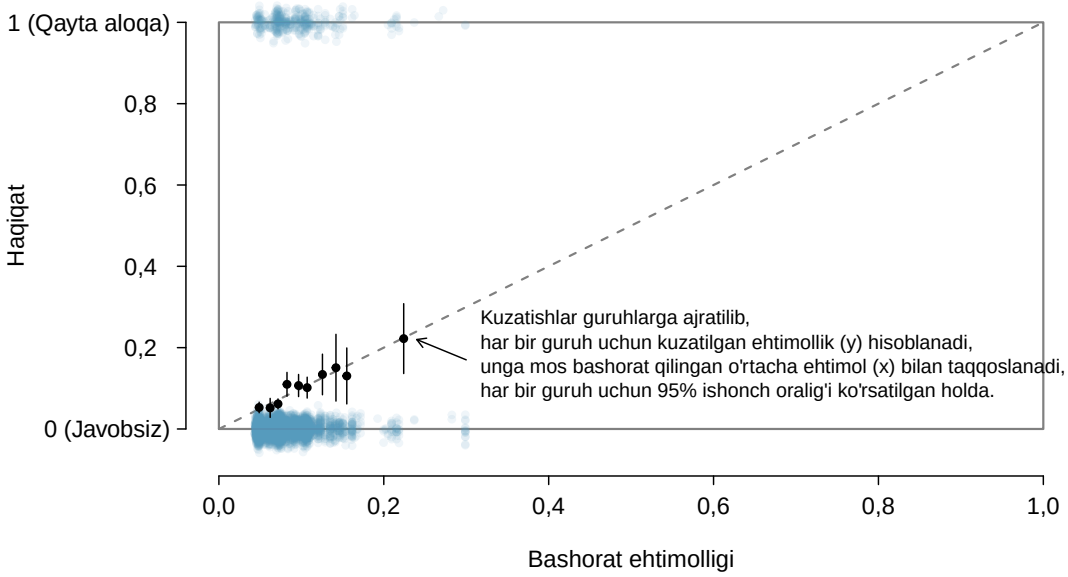
1. Ma’lumotlarni bashorat qilingan ehtimollarga asoslangan guruhlarga bo‘ling.
2. Har bir guruh uchun o‘rtacha bashorat qilingan ehtimolni hisoblang.
3. Har bir guruh uchun kuzatilgan ehtimolni va 95% ishonch intervalini hisoblang.
4. Kuzatilgan ehtimollarni (95% ishonch intervali bilan birga) har bir guruhning o‘rtacha bashorat qilingan ehtimollari bo‘yicha grafikka tushiring.

Chizilgan nuqtalar $y = x$ chizig‘iga yaqin tushishi kerak, chunki bashorat qilingan ehtimollar kuzatilgan ehtimollarga o‘xshash bo‘lishi kerak. Ishonch intervallaridan biror narsa noto‘g‘ri bo‘lishi mumkinligini taxminan baholash uchun foydalanishimiz mumkin. Bunday grafik 9.26-rasmda ko‘rsatilgan.

Qo‘shimcha diagnostika 9.3-bo‘limida ko‘rsatilganlarga o‘xshash tarzda yaratilishi mumkin. Masalan, qoldiqlarni kuzatilgan natija minus kutilgan natija sifatida ($e_i = Y_i - \hat{p}_i$) hisoblashimiz



9.25-rasm. Model bo‘yicha 4870 ta rezyume chaqiruv olganligi ehtimoli. Har bir nuqtaga kichik, tasodifiy vertikal siljish (shovqin) qo‘shilgan, shunda deyarli bir xil qiymatlarga ega nuqtalar bir-birining ustiga to‘liq tushmaydi.



9.26-rasm. Nuqtalar har bir guruh uchun 95% ishonch intervallari doirasida joylashgan, bu esa logistik model mosligi oqilona ekanligini ko‘rsatadi.

mumkin, so‘ngra ushbu qoldiqlarni har bir bashorat o‘zgaruvchiga qarshi chizish uchun grafikalar yaratishimiz mumkin. Shuningdek, 9.26-rasmdagi grafikaga o‘xshash grafikani ishlab chiqarib, og‘ishlarni yaxshiroq tushunishimiz mumkin.

9.5.5 Turli o‘lchamdagi guruhlar o‘rtasidagi kamsitishni o‘rganish

Har qanday kamsitish tashvishlanarli va aynan shuning uchun ushbu mavzuni ma’lumotlar yordamida muhokama qilishni muhim deb topdik. Rezyumelar tadqiqoti faqat kamsitishning bitta jihatini o‘rgandi: nomzod rezyumesini topshirgan bo‘lsa, potentsial ish beruvchi chaqiradimi yoki yo‘qmi. Nomzodning ismi Black deb talqin qilinadigan holatlarda, rezyumelar uchun 50% yuqoriroq to‘siq mavjud edi. Bu kamsitishning bu yerda tugashi ehtimoldan yiroq.

M **9.35-MISOL**

Keling, xodimlarining 20% ayollar va 80% erkaklardan iborat bo‘lgan jinsiy nomutanosib kompaniyani tasavvur qilamiz,[22] va bu kompaniya juda katta, taxminan 20000 xodimga ega deb faraz

qilamiz. Agar ushbu kompaniyada kimdir lavozim ko‘tarilishi uchun nomzodlikka qo‘yilgan bo‘lsa, ularning ishi bo‘yicha fikr bildirish uchun tasodifiy tarzda 5 nafar hamkasb tanlanadi.

Endi tasavvur qilamizki, kompaniyadagi odamlarning 10% boshqa jinsga nisbatan salbiy munosabatda. Ya’ni, erkaklarning 10% ayollarga, va xuddi shunday, ayollarning 10% erkaklarga nisbatan salbiy munosabatda.

Ushbu kompaniyada erkaklar yoki ayollar ko‘proq kamsitishga duchor bo‘ladimi?

Oxirgi bir necha yil ichida lavozimga ko‘tarilgan 100 nafar erkakni olganimizni tasavvur qilamiz. Ushbu erkaklar uchun $5 \times 100 = 500$ tasodifiy hamkasb ularning ishini baholash uchun jalb qilinadi, ulardan taxminan 20% (100 ta) ayollardan iborat bo‘ladi. Ushbu 100 ayoldan 10 tasi baholayotgan erkakka nisbatan salbiy munosabatda bo‘lishi kutiladi. Shunday qilib, ushbu erkaklarni baholayotgan 500 hamkasbdan 2% atrofidagisi ularga nisbatan kamsitish ko‘rsatadi.

Oxirgi bir necha yil ichida lavozimga ko‘tarilgan 100 nafar ayol uchun shunga o‘xshash hisob-kitobni amalga oshiramiz. Ular ham ishini baholash uchun 500 ta tasodifiy hamkasbga ega bo‘ladi, ulardan taxminan 400 tasi (80%) erkak bo‘ladi. Ushbu 400 erkakdan 40 tasi (10%) ayollarga nisbatan salbiy munosabatda bo‘ladi. Ushbu ayollarning ishini baholash uchun fikr bildirayotgan 500 hamkasbdan 8% atrofidagisi ularga nisbatan kamsitish ko‘rsatadi.

9.35-misol muhim narsani yoritadi: hatto har bir demografik guruh boshqa guruhga nisbatan bir xil darajada salbiy munosabatda bo‘lsa ham, kichikroq guruh salbiy ta’sirlarni ko‘proq boshdan kechiradi. Shuningdek, yuqoridagi kabi bir nechta turli raqamlar bilan misollarni bajarsak, aholi guruhlaridagi nomutanosiblik qanchalik katta bo‘lsa, kichikroq guruhning salbiy ta’sirlari shunchalik yuqori bo‘lishini bilamiz.[23]

Albatta, ushbu faraziy misolda haqiqiy dunyo omillarining boshqa muhim jihatlari e’tiborga olinmagan. Masalan, tadqiqotlar shuni ko‘rsatdiki, kamsitishga uchragan guruh vakillari o‘z guruhidagi boshqalarga ham kamsitish ko‘rsatishi mumkin. Boshqa misol sifatida, ko‘pchilik guruhlar ham kamsitishga uchrashi mumkin, Janubiy Afrikadagi aparteid bunga tarixiy misoldir. Oxir-oqibat, kamsitish murakkabdir, va unda 9.35-misoldagi matematik xususiyatdan tashqari ko‘plab omillar rol o‘ynaydi.

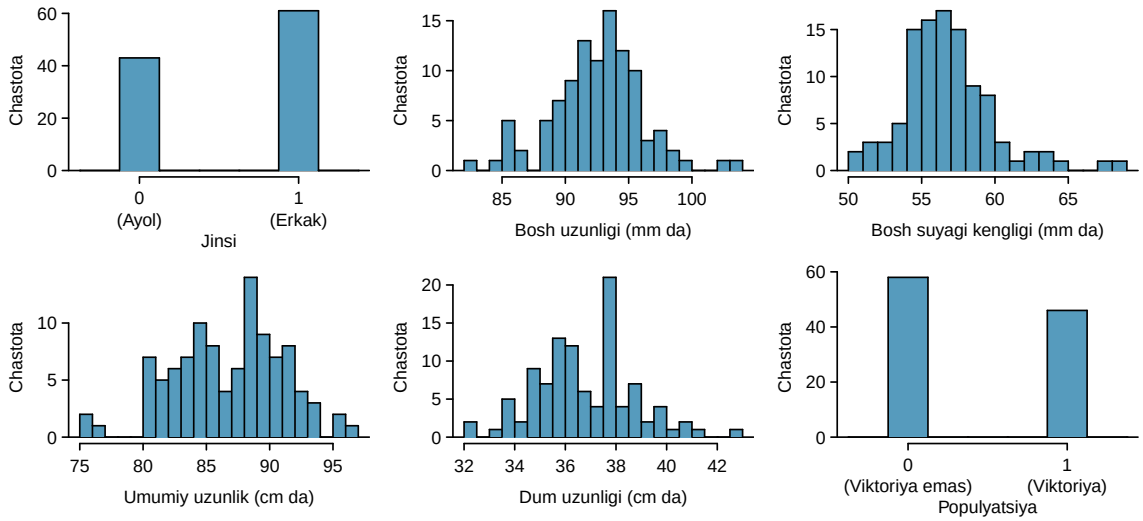
Ushbu kitobni ushbu jiddiy mavzuda yakunlaymiz va bu sizni ma’lumotlar bilan mantiqiy fikrlash kuchining ahamiyati haqida o‘ylashga ilhomlantirishini umid qilamiz. Bu rasmiy statistik model orqali bo‘ladimi yoki muammoni strukturalashtirish uchun tanqidiy fikrlash ko‘nikmalaridan foydalanish orqali bo‘ladimi, siz o‘rgangan g‘oyalar hayotda ko‘proq qilishga va yaxshiroq qilishga yordam beradi, deb umid qilamiz.

Mashqlar

9.15 Possum tasnifi, 1-qism. Avstraliya mintaqasida keng tarqalgan brushtail possum, o’zining uzoq qarindoshi bo’lgan Amerika opossumiga qaraganda biroz yoqimlidir (285-betdagi 8.4-rasmga qarang). Biz Avstraliyadagi ikkita mintaqadan kelgan 104 brushtail possumni ko’rib chiqamiz, bu possumlarni aholidan tasodifiy tanlangan namuna deb hisoblash mumkin. Birinchi mintaqa Viktoriya bo’lib, u Avstraliyaning sharqiy yarmi va janubiy sohillarini qamrab oladi. Ikkinchi mintaqa esa Yangi Janubiy Uels va Kvinslendni o’z ichiga oladi, bu hududlar sharqiy va shimoli-sharqiy Avstraliyani tashkil etadi. Biz ushbu ikki mintaqadagi possumlarni farqlash uchun logistik regressiyani qo’llaymiz. `population` deb ataladigan natija o’zgaruvchisi, agar possum Viktoriya mintaqasidan bo’lsa, 1 qiymatni, agar Yangi Janubiy Uels yoki Kvinslenddan bo’lsa, 0 qiymatni oladi. Biz beshta bashorat qiluvchi o’zgaruvchini ko’rib chiqamiz: `sex_male` (possumnning erkak ekanligini ko’rsatuvchi indikator), `head_length`, `skull_width`, `total_length`, va `tail_length`. Har bir o’zgaruvchi gistogrammada umumlashtirilgan. To’liq logistik regressiya modeli va o’zgaruvchilarni tanlashdan so’ng kamaytirilgan model jadvalda umumlashtirilgan.

[22] Ko‘proq e’tiborli misolga noan’anaviy jins vakillarini ham kiritish kerak.

[23] Agar kompaniyaning p ulushi ayollardan iborat bo‘lsa va qolgan kompaniya erkaklardan iborat bo‘lsa, ushbu faraziy vaziyatda ayollarga nisbatan kamsitish darajasi va erkaklarga nisbatan kamsitish darajasi $\frac{1-p}{p}$ bilan ifodalanadi; bu nisbat har doim $p < 0.5$ bo‘lganda 1 dan katta.



	To'liq Model				*Kamaytirilgan Model*			
	Bahosi	SE	Z	Pr(>|Z|)	Bahosi	SE	Z	Pr(>|Z|)
(Intercept)	39,2349	11,5368	3,40	0,0007	33,5095	9,9053	3,38	0,0007
sex_male	−1,2376	0,6662	−1,86	0,0632	−1,4207	0,6457	−2,20	0,0278
head_length	−0,1601	0,1386	−1,16	0,2480				
skull_width	−0,2012	0,1327	−1,52	0,1294	−0,2787	0,1226	−2,27	0,0231
total_length	0,6488	0,1531	4,24	0,0000	0,5687	0,1322	4,30	0,0000
tail_length	−1,8708	0,3741	−5,00	0,0000	−1,8057	0,3599	−5,02	0,0000

(a) Har bir bashorat qiluvchi o'zgaruvchini ko'rib chiqing. Logistik regressiya modeliga juda katta ta'sir ko'rsatishi mumkin bo'lganlar mavjudmi?

(b) To'liq modelning umumlashma jadvali o'zgaruvchilarni tanlashda p-qiymat yondashuvi qo'llanganda kamida bitta o'zgaruvchini chiqarib tashlash kerakligini ko'rsatadi: `head_length`. Jadvalning ikkinchi qismi o'zgaruvchilarni tanlashdan so'ng kamaytirilgan modelni umumlashtiradi. Qolgan baholar ikki model o'rtasida nima uchun o'zgarganligini tushuntiring.

9.16 Challenger halokati, 1-qism. 1986-yil 28-yanvarda Challenger kosmik kemasi uchun oddiy uchirish kutilgan edi. Parvozning 73-soniyasida falokat yuz berdi: kema parchalanib ketdi va bortdagi yetti nafar ekipaj a'zosi halok bo'ldi. Halokat sababini tekshirish O-ring deb ataluvchi muhim muhrga qaratildi, va ushbu O-ringlarga uchirish vaqtida ta'sir ko'rsatgan zararlar uchirish vaqtidagi atrof-muhit haroratiga bog'liq bo'lishi mumkin, deb hisoblanadi. Quyidagi jadval 23 ta kema missiyasi bo'yicha O-ringlarga oid kuzatuv ma'lumotlarini umumlashtiradi. Missiyalar tartibi uchirish vaqtidagi haroratga asoslangan. *Temp* haroratni Farengeytda, *Damaged* zarar ko'rgan O-ringlar sonini, va *Undamaged* zarar ko'rmagan O-ringlar sonini ko'rsatadi.

Kema missiyasi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Harorat	53	57	58	63	66	67	67	67	68	69	70	70
Zarar ko'rgan	5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
Zarar ko'rmagan	1	5	5	5	6	6	6	6	6	6	5	6

Kema missiyasi	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Harorat	70	70	72	73	75	75	76	76	78	79	81
Zarar ko'rgan	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Zarar ko'rmagan	5	6	6	6	6	5	6	6	6	6	6

(a) Yuqoridagi jadvalning har bir ustuni turli kema missiyalarini ifodalaydi. Ushbu ma'lumotlarni ko'rib chiqing va haroratlar va zarar ko'rgan O-ringlar o'rtasidagi bog'liqlikni tasvirlang.

(b) Noto'g'ri ishlashlar zarar ko'rgan O-ringlar uchun 1 va zarar ko'rmagan O-ringlar uchun 0 sifatida kodlangan, va ushbu ma'lumotlar uchun logistik regressiya modeli moslashtirilgan. Ushbu modelning umumlashma jadvali quyida berilgan. Ushbu jadvalning asosiy tarkibiy qismlarini so'z bilan tasvirlang.

	Bahosi	Standart xato	z qiymati	Pr(>|z|)
(Intercept)	11,6630	3,2963	3,54	0,0004
Harorat	−0,2162	0,0532	−4,07	0,0000

(c) Model parametrlarining nuqtali baholaridan foydalanib, logistik modelni yozib chiqing.

(d) Modelga asoslanib, O-ringlarga oid xavotirlar o'rinlimi? Izohlang.

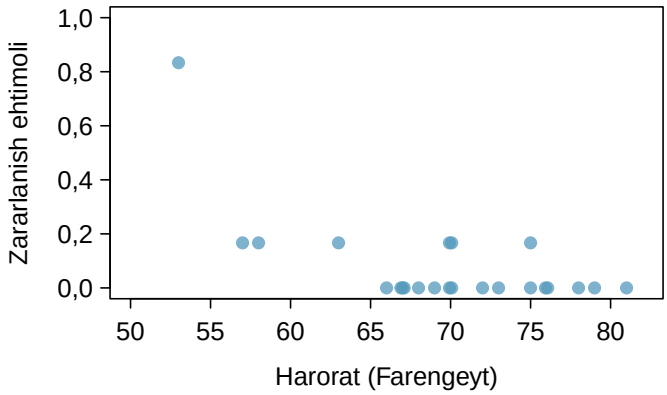
9.17 Possum tasnifi, 2-qism. 9.15-mashqda keng tarqalgan brushtail possumlarni ikki mintaqaga tasniflash uchun logistik regressiya modeli taklif qilingan edi. Natija o'zgaruvchisi, agar possum Viktoriya mintaqasidan bo'lsa, 1 qiymatini, aks holda 0 qiymatini oladi.

	Bahosi	Standart xato	Z	Pr(>|Z|)
(Intercept)	33,5095	9,9053	3,38	0,0007
sex_male	−1,4207	0,6457	−2,20	0,0278
skull_width	−0,2787	0,1226	−2,27	0,0231
total_length	0,5687	0,1322	4,30	0,0000
tail_length	−1,8057	0,3599	−5,02	0,0000

(a) Model shaklini yozing. Shuningdek, boshqa o'zgaruvchilarni nazorat qilgan holda qaysi o'zgaruvchilar ijobiy bog'liqlikka ega ekanligini aniqlang.

(b) Tasavvur qiling, AQShdagi hayvonot bog'ida brushtail possumni ko'rdingiz, va uning belgisi bu possum Avstraliyada yovvoyi tabiatda qo'lga olinganligini aytadi, lekin qaysi qismdan ekani haqida ma'lumot yo'q. Biroq, belgi bu possum erkak, bosh kengligi taxminan 63 mm, dumi 37 sm va umumiy uzunligi 83 sm ekanligini ko'rsatadi. Ushbu possum Viktoriya mintaqasidan bo'lish ehtimoli kamaytirilgan model bo'yicha qancha? Ushbu ehtimollik hisob-kitobining aniqligi haqida qanday fikrdasiz?

9.18 Challenger halokati, 2-qism. 9.16-mashq bizni O-ringlar bilan tanishtirdi, ular 1986-yilda Challenger kosmik kemasining parvozining 73-soniyasida parchalanishi uchun mumkin bo'lgan tushuntirish sifatida aniqlangan edi. Tekshiruv shuni ko'rsatdiki, kema uchirish vaqtida atrof-muhit harorati ushbu kemaning muhim tarkibiy qismi bo'lgan O-ringlar zararlanishi bilan yaqindan bog'liq edi. Agar siz original ma'lumotlarni ko'rib chiqishni istasangiz, ushbu oldingi mashqni ko'rib chiqing.



(a) Oldingi mashqda berilgan ma'lumotlar grafikda ko'rsatilgan. Ushbu ma'lumotlarga moslashtirilgan logistik model quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\log\left(\frac{\hat{p}}{1-\hat{p}}\right) = 11{,}6630 - 0{,}2162 \times Temperature$$

bu yerda $\hat{p}$ O-ring zarar ko'rishi ehtimolini model tomonidan baholangan qiymatidir. Ushbu modeldan foydalanib, harorat 51, 53 va 55 Farengeyt bo'lganda O-ring zarar ko'rish ehtimolini hisoblang. Qo'shimcha haroratlar uchun bir nechta model baholangan ehtimollar quyida keltirilgan, bu yerda indekslar haroratni bildiradi:

$$\hat{p}_{57} = 0{,}341 \quad \hat{p}_{59} = 0{,}251 \quad \hat{p}_{61} = 0{,}179 \quad \hat{p}_{63} = 0{,}124$$
$$\hat{p}_{65} = 0{,}084 \quad \hat{p}_{67} = 0{,}056 \quad \hat{p}_{69} = 0{,}037 \quad \hat{p}_{71} = 0{,}024$$

(b) (a) qismdagi model baholangan ehtimollarni grafikga qo'shing, so'ngra ushbu nuqtalarni silliq egri chiziq yordamida bog'lang, bu model baholangan ehtimollarni ifodalaydi.

(c) Ushbu qo'llanilishda logistik regressiyani qo'llash bo'yicha qanday xavotirlaringiz borligini tasvirlang va modelning to'g'riligini qabul qilish uchun zarur bo'lgan har qanday taxminlarni qayd eting.

Bob bo'yicha mashqlar

9.19 Ko’p regressiya uchun faktlarni tekshirish. Quyidagi bayonotlarning qaysi biri to’g’ri va qaysi biri noto’g’ri ekanligini aniqlang. Noto’g’ri bo’lgan har bir bayonot uchun nima uchun noto’g’ri ekanligini tushuntiring.

(a) Agar prediktorlar kollinearga ega bo’lsa, bir o’zgaruvchini olib tashlash boshqa o’zgaruvchining koeffitsientining bahosiga hech qanday ta’sir ko’rsatmaydi.

(b) Faraz qilaylik, sonli o’zgaruvchi x ko’p regressiya modelida $b_1 = 2{,}5$ koeffitsientga ega. Faraz qilaylik, birinchi kuzatuvda $x_1 = 7{,}2$, ikkinchi kuzatuvda esa $x_1 = 8{,}2$ qiymati mavjud, va ushbu ikkita kuzatuv boshqa barcha prediktorlar uchun bir xil qiymatlarga ega. Shunda, ko’p regressiya modeliga asoslanib, ikkinchi kuzatuvning bashorat qilingan qiymati birinchi kuzatuvnikidan 2,5 ga yuqori bo’ladi.

(c) Agar regressiya modelining birinchi o’zgaruvchisi $b_1 = 5{,}7$ koeffitsientga ega bo’lsa, unda biz ma’lumotlarni shunday o’zgartirsakki, kuzatuvning x_1 qiymati odatdagidan 1 ga yuqori bo’lsa, ushbu kuzatuv uchun y_1 qiymati 5,7 ga oshadi.

(d) Faraz qilaylik, biz 472 ta kuzatuvdan iborat ma’lumotlar to’plamiga asoslangan ko’p regressiya modelini moslashtirdik. Shuningdek, qoldiqlar taqsimoti biroz qiyshaygan, lekin juda haddan tashqari ajralmalarni o’z ichiga olmaydi. Qoldiqlar deyarli normal bo’lmaganligi sababli, biz ushbu modelni ishlatmasligimiz va ushbu ma’lumotlarni modellashtirish uchun yanada ilg’or usullarni qo’llashimiz kerak.

9.20 Logistik regressiya uchun faktlarni tekshirish. Quyidagi bayonotlarning qaysi biri to’g’ri va qaysi biri noto’g’ri ekanligini aniqlang. Noto’g’ri bo’lgan har bir bayonot uchun nima uchun noto’g’ri ekanligini tushuntiring.

(a) Faraz qilaylik, logistik regressiya modeliga asoslangan birinchi ikkita kuzatuvni ko’rib chiqamiz, bu yerda birinchi kuzatuvdagi birinchi o’zgaruvchi $x_1 = 6$ qiymatga ega, va ikkinchi kuzatuvda $x_1 = 4$ qiymati mavjud. Faraz qilaylik, biz ushbu ikki kuzatuv uchun xato qildik va birinchi kuzatuv aslida $x_1 = 7$ (6 o’rniga) qiymatga ega ekanligini, va ikkinchi kuzatuv aslida $x_1 = 5$ (4 o’rniga) qiymatga ega ekanligini aniqladik. Shunda logistik regressiya modelining bashorat qilingan ehtimoli ushbu o’zgaruvchilarni to’g’irlashdan keyin har bir kuzatuv uchun bir xil miqdorga oshadi.

(b) Logistik regressiya modelidan foydalanganda, model ehtimollarni manfiy yoki 1 dan katta bashorat qilishning iloji yo’q.

(c) Logistik regressiya natijalarni ehtimoliyatlar sifatida bashorat qilgani sababli, logistik regressiya modelini qurish uchun ishlatiladigan kuzatuvlar mustaqil bo’lishi shart emas.

(d) Logistik regressiyani moslashtirganda, odatda modelni tanlash tuzatilgan R^2 yordamida bajariladi.

9.21 Spam filtrlash, 1-qism. Spam filtrlari logistik regressiya bilan bog’liq tamoyillarga asoslangan holda quriladi. Biz har bir xabar spam yoki spam emasligini aniqlash uchun ehtimollikni moslashtiramiz. Ushbu muammo uchun bir nechta elektron pochta o’zgaruvchilariga egamiz: `to_multiple`, `cc`, `attach`, `dollar`, `winner`, `inherit`, `password`, `format`, `re_subj`, `exclaim_subj`, va `sent_email`. Bu yerda har bir o’zgaruvchi nima anglatishini batafsil bayon qilmaslik uchun faqat raqamli yoki indikator o’zgaruvchilar ekanligini aytib o’tamiz.

(a) O’zgaruvchilarni tanlash uchun biz barcha o’zgaruvchilarni o’z ichiga olgan to’liq modelni moslashtiramiz va shuningdek, har bir modelni moslashtiramiz va unda faqat bitta o’zgaruvchi olib tashlangan. Har bir kamaytirilgan model uchun AIC qiymati quyida keltirilgan. Ushbu natijalarga asoslanib, qaysi o’zgaruvchini, agar bo’lsa, modelni tanlashning bir qismi sifatida olib tashlash kerakligini tushuntiring.

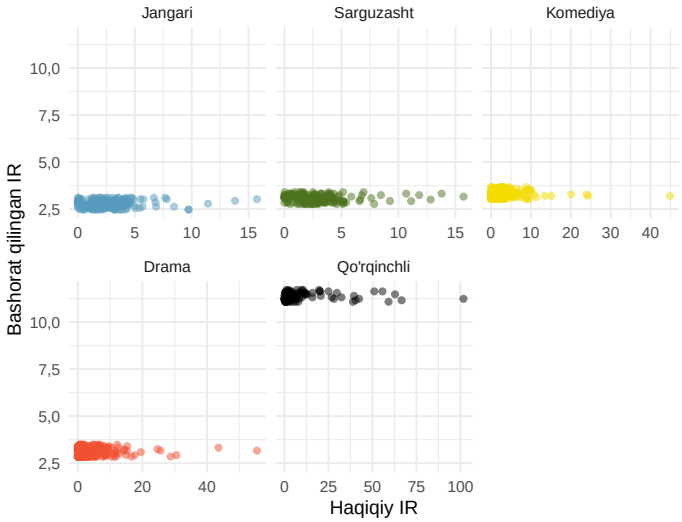
Olib tashlangan o’zgaruvchi	AIC
Hech biri olib tashlanmadi	1863,50
`to_multiple`	2023,50
`cc`	1863,18
`attach`	1871,89
`dollar`	1879,70
`winner`	1885,03
`inherit`	1865,55
`password`	1879,31
`format`	2008,85
`re_subj`	1904,60
`exclaim_subj`	1862,76
`sent_email`	1958,18

Qism (b) keyingi sahifada berilgan.

(b) Quyidagi modelni tanlash bosqichini ko’rib chiqing. Bu yerda ham har bir o’zgaruvchi chiqarib tashlangan model uchun AIC hisoblangan. Ushbu natijalarga asoslanib, qaysi o’zgaruvchini, agar bo’lsa, modelni tanlashning bir qismi sifatida olib tashlash kerakligini tushuntiring.

Olib tashlangan o'zgaruvchi	AIC
Hech biri olib tashlanmadi	1862,41
`to_multiple`	2019,55
`attach`	1871,17
`dollar`	1877,73
`winner`	1884,95
`inherit`	1864,52
`password`	1878,19
`format`	2007,45
`re_subj`	1902,94
`sent_email`	1957,56

9.22 Kinofilmlar daromadi, 2-qism. 9.14-mashqdagi talaba kinofilmlarning daromad bo'yicha sarmoya qaytarilishi (ROI) ni chiqarilgan yil va janr asosida tahlil qildi. Quyidagi grafiklar har bir janr uchun alohida Predicted ROI va Actual ROI ko'rsatilgan. Ushbu rasmlar FiveThirtyEight.com maqolasidagi "Qo'rqinchli filmlar uchun sarmoya qaytarilish salohiyati g'aroyibdir" degani fikrini qo'llab-quvvatlaydimi? Eslatma: X o'qi diapazoni har bir grafik uchun farq qiladi.



9.23 Spam filtrlash, 2-qism. 9.21-mashqdagi ma'lumotlar to'plamida logistik regressiya individual elektron pochta xabarlari uchun spamni tasniflashga yordam berish uchun qo'llanilgan edi. Ushbu mashqda ushbu o'zgaruvchilarning kichik to'plami asosida formal model moslashtirildi va quyidagi natijalar olingan:

	Bahosi	Standart xatolik	z qiymati	Pr(>|z|)
(Intercept)	−0,8124	0,0870	−9,34	0,0000
to_multiple	−2,6351	0,3036	−8,68	0,0000
winner	1,6272	0,3185	5,11	0,0000
format	−1,5881	0,1196	−13,28	0,0000
re_subj	−3,0467	0,3625	−8,40	0,0000

(a) Model moslashgan koeffitsientlardan foydalanib tenglamani yozing.

(b) Faraz qilaylik, bizda kuzatuv mavjud bo'lib, unda `to_multiple` = 0, `winner` = 1, `format` = 0, va `re_subj` = 0. Ushbu xabar spam bo'lish ehtimoli qancha?

(c) O'zingizni spam filtri ustida ishlayotgan ma'lumotlar olimi sifatida his qiling. Belgilangan xabar spam bo'lish ehtimoli qanchalik yuqori bo'lishi kerakki, uni *spam qutisi* ga qo'yish mantiqan to'g'ri bo'ladi (foydalanuvchi tekshirish ehtimoli kam bo'lgan joy)? Qanday savdo o'ylashlari bo'lishi mumkin? Sizning elektron pochta xizmatlaringizdan foydalanayotgan odamning nuqtai nazaridan spam filtrlash tizimingizni yanada yaxshiroq qilish uchun qanday g'oyalaringiz bor?

Appendix A

Mashqlar yechimlari

1 Ma'lumotlarga kirish

1.1 (a) Davolash: $10/43 = 0{,}23 \rightarrow 23\%$.
(b) Nazorat: $2/46 = 0{,}04 \rightarrow 4\%$. (c) Davolash guruhidagi bemorlarning yuqori foizi ignaterapiya olganidan so‘ng 24 soat davomida og‘riqsiz edi. (d) Ikki guruh foizlari o‘rtasidagi kuzatilgan farq tasodif tufayli bo‘lishi mumkin.

1.3 (a) “Havo ifloslanishiga duchor bo‘lish va muddatidan oldin tug‘ilishlar o‘rtasida bog‘liqlik bormi?” (b) 1989 va 1993 yillarda Janubiy Kaliforniyada 143196 ta tug‘ilish. (c) Havo sifati monitoring stansiyalarida yig‘ilgan uglerod oksidi, azot dioksidi, ozon va zarrachalar ($10\mu g/m^3$ dan kichik PM_{10}) o‘lchovlari hamda homiladorlik davomiyligi. Uzluksiz raqamli o‘zgaruvchilar.

1.5 (a) “Bolalarga aldash mumkin emasligini aniq aytish ularni aldash ehtimoliga ta’sir qiladimi?” (b) Yoshi 5 dan 15 gacha bo‘lgan 160 bola. (c) To‘rtta o‘zgaruvchi: (1) yosh (raqamli, uzluksiz), (2) jins (kategorik), (3) yagona bola yoki yo‘qligi (kategorik), (4) aldash yoki aldamasligi (kategorik).

1.7 Izohlovchi: akupunktura yoki yo‘q. Javob: bemor og‘riqsiz bo‘lganmi yoki yo‘qmi.

1.9 (a) $50 \times 3 = 150$. (b) To‘rtta uzluksiz raqamli o‘zgaruvchi: gulbo‘yin uzunligi, gulbo‘yin kengligi, barg uzunligi va barg kengligi. (c) Bitta kategorik o‘zgaruvchi, turlar, uchta darajada: *setosa*, *versicolor*, va *virginica*.

1.11 (a) Aeroport mulkchilik maqomi (davlat/xususiy), aeroportdan foydalanish maqomi (davlat/xususiy), kenglik va uzunlik. (b) Aeroport mulkchilik maqomi: kategorik, tartibga ega emas. Aeroportdan foydalanish maqomi: kategorik, tartibga ega emas. Kenglik: raqamli, uzluksiz. Uzunlik: raqamli, uzluksiz.

1.13 (a) Bosh to‘plam: barcha tug‘ilishlar, tanlanmasi: 1989 va 1993 yillarda Janubiy Kaliforniyada 143,196 ta tug‘ilish. (b) Agar ushbu vaqt oralig‘idagi va geografik joydagi tug‘ilishlar barcha tug‘ilishlar uchun vakil bo‘la olsa, natijalar Janubiy Kaliforniya bosh to‘plamiga umumlashtirilishi mumkin. Ammo, tadqiqot kuzatuv xarakterga ega bo‘lgani uchun natijalar sababiy bog‘liqlikni aniqlash uchun ishlatilmaydi.

1.15 (a) Bosh to‘plam: 18-69 yoshdagi va astma davolash uchun dorilarga tayanadigan barcha astma bemorlari tanlanmasi: shunday 600 bemor. (b) Agar ushbu tanlanmadagi bemorlar, ehtimol, tasodifiy tanlanmagan bo‘lsa ham, 18-69 yoshdagi va astma davolash uchun dorilarga tayanadigan barcha astma bemorlarini vakil bo‘lishi mumkin deb hisoblanadigan bo‘lsa, natijalar yuqorida ta’riflangan bosh to‘plamga umumlashtirilishi mumkin. Shuningdek, tadqiqot eksperimental bo‘lgani uchun, natijalar sababiy bog‘liqlikni aniqlash uchun ishlatilishi mumkin.

1.17 (a) Kuzatuv. (b) O‘zgaruvchi. (c) Tanlanma statistikasi (o‘rtacha qiymat). (d) Bosh to‘plam parametri (o‘rtacha qiymat).

1.19 (a) Kuzatuv xarakterga ega. (b) Har bir seksiyadan, masalan, 10 talaba, umumiy tanlanmaning hajmi 40 talabaga teng bo‘lgan tasodifiy stratifikatsiyalangan tanlovni amalga oshirish.

1.21 (a) Ijobiy, nochiziqli, biroz kuchli. Aholining katta qismi internetga ega bo‘lgan davlatlarda o‘rtacha umr ko‘rish davomiyligi ham yuqori bo‘ladi, ammo umr ko‘rish davomiyligidagi o‘sish taxminan 80 yoshdan oldin pasaya boshlaydi. (b) Kuzatuv. (c) Boylik: aholisi internetni keng sotib olishga qodir bo‘lgan davlatlar, ehtimol, asosiy tibbiy xizmatlarni ham sotib olishga qodir. (Eslatma: Javoblar farq qilishi mumkin.)

1.23 (a) Oddiy tasodifiy tanlash usuli mos keladi. Aslida, oddiy tasodifiy tanlash usuli mantiqsiz bo‘lishi juda kam uchraydi! (b) Talabalarning fikrlari o‘qish sohasi bo‘yicha farq qilishi mumkin, shuning uchun bu o‘zgaruvchi bo‘yicha stratifikatsiya qilish mantiqiy va o‘rinli bo‘ladi. (c) Yoshga yaqin bo‘lgan talabalar, ehtimol, o‘xshash fikrlar bildiradilar va biz manfaatli natija bo‘yicha xilma-xil klaster-

larni xohlaymiz, shuning uchun bu yaxshi yondashuv **emas**. (Qo‘shimcha fikr: ushbu holatda klasterlarda odamlar soni juda farq qilishi mumkin, bu kutilmagan tanlanmalar hajmini yaratishi mumkin.)

1.25 (a) Hollarda 200 tasodifiy tanlangan erkak va ayollar. (b) Javob o‘zgaruvchisi — xayoliy mikroto‘lqinli pechga nisbatan munosabat. (c) Izohlovchi o‘zgaruvchi — xulqiy munosabat. (d) Ha, hollardan tasodifiy tanlanmalar olingan. (e) Bu eksperimental tadqiqot emas, chunki davolashga tasodifiy ajratma amalga oshirilmagan. (f) Yo‘q, izohlovchi va javob o‘zgaruvchilari o‘rtasida sababiy bog‘liqlikni aniqlash mumkin emas, chunki tadqiqot kuzatuvdir. (g) Ha, tadqiqot natijalari keng bosh to‘plamga umumlashtirilishi mumkin, chunki tanlanma tasodifiydir.

1.27 (a) Oddiy tasodifiy tanlanmani tanlash. Javobsizlik tarafkashligi, agar faqat kuchli fikrga ega odamlar so‘rovga javob bersa, bu tanlanma bosh to‘plamni vakil bo‘lmasligi mumkin. (b) Qulaylik tanlanmasi. Qamrab olish tarafkashligi, tanlanma faqat uning do‘stlaridan iborat bo‘lganligi uchun bosh to‘plamni vakil bo‘lmasligi mumkin. Shuningdek, agar ba’zilar so‘rovni qaytarmasa, tadqiqot javobsizlik tarafkashligiga ega bo‘lishi mumkin. (c) Qulaylik tanlanmasi. Bu do‘stlarga so‘rovlarni topshirishga o‘xshash muammolarga ega bo‘ladi. (d) Ko‘p bosqichli tanlash. Agar sinflar talaba tarkibi bo‘yicha bir-biriga o‘xshash bo‘lsa, bu yondashuv tarafkashlikni kiritmasligi kerak, faqat javobsizlik tarafkashligi ehtimolidan tashqari.

1.29 (a) Imtihon natijalari. (b) Yorug‘lik darajasi: lyuminestsent yuqori yoritish, sariq yuqori yoritish, yuqori yoritish yo‘q (faqat stol lampalari). (c) Jins: erkak, ayol.

1.31 (a) Eksperiment. (b) Yorug‘lik darajasi (yuqori yoritish, sariq yuqori yoritish, yuqori yoritish yo‘q) va shovqin darajasi (shovqin yo‘q, qurilish shovqini, va inson suhbat shovqini). (c) Tadqiqotchilar teng jinsiy vakillikni ta’minlashni xohlaganligi sababli, jins bloklash o‘zgaruvchisi bo‘ladi.

1.33 Tasodifiylashtirish va ko‘r-ko‘rona o‘tkazish kerak. Bir mumkin bo‘lgan reja: (1) Har bir ishtirokchi uchun ikkita stakan tayyorlang, ulardan birida oddiy Coke va boshqasida Diet Coke bo‘lsin. Stakanlar bir xil bo‘lishiga va teng miqdorda ichimlik bo‘lishiga ishonch hosil qiling. Stakanlarni A (oddiy) va B (diet) deb belgilang. (Har bir sinov uchun A va B tasodifiylashtirilganiga ishonch hosil qiling!) (2) Har bir ishtirokchiga ikkita stakan bering, bir vaqtda bir marta, tasodifiy tartibda va ichimlikni qancha yoqtirishini ko‘rsatadigan qiymatni qayd etishini so‘rang. Ishtirokchi ham, stakanlarni berayotgan shaxs ham ichimlikning qaysi turiga tegishli ekanligini bilmasligiga ishonch hosil qiling, bu tadqiqotni ikki tomonlama ko‘r-ko‘rona qiladi. (Javoblar farq qilishi mumkin.)

1.35 (a) Kuzatuv tadqiqoti. (b) It: Lucy. Mushuk: Luna. (c) Oliver va Lily. (d) Ijobiy, chunki itlar uchun ismning mashhurligi oshgani sayin, bu ism mushuklar uchun ham mashhur bo‘ladi.

1.37 (a) Eksperiment. (b) Davolash: kuniga ikki marta 25 gramm chia urug‘lari, nazorat: platsebo. (c) Ha, jins. (d) Ha, yakkaxon ko‘r-ko‘rona, chunki bemorlar qaysi davolashni olayotganliklarini bilishmagan. (e) Bu eksperiment bo‘lgani uchun biz sababiy bayonot qilishimiz mumkin. Ammo, tanlanma tasodifiy bo‘lmagani sababli, sababiy bayonotni keng bosh to‘plamga umumlashtirish mumkin emas.

1.39 (a) Javob bermaganlar bu savolga boshqacha javob berishi mumkin, masalan, so‘rovnomalarni qaytargan ota-onalar, ehtimol, bolalari bilan vaqt o‘tkazishda qiyinchilikka duch kelmaydi. (b) 3 yil o‘tib bir xil manzilda bo‘lgan ayollar tasodifiy tanlanma bo‘lishi ehtimoldan yiroq. Ushbu javob bermaganlar, ehtimol, ijarachilar (uy egalariga nisbatan) bo‘lib, bu ular respondentlarga qaraganda pastroq ijtimoiy-iqtisodiy holatda bo‘lishi mumkinligini anglatadi. (c) Ushbu tadqiqotda nazorat guruhi yo‘q, bu kuzatuv tadqiqoti va bu yerda aralashuvchi o‘zgaruvchilar bo‘lishi mumkin, masalan, bu odamlar, umuman, sog‘lomroq bo‘lganliklari yoki boshqa mashqlar bilan shug‘ullanganliklari sababli yugurishga borishlari mumkin.

1.41 (a) Tasodifiylashtirilgan nazoratli eksperiment. (b) Izohlovchi: davolash guruhi (kategorik, 3 daraja bilan). Javob o‘zgaruvchisi: Psixologik farovonlik. (c) Yo‘q, chunki ishtirokchilar ko‘ngillilar edi. (d) Ha, chunki bu eksperiment edi. (e) Bayonotda “dalil” so‘zi o‘rniga “isbot” so‘zi ishlatilishi kerak.

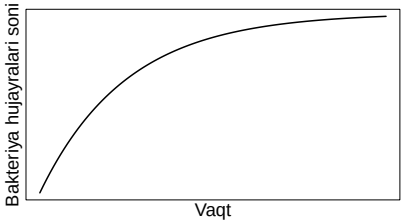
1.43 (a) Tumani, shtati, haydovchining irqiy kelib chiqishi, avtomobil qidirilganmi yo‘qmi va haydovchi hibsga olinganmi yo‘qmi. (b) Barchasi kategorik, tartibga ega emas. (c) Javob: avtomobil qidirilganmi yo‘qmi. Izohlovchi: haydovchining irqi.

2 Ma’lumotlarni umumlashtirish

2.1 (a) Ijobiy bog‘liqlik: homiladorlik davri uzunroq bo‘lgan sutemizuvchilar odatda uzoqroq yashashadi. (b) Bog‘liqlik hali ham ijobiy bo‘ladi. (c) Yo‘q, ular mustaqil emas. Qarang: (a).

2.3 Quyidagi grafik o‘sish davrini ko‘rsatadi. Shuningdek, boshida eksponensial o‘sish davri bo‘lishi

mumkin, keyin Petri idishining hajmi o‘sishni sekinlashtiruvchi omilga aylanadi.



2.5 (a) Bosh to‘plam o‘rtachasi $\mu_{2007} = 52$, tanlanma o‘rtachasi $\bar{x}_{2008} = 58$. (b) Bosh to‘plam o‘rtachasi $\mu_{2001} = 3{,}37$; tanlanma o‘rtachasi $\bar{x}_{2012} = 3{,}59$.

2.7 Ushbu zavodda umumiy ishchi soniga nisbatan minimal va o‘rtacha ish kunlari oralig‘ida bo‘lgan har qanday 10 nafar xodim.

2.9 (a) Dist 2 o‘rtachasi yuqoriroq, chunki $20 > 13$ va standart chetlanishi yuqoriroq, chunki 20 qolgan ma’lumotlardan 13 ga qaraganda uzoqroq. (b) Dist 1 o‘rtachasi yuqoriroq, chunki $-20 > -40$ va Dist 2 standart chetlanishi yuqoriroq, chunki -40 qolgan ma’lumotlardan -20 ga qaraganda uzoqroq. (c) Dist 2 o‘rtachasi yuqoriroq, chunki ushbu taqsimotdagi barcha qiymatlar Dist 1 dagi qiymatlardan yuqoriroq ammo har ikkala taqsimot standart chetlanishi bir xil, chunki ular o‘z o‘rtacha qiymatlariga nisbatan bir xil o‘zgaruvchanlikka ega. (d) Har ikkala taqsimot o‘rtacha qiymati bir xil, chunki ular 300 ga to‘g‘ri keladi ammo Dist 2 standart chetlanishi yuqoriroq, chunki kuzatishlar Dist 1 ga qaraganda o‘rtachadan uzoqroq.

2.11 (a) Taxminan 30. (b) Taqsimot o‘ngga og‘ganligi sababli, o‘rtacha qiymat medianadan yuqori. (c) Q1: 15 va 20 orasida, Q3: 35 va 40 orasida, IQR: taxminan 20. (d) Noqulay past yoki yuqori deb hisoblangan qiymatlar kvartillardan 1,5×IQR masofadan uzoqda yotadi. Yuqori chegarasi: $\text{Q3} + 1{,}5 \times \text{IQR} = 37{,}5 + 1{,}5 \times 20 = 67{,}5$; Quyi chegarasi: $\text{Q1} - 1{,}5 \times \text{IQR} = 17{,}5 - 1{,}5 \times 20 = -12{,}5$; Eng past AQI 5 dan past emas va eng yuqori AQI 65 dan yuqori emas, bu ikkisi ham chegaralar ichida. Shuning uchun ushbu tanlanmadagi kunlarning hech biri odatdagidan past yoki yuqori AQIga ega deb hisoblanmaydi.

2.13 Gistogramma taqsimotning ikki modali ekanligini ko‘rsatadi, bu quti diagrammasida ko‘rinmaydi. Quti diagrammasi mo‘ylovlardan tashqaridagi kuzatishlarning aniqroq qiymatlarini aniqlashni osonlashtiradi.

2.15 (a) Xonadonga tegishli uy hayvonlari sonining taqsimoti, ehtimol, o‘ngga og‘gan, chunki 0 da tabiiy chegarasi bor va faqat bir nechta odamda ko‘p hayvonlar bor. Shuning uchun markaz median bilan eng yaxshi ifodalanadi, o‘zgaruvchanlik esa IQR bilan eng yaxshi ifodalanadi. (b) Ish joyiga bo‘lgan masofa taqsimoti, ehtimol, o‘ngga og‘gan, chunki 0 da tabiiy chegarasi bor va faqat bir nechta odam ish joyidan juda uzoqda yashaydi. Shuning uchun markaz mediana bilan eng yaxshi ifodalanadi, o‘zgaruvchanlik esa IQR bilan eng yaxshi ifodalanadi. (c) Erkaklarning bo‘yi taqsimoti, ehtimol, simmetrik. Shuning uchun markaz o‘rtacha qiymat bilan eng yaxshi ifodalanadi, o‘zgaruvchanlik esa standart chetlanish bilan eng yaxshi ifodalanadi.

2.17 (a) Mediana ushbu 42 kishining odatdagi daromadini ancha yaxshi o‘lchaydi. O‘rtacha qiymat 42 kishidan 40 tasining daromadidan ancha yuqori. Buning sababi shundaki, o‘rtacha arifmetik o‘rtacha bo‘lib, ikkita ekstremal kuzatishlar ta’siriga uchraydi. Median esa bu ta’sirga chidamli bo‘lib, ajralib chiqadigan qiymatlarga kamroq sezgir. (b) IQR ushbu 42 kishidan deyarli barchasining daromadlaridagi o‘zgaruvchanlikni ancha yaxshi o‘lchaydi. Standart chetlanish ikkita yuqori maosh ta’sirida kuchli ta’sir qiladi, lekin IQR bu ekstremal kuzatishlarga chidamli.

2.19 (a) Taqsimot bir modali va simmetrik bo‘lib, o‘rtacha qiymat taxminan 25 daqiqa va standart chetlanish taxminan 5 daqiqa. Ko‘rinishicha, o‘rtacha sayohat vaqtida juda yuqori yoki past bo‘lgan tumanlar yo‘q. Taqsimot allaqachon bir modali va simmetrik bo‘lgani uchun log transformatsiyaga hojat yo‘q. (b) Javoblar farq qilishi mumkin. DC, Janubi-sharqiy NY, Chikago, Minneapolis, Los-Anjeles va boshqa ko‘plab yirik shaharlar atrofida uzoqroq sayohat vaqtlarining bo‘laklari mavjud. Shuningdek, O‘rta G‘arbdagi qishloq xo‘jalik yerlari bilan qoplanib ketgan qisqa o‘rtacha sayohat vaqtlarining katta qismi mavjud. Ko‘plab fermerlarning uylari o‘z qishloq xo‘jalik yerlariga tutash bo‘lib, ularning sayohat vaqtlari qisqa bo‘lishi mumkin, bu ushbu tumanlar uchun o‘rtacha sayohat vaqtining nisbatan past ekanligini tushuntirishi mumkin.

2.21 (a) Ushbu ustun grafikda kategoriyalar tartibi va nisbiy chastotalarini ko‘ramiz. (b) Doira grafikda ko‘rinib turgan, ammo ustun grafikda yo‘q bo‘lgan xususiyatlar yo‘q. (c) Biz odatda ustun grafikni afzal ko‘ramiz, chunki ushbu grafikda kategoriyalarning nisbiy chastotalarini ham ko‘rishimiz mumkin.

2.23 Ideologik guruhlarning “Ha”, “Yo‘q” va “Ishonchim komil emas” kategoriyalariga ajraladigan vertikal joylashuvlari farq qiladi. Bu DREAM qonunini qo‘llab-quvvatlash ehtimoli siyosiy ideologiyaga qarab o‘zgarishini ko‘rsatadi. Bu ikki o‘zgaruvchi bir-biriga bog‘liq bo‘lishi mumkinligini anglatadi.

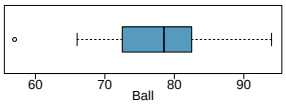
2.25 (a) (i) Noto‘g‘ri. Sonlarni solishtirish o‘rniga, har bir guruhda yurak-qon tomir muammolariga duch kelgan odamlarning foizlarini solishtirishimiz kerak. (ii) To‘g‘ri. (iii) Noto‘g‘ri. Bog‘liqlik sababiyatni anglatmaydi. Kuzatuv tadqiqotiga asoslanib sababiy bog‘liqlikni aniqlay olmaymiz. Bu (ii)-qismdan farq qiladi, ammo nozik. (iv) To‘g‘ri.
(b) Yurak-qon tomir muammolariga duch kelgan barcha bemorlarning ulushi: $\frac{7,979}{227,571} \approx 0,035$.
(c) Agar yurak-qon tomir muammolari va davolanish mustaqil bo‘lsa, rosiglitazon guruhi uchun yurak xurujlarining kutilgan soni ushbu guruhdagi bemorlar sonini tadqiqotdagi umumiy yurak-qon tomir muammolari ko‘rsatkichiga ko‘paytirib hisoblash mumkin: $67,593 * \frac{7,979}{227,571} \approx 2370$.
(d) (i) H_0: Davolash va yurak-qon tomir muammolari mustaqil. Ular o‘zaro bog‘liq emas va rosiglitazon va pioglitazon guruhlari orasidagi uchrashuv darajasidagi farq tasodif tufayli sodir bo‘ladi. H_A: Davolash va yurak-qon tomir muammolari mustaqil emas. Rosiglitazon va pioglitazon guruhlari orasidagi uchrashuv darajasidagi farq tasodif tufayli emas va rosiglitazon yurak-qon tomir muammolari xavfini oshiradi. (ii) bog‘liqsizlik farazi ostida kutilganidan ko‘proq yurak-qon tomir muammolari holati muqobil farazni qo‘llab-quvvatlaydi, chunki bu rosiglitazon bunday muammolar xavfini oshirayotganini ko‘rsatadi. (iii) Haqiqiy tadqiqotda rosiglitazon guruhida 2593 yurak-qon tomir hodisalari kuzatildi. bog‘liqsizlik modelida 1000 simulyatsiyada biz har bir simulyatsiyada 2593 dan kamroq hodisalarni kuzatdik, bu esa haqiqiy natijalar bog‘liqsizlik modelidan kelib chiqmaganligini ko‘rsatadi. Ya’ni, o‘zgaruvchilar mustaqil ko‘rinmaydi va biz bog‘liqsizlik modelini muqobil foydasiga rad etamiz. Tadqiqot natijalari rosiglitazon yurak-qon tomir muammolari xavfi bilan bog‘liq ekanligini ishonchli dalillar bilan ko‘rsatadi.

2.27 (a) Kamayadi: yangi baho oldingi 24 baholar o‘rtachasidan kichik. (b) Og‘irlikli o‘rtachani hisoblang. Eski o‘rtacha uchun 24 og‘irlik va yangi o‘rtacha uchun 1 og‘irlikdan foydalaning: $(24 \times 74 + 1 \times 64)/(24 + 1) = 73,6$. (c) Yangi baho oldingi o‘rtachadan bir standart chetlanishdan ko‘proq uzoqda, shuning uchun oshadi.

2.29 Yo‘q, biz ushbu taqsimotning o‘ngga og‘ishini kutamiz. Bunga ikki sabab bor: (1) 0 da tabiiy chegarasi bor (0 soatdan kam televizor ko‘rish mumkin emas), (2) taqsimotning standart chetlanishi o‘rtachaga nisbatan juda katta.

2.31 Eng yaxshi aktrisa g‘oliblarining yoshi taqsimoti o‘ngga og‘gan va medianasi taxminan 30 yil. Eng yaxshi aktyor g‘oliblarining yoshi taqsimoti ham o‘ngga og‘gan, ammo kamroq, medianasi taxminan 40 yil. Ushbu taqsimotlarning cho‘qqilari orasidagi farq eng yaxshi aktrisa g‘oliblari odatda eng yaxshi aktyor g‘oliblariga qaraganda yoshroq ekanligini ko‘rsatadi. Eng yaxshi aktrisa g‘oliblarining yoshi eng yaxshi aktyor g‘oliblarining yoshiga nisbatan ko‘proq o‘zgaruvchan. Har ikkala taqsimotning yuqori qismida ajralib turgan qiymatlar mavjud.

2.33



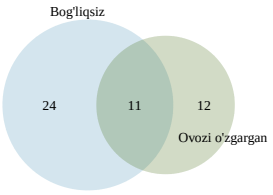
3 Ehtimollik

3.1 (a) Noto‘g‘ri. Bu mustaqil sinovlardir. (b) Noto‘g‘ri. Qizil yuzli kartalar mavjud. (c) To‘g‘ri. Bir karta ham yuzli karta, ham tuz bo‘la olmaydi.

3.3 (a) 10 marta tashlash. Kamroq tashlashlar boshlarning tanlanmaning ulushidagi o‘zgaruvchanlikni oshiradi, bu esa kamida 60% bosh olish ehtimolini oshiradi. (b) 100 marta tashlash. Ko‘proq tashlashlar boshlarning kuzatilgan ulushi ko‘pincha o‘rtachaga, ya’ni 0,50 ga yaqinroq bo‘lishini anglatadi va shu sababli 0,40 dan yuqori bo‘ladi. (c) 100 marta tashlash. Ko‘proq tashlashlar boshlarning kuzatilgan ulushi ko‘pincha o‘rtachaga, ya’ni 0,50 ga yaqinroq bo‘lishini ta’minlaydi. (d) 10 marta tashlash. Kamroq tashlashlar boshlarning ulushidagi o‘zgaruvchanlikni oshiradi.

3.5 (a) $0,5^{10} = 0,000\,98$. (b) $0,5^{10} = 0,000\,98$. (c) $P(\text{kamida bitta orqa}) = 1 - P(\text{hech qanday orqa yo‘q}) = 1 - (0,5^{10}) \approx 1 - 0,001 = 0,999$.

3.7 (a) Yo‘q, bog‘liqsiz bo‘lgan va “o‘zgaruvchan saylovchi” saylovchilari bo‘lgan saylovchilar ham bor. (b)



(c) Har bir bog‘liqsiz saylovchi yoki “o‘zgaruvchan saylovchi” saylovchi, yoki emas. Saylovchilarning 35% bog‘liqsiz va 11% ham bog‘liqsiz, ham “o‘zgaruvchan saylovchi” bo‘lsa, qolgan 24% “o‘zgaruvchan saylovchi” emas. (d) 0,47. (e) 0,53. (f) P(Bog‘liqsiz) $\times$ P(O‘zgaruvchan saylovchi) $= 0,35 \times 0,23 = 0,08$ bu P(Bog‘liqsiz va o‘zgaruvchan saylovchi) =0,11 ga teng emas, shuning uchun hodisalar bir-biriga bog‘liq.

3.9 (a) Agar kurs reytingga asoslanmasa, ular bog‘liqsiz. Agar reytingga asoslangan bo‘lsa, ular na bog‘liqsiz, na bog‘liqli bo‘ladi — agar o‘qituvchi faqat bitta A beradigan bo‘lsa, bu holat (b) va (c) qismlarda e’tibordan chetda qoladi. (b) Ehtimol, ular bog‘liqsiz emas: agar birga o‘qisangiz, o‘qish odatlaringiz bog‘liq bo‘lishi mumkin, bu sizning kursdagi natijalaringiz ham bog‘liq ekanligini ko‘rsatadi. (c) Yo‘q. Kurs reytingga asoslanmagan bo‘lsa, (a) qismidagi javobga qarang. Umuman: agar ikki narsa bog‘liq bo‘lmasa (bog‘liqsiz bo‘lsa), birining ro‘y berishi ikkinchisining ro‘y berishini inkor etmaydi.

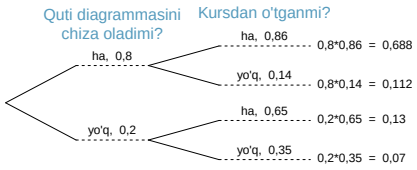
3.11 (a) $0{,}16 + 0{,}09 = 0{,}25$. (b) $0{,}17 + 0{,}09 = 0{,}26$. (c) Er-xotinning ta’lim darajasi bog‘liqsiz bo‘lsa: $0{,}25 \times 0{,}26 = 0{,}065$. Shuningdek, biz ikkinchi taxminni ham qilganimizni sezishingiz mumkin: turmush qurish qarori ta’lim darajasi bilan bog‘liq emas. (d) Er-xotinning bog‘liqsizlik taxmini, ehtimol, o‘rinli emas, chunki odamlar ko‘pincha o‘ziga o‘xshash ta’lim darajasiga ega odamlar bilan turmush qurishadi. (c) qismida eslatilgan ikkinchi taxmin qanchalik o‘rinli ekanligi haqida o‘ylashni sizga qoldiramiz.

3.13 (a) Yo‘q, ammo agar A va B bog‘liqsiz bo‘lsa, mumkin. (b-i) 0,21. (b-ii) 0,79. (b-iii) 0,3. (c) Yo‘q, chunki $0{,}1 \neq 0{,}21$, bu (a) qismidagi bog‘liqsizlikdan kelib chiqqan qiymat edi. (d) 0,143.

3.15 (a) Yo‘q, respondentlarning 0,18 qismi ushbu kombinatsiyaga to‘g‘ri keladi. (b) $0{,}60+0{,}20-0{,}18 = 0{,}62$. (c) $0{,}18/0{,}20 = 0{,}9$. (d) $0{,}11/0{,}33 \approx 0{,}33$. (e) Yo‘q, aks holda (c) va (d) qismlarga berilgan javoblar bir xil bo‘lardi. (f) $0{,}06/0{,}34 \approx 0{,}18$.

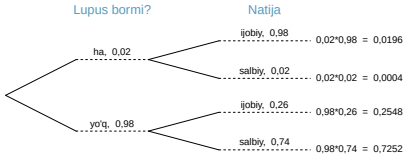
3.17 (a) Yo‘q. 5 ta o‘g‘il bolalar va 6 ta qiz bolalar Burgerni yoqtiradi. (b) $162/248 = 0{,}65$. (c) $181/252 = 0{,}72$. (d) Tanishuv tanlovi gamburgerga bo‘lgan afzallikka bog‘liq emas, degan taxmin ostida, bu yuzaki o‘rinli ko‘rinadi: $0{,}65 \times 0{,}72 = 0{,}468$. (e) $(252 + 6 - 1)/500 = 0{,}514$.

3.19 (a)



(b) 0,84

3.21 0,0714. Bir bemor lupus uchun ijobiy test natijasi olganida ham, uning lupusga ega bo‘lish ehtimoli atigi 7,14%. House haq bo‘lishi mumkin.



3.23 (a) 0,3. (b) 0,3. (c) 0,3. (d) $0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$. (e) Ha, har bir tanlashda tanlanma olinayotgan bosh to‘plam bir xil.

3.25 (a) $2/9 \approx 0.22$. (b) $3/9 \approx 0{,}33$. (c) $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \approx 0{,}067$. (d) Yo‘q, masalan, ushbu masalada bitta chipni olib tashlash keyingi tanlanadigan narsaning ehtimolini sezilarli darajada o‘zgartiradi.

3.27 $P(^1\text{leggings}, {}^2\text{jeans}, {}^3\text{jeans}) = \frac{5}{24} \times \frac{7}{23} \times \frac{6}{22} = 0{,}0173$. Ammo, leggings kiygan odam 2- yoki 3-o‘rinda bo‘lishi mumkin va bu har birida shu ehtimollikka ega, shuning uchun $3 \times 0{,}0173 = 0{,}0519$.

3.29 (a) 13. (b) Yo‘q, ushbu 27 nafar talaba universitet talabalarining tasodifiy tanlanmasi emas. Masalan, shunday dalil keltirilishi mumkin: shanba kuni ertalab soat 9 da sport zalga boradigan talabalar orasidagi chekuvchilar ulushi universitetning umumiy talabalar ulushidan kamroq bo‘lishi mumkin.

3.31 (a) E(X) = 3,59. SD(X) = 9,64. (b) E(X) = -1,41. SD(X) = 9,64. (c) Yo‘q, kutilayotgan sof foyda manfiy, shuning uchun o‘rtacha siz pul yo‘qotishni kutishingiz mumkin.

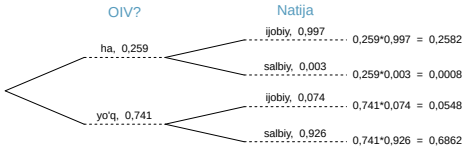
3.33 5% qiymatining oshishi.

3.35 E = -0,0526. SD = 0,9986.

3.37 Taxminiy javoblar mos keladi.
(a) $(29 + 32)/144 \approx 0{,}42$. (b) $21/144 \approx 0{,}15$. (c) $(26 + 12 + 15)/144 \approx 0{,}37$.

3.39 (a) Yaroqsiz. Yig‘indi 1 dan katta. (b) Yaroqli. Ehtimollar 0 va 1 orasida va ular yig‘indisi 1 ga teng. Ushbu sinfda har bir talaba C bahosini oladi. (c) Yaroqsiz. Yig‘indi 1 dan kichik. (d) Yaroqsiz. Salbiy ehtimollik mavjud. (e) Yaroqli. Ehtimollar 0 va 1 orasida va ular yig‘indisi 1 ga teng. (f) Yaroqsiz. Salbiy ehtimollik mavjud.

3.41 0,8247.



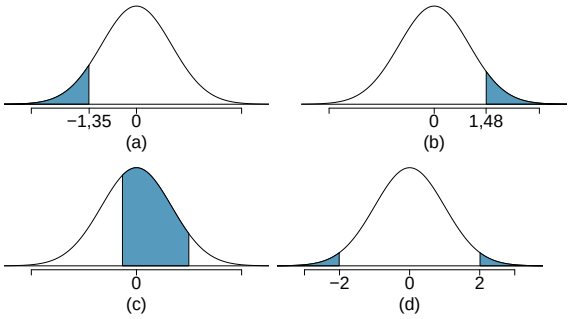
3.43 (a) E = \$3,90. SD = \$0,34.
(b) E = \$27,30. SD = \$0,89.

3.45 $Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)$
$= Var\left(\frac{X_1}{2} + \frac{X_2}{2}\right)$
$= \frac{Var(X_1)}{2^2} + \frac{Var(X_2)}{2^2}$
$= \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma^2}{4}$
$= \sigma^2/2$

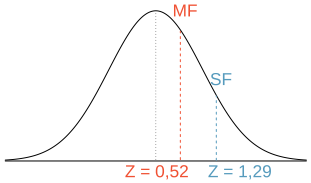
3.47 $Var\left(\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}\right)$
$= Var\left(\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}\right)$
$= \frac{Var(X_1)}{n^2} + \frac{Var(X_2)}{n^2} + \cdots + \frac{Var(X_n)}{n^2}$
$= \frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \cdots + \frac{\sigma^2}{n^2}$ (bu n ta atamani o‘z ichiga oladi)
$= n\frac{\sigma^2}{n^2}$
$= \sigma^2/n$

4 Tasodifiy o‘zgaruvchilar taqsimotlari

4.1 (a) 8,85%. (b) 6,94%. (c) 58,86%. (d) 4,56%.



4.3 (a) Verbal: $N(\mu = 151, \sigma = 7)$, Quant: $N(\mu = 153, \sigma = 7{,}67)$. (b) $Z_{VR} = 1{,}29$, $Z_{QR} = 0{,}52$.



(c) U Verbal Reasoning bo‘limida taqsimot o‘rtachasidan 1,29 standart chetlanish yuqorida va Quantitative Reasoning bo‘limida 0,52 standart chetlanish yuqorida natija oldi. (d) U Verbal Reasoning bo‘limida yaxshiroq natija ko‘rsatdi, chunki u yerda uning Z-qiymat yuqoriroq. (e) $Perc_{VR} = 0{,}9007 \approx 90\%$, $Perc_{QR} = 0{,}6990 \approx 70\%$. (f) $100\% - 90\% = 10\%$ Verbal Reasoningda undan yaxshiroq natija ko‘rsatdi va $100\% - 70\% = 30\%$ Quantitative Reasoningda undan yaxshiroq natija ko‘rsatdi. (g) Oddiy ballarni taqqoslay olmaymiz, chunki ular turli o‘lchamlarda. Uning foizli natijalarini taqqoslash boshqalarga nisbatan uning ko‘rsatkichini solishtirish uchun to‘g‘riroq. (h) (b) qismiga javob o‘zgarmaydi, chunki Z-qiymatini normal bo‘lmagan taqsimotlar uchun ham hisoblash mumkin. Biroq, biz (d)-(f) qismlariga javob bera olmaymiz, chunki normal model bo‘lmasa, normal ehtimollik jadvalidan foydalanib ehtimollar va foizlarni hisoblay olmaymiz.

4.5 (a) $Z = 0{,}84$ bu QR uchun taxminan 159 ga mos keladi. (b) $Z = -0{,}52$ bu VR uchun taxminan 147 ga mos keladi.

4.7 (a) $Z = 1{,}2$; $P(Z > 1{,}2) = 0{,}1151$.
(b) $Z = -1{,}28 \rightarrow 70{,}6°\text{F}$ yoki undan sovuq.

4.9 (a) $N(25, 2{,}78)$. (b) $Z = 1{,}08$, $P(Z > 1{,}08) = 0{,}1401$. (c) Javoblar juda yaqin, chunki faqat birliklar o‘zgartirildi. (Farqning yagona sababi shundaki, 28°C 82,4°F ga teng, aniq 83°F emas.) (d) Chunki $IQR = Q3 - Q1$, avval $Q3$ va $Q1$ ni topishimiz va ular orasidagi farqni olishimiz kerak. Q3 = 26,86; Q1 = 23,13; IQR = 26,86 - 23,13 = 3,73.

4.11 (a) Yo‘q. Kartalar mustaqil emas. Masalan, agar birinchi karta klublarning tuzi bo‘lsa, bu ikkinchi karta klublarning tuzi bo‘la olmaydi. Shuningdek, juda ko‘p imkoniyatlar mavjud, ular soddalashtirilishi kerak. (b) Yo‘q. Bu yerda oltita hodisa ko‘rib chiqilmoqda. Bernulli taqsimoti faqat ikki hodisa yoki kategoriyani qabul qiladi. Shuni unutmangki, zarik toshni tashlash Bernulli sinovi bo‘lishi mumkin. Agar uni ikki hodisaga soddalashtirsak, masalan, 6 chiqadi va 6 chiqmaydi, lekin bunday tafsilotlarni aniqlashtirish zarur bo‘ladi.

4.13 (a) $0{,}875^2 \times 0{,}125 = 0{,}096$. (b) $\mu = 8$; $\sigma = 7{,}48$.

4.15 Agar p muvaffaqiyat ehtimoli bo‘lsa, unda Bernulli tasodifiy o‘zgaruvchisi X uchun o‘rtacha quyidagicha beriladi:
$\mu = E[X] = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1$
$= (1 - p) \times 0 + p \times 1 = 0 + p = p.$

4.17 (a) Binomial shartlari bajariladi: (1) Bog‘liqsiz sinovlar: Tasodifiy tanlanma olganda, 18-20 yoshli bir kishi alkogol ichganmi yoki yo‘qmi, boshqa bir kishining ichganligi yoki ichmaganligiga bog‘liq emas. (2) Belgilangan sinovlar soni: $n = 10$. (3) Har bir sinovda faqat ikki natija: Alkagol ichgan yoki ichmagan. (4) Muvaffaqiyat ehtimoli har bir sinovda bir xil: $p = 0{,}697$. (b) 0,203. (c) 0,203. (d) 0,167. (e) 0,997.

4.19 (a) $\mu = 35$; $\sigma = 3{,}24$ (b) $Z = \frac{45-35}{3{,}24} = 3{,}09$. 45 qiymati o‘rtachadan 3 standart chetlanishdan yuqori. Bu uni noodatiy kuzatuv deb hisoblash imkonini beradi. Shuning uchun ha, biz hayron bo‘lamiz. (c) Normal taxmin bo‘yicha 0,0010. 0,5 tuzatish bilan esa 0,0017.

4.21 (a) $1 - 0{,}75^3 = 0{,}5781$. (b) 0,1406. (c) 0,4219. (d) $1 - 0{,}25^3 = 0{,}9844$.

4.23 (a) Geometrik taqsimot: 0,109. (b) Binomial: 0,219. (c) Binomial: 0,137. (d) $1 - 0{,}875^6 = 0{,}551$. (e) Geometrik: 0,084. (f) $n = 6$ va $p = 0{,}75$ uchun binomial taqsimotdan foydalangan holda $\mu = 4{,}5$; $\sigma = 1{,}06$ va $Z = 2{,}36$ ko‘ramiz. Bu 2 SD ichida emas, shuning uchun bu noodatiy deb hisoblanishi mumkin.

4.25 (a) $\overset{Anna}{1/5} \times \overset{Ben}{1/4} \times \overset{Carl}{1/3} \times \overset{Damian}{1/2} \times \overset{Eddy}{1/1} = 1/5! = 1/120$. (b) Ehtimollar 1 ga teng bo‘lishi uchun, $5! = 120$ mumkin bo‘lgan tartib bo‘lishi kerak. (c) $8! = 40320$.

4.27 (a) Geometrik 0,0804. (b) Binomial 0,0322. (c) Salbiy binomial 0,0193.

4.29 (a) $n = 4$ va $p = 0{,}55$ bo‘lgan salbiy binomial taqsimot, bu yerda muvaffaqiyat ayol talaba sifatida aniqlanadi. Salbiy binomial shart mos keladi, chunki oxirgi sinov belgilangan ammo dastlabki 3 sinovning tartibi noma’lum. (b) 0,1838. (c) $\binom{3}{1} = 3$. (d) Binomial modelda oxirgi sinovning natijasi bo‘yicha hech qanday cheklov yo‘q. Salbiy binomial modelda esa oxirgi sinov belgilangan. Shuning uchun biz birinchi $n-1$ sinovdagi $k-1$ muvaffaqiyatlarni tartibga solish usullari bilan qiziqamiz.

4.31 (a) Puasson taqsimoti $\lambda = 75$. (b) $\mu = \lambda = 75$; $\sigma = \sqrt{\lambda} = 8{,}66$. (c) $Z = -1{,}73$. 60 qiymati o‘rtachadan 2 standart chetlanish ichida bo‘lganligi sababli, bu odatda noodatiy deb hisoblanmaydi. Shuni ta’kidlash kerakki, ushbu qoida normal model qo‘llanilmasa ham qo‘llanadi. (d) Puasson taqsimoti $\lambda = 75$ bilan 0,0402.

4.33 (a) $\frac{\lambda^k \times e^{-\lambda}}{k!} = \frac{6.5^5 \times e^{-6.5}}{5!} = 0{,}1454$
(b) Ehtimollik quyidagicha bo‘ladi: 0,0015+0,0098+0,0318 = 0,0431 (0,0430 agar yaxlitlash xatosi bo‘lmasa).
(c) Mashina boshiga odamlar soni 11,7/6,5 = 1,8 bu odamlarning kichik guruhlarda kelishini bildiradi. Ya’ni, bir kishi kelsa, uning mashinasida bir yoki undan ortiq odamlarni olib kelish ehtimoli mavjud. Bu shuni anglatadiki, odamlar (ya’ni kelgan odamlar) mustaqil emas, garchi mashinalarning kelishi mustaqil bo‘lsa ham. Bu Puasson taqsimoti uchun asosiy taxminni buzadi. Bu shuni anglatadiki, soat 14:00 dan 15:00 gacha kelgan odamlar soni Puasson taqsimotiga bo‘ysunmaydi.

4.35 0 ta g‘alaba (-$3): 0,1458. 1 ta g‘alaba (-$1): 0,3936. 2 ta g‘alaba (+$1): 0,3543. 3 ta g‘alaba (+$3): 0,1063.

4.37 1787 yoki undan ko‘p ishtirokchilar bo‘lish ehtimolini topish kerak. Normal taxmin bo‘yicha, $\mu = np = 2500 \times 0{,}7 = 1750$ va $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{2500 \times 0{,}7 \times 0{,}3} \approx 23$; $Z = 1{,}61$ va $P(Z > 1{,}61) = 0{,}0537$. 0,5 tuzatish bilan: 0,0559.

4.39 (a) $Z = 0{,}67$. (b) $\mu = \$1650$, $x = \$1800$. (c) $0{,}67 = \frac{1800-1650}{\sigma} \to \sigma = \$223{,}88$.

4.41 (a) $(1-0{,}471)^2 \times 0{,}471 = 0{,}1318$. (b) $0{,}471^3 = 0{,}1045$. (c) $\mu = 1/0{,}471 = 2{,}12$, $\sigma = \sqrt{2{,}38} = 1{,}54$. (d) $\mu = 1/0{,}30 = 3{,}33$, $\sigma = 2{,}79$. (e) Agar p kichik bo‘lsa, hodisa kam uchraydi, ya’ni muvaffaqiyatgacha bo‘lgan sinovlar sonining kutilgan qiymati va kutish vaqtining standart chetlanishi oshadi.

4.43 $Z = 1{,}56$; $P(Z > 1{,}56) = 0{,}0594$ ya’ni 6%.

4.45 (a) $Z = 0{,}73$; $P(Z > 0{,}73) = 0{,}2327$. (b) Agar siz faqat bitta auksionga qatnashayotgan bo‘lsangiz va maksimal narxni past belgilasangiz, boshqa birov sizni ortda qoldirishi ehtimoli yuqori. Agar yuqori maksimal narxni belgilasangiz, auksionda g‘olib bo‘lishingiz mumkin, lekin kerak bo‘lgandan ko‘ra ko‘proq to‘lashingiz mumkin. Agar bir nechta auksionga qatnashayotgan bo‘lsangiz va maksimal narxni juda past belgilasangiz, hech birida g‘alaba qozonmasligingiz mumkin. Ammo maksimal narx hatto biroz yuqori bo‘lsa, bir nechta auksionda g‘olib bo‘lishingiz ehtimoli yuqori. (c) Taxminan 10-foizlik kesimga yaqin javob mantiqiy bo‘ladi. Ammo, bitta auksionda g‘alaba qozonishni kafolatlaydigan foizli kesim nuqtasi mavjud emas. Agar auksionda g‘alaba qozonishni ko‘proq xohlasangiz, yuqori foizni tanlashingiz mumkin. (d) Javoblar biroz farq qilishi mumkin, lekin (c) qismidagi javobga mos kelishi kerak. Biz 10−foizni ishlatamiz: $Z = -1{,}28 \to \$69{,}80$.

4.47 (a) $Z = 3{,}5$, yuqori quyruq 0,0002. (Aniqroq qiymat: 0,000233 lekin biz bu yerda hisoblash uchun 0,0002 dan foydalanamiz.)
(b) $0{,}0002 \times 2000 = 0{,}4$. Biz 76 dyum yoki undan baland bo‘lgan taxminan 0,4; 10 yoshli bolalar bo‘lishini kutamiz.
(c) $\binom{2000}{0}(0{,}0002)^0(1-0{,}0002)^{2000} = 0{,}670\,29$.
(d) $\frac{0{,}4^0 \times e^{-0{,}4}}{0!} = \frac{1 \times e^{-0{,}4}}{1} = 0{,}670\,32$.

5 Chiqindilar uchun asoslar

5.1 (a) O‘rtacha qiymat (Mean). Har bir talaba sonli qiymatni (soatlar sonini) bildiradi. (b) O‘rtacha qiymat (Mean). Har bir talaba foizni bildiradi va biz ushbu foizlarni o‘rtacha hisoblashimiz mumkin. (c) Ulush (Nisbat). Har bir talaba Ha yoki Yo‘q deb javob beradi. Bu esa kategorik o‘zgaruvchi hisoblanadi va biz ulushni ishlatamiz. (d) O‘rtacha qiymat (Mean). Har bir talaba foizni bildiradi, bu (b) qismdagi kabi. (e) Ulush (Nisbat). Har bir talaba ish topish niyati bor yoki yo‘qligini bildiradi. Bu esa kategorik o‘zgaruvchi hisoblanadi va biz ulushni ishlatamiz.

5.3 (a) Tanlanma ishlab chiqarish haftasida fabrikada ishlab chiqarilgan barcha kompyuter chiplaridan olingan. Biz bosh to‘plamni barcha haftalarga umumlashtirishni xohlagan bo‘lishimiz mumkin, lekin ehtiyot bo‘lish kerak, chunki nuqsonlar darajasi vaqt o‘tishi bilan o‘zgarishi mumkin. (b) Ishlab chiqarish haftasida fabrikada ishlab chiqarilgan kompyuter chiplarining nuqsonli bo‘lganlari ulushi. (c) Parametrni ma’lumotlar yordamida baholash: $\hat{p} = \frac{27}{212} = 0{,}127$. (d) *Standart xatolik* (yoki SX). (e) $\hat{p} = 0{,}127$ qiymatini p o‘rniga ishlatib SX ni hisoblang: $SX \approx \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}127(1-0{,}127)}{212}} = 0{,}023$. (f) Standart xatolik $\hat{p}$ ning standart og‘ishi hisoblanadi. 0,10 qiymati kuzatilgan qiymatdan taxminan bitta standart xatolik masofada bo‘ladi. Bu juda kam uchraydigan farqni bildiradi. (Odatda taxminan 2 standart xatolikdan ortiq bo‘lganda bu qoidani ishlatish yaxshi bo‘ladi.) Muhandis hayratga tushmasligi kerak. (g) $p = 0{,}1$ qiymati bilan qayta hisoblangan standart xatolik: $SX = \sqrt{\frac{0{,}1(1-0{,}1)}{212}} = 0{,}021$. Bu qiymat juda farq qilmaydi. Bu odatda nisbatan o‘xshash ulushlardan foydalanilganda (ba’zan esa ancha farqli ulushlar bilan ham) kuzatiladi.

5.5 (a) Tanlanma olish taqsimoti (Sampling distribution). (b) Agar bosh to‘plam ulushi 5-30% oralig‘ida bo‘lsa, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajariladi va tanlanma olish taqsimoti simmetrik bo‘ladi. (c) Standart xatolik uchun formuladan foydalanamiz: $SX = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} =$

$\sqrt{\frac{0{,}08(1-0{,}08)}{800}} = 0{,}0096$. (d) Standart xatolik. (e) tanlanma uchun kuzatuvlar soni kamroq bo‘lsa, taqsimot ko‘proq o‘zgaruvchan bo‘ladi.

5.7 Eslatib o‘tamiz, umumiy formula *nuqta bahosi*$\pm z^\star \times SX$. Avval uch xil qiymatni aniqlang. Nuqta bahosi 45%, $z^\star = 1{,}96$. 95% ishonch darajasi uchun va $SX = 1{,}2\%$. Keyin, qiymatlarni formulaga qo‘ying: $45\% \pm 1{,}96 \times 1{,}2\% \rightarrow (42{,}6\%; 47{,}4\%)$. Biz AQSh kattalarining 42,6% va 47,4% oralig‘ida bir yoki undan ortiq surunkali kasalliklar bilan yashashiga 95% ishonamiz.

5.9 (a) Noto‘g‘ri. Ishonch intervallari ishonchli qiymatlar oralig‘ini beradi va ba’zan haqiqiy qiymatga mos kelmaydi. 95% ishonch intervali taxminan 5% hollarda “xato qiladi”. (b) To‘g‘ri. Ta’rif haqiqiy bosh to‘plam qiymatiga qaratilganini ko‘ring. (c) To‘g‘ri. Agar 95% ishonch intervalini ko‘rib chiqsak (5.9-masaladan hisoblangan), 50% bu intervallga kiritilmaganligini ko‘ramiz. Bu shuni anglatadiki, gipoteza testida bosh to‘plam ulushi 0,5 ekanligi haqidagi nol gipotezani rad qilamiz. (d) Noto‘g‘ri. Standart xatolik umumiy bahodagi tasodifiylik tufayli tabiiy o‘zgarishlardan kelib chiqqan noaniqlikni tasvirlaydi, individual javoblarga mos keladigan noaniqlikni emas.

5.11 (a) Noto‘g‘ri. Nuqta bahosi har doim ishonch intervalida bo‘ladi va bu nuqta bahosi bilan ishonch intervalidan noto‘g‘ri foydalanishdir (chunki nuqta bahosi dizayn bo‘yicha ishonch intervaliga kiritiladi). (b) To‘g‘ri. (c) Noto‘g‘ri. Ishonch intervali tanlanmaning o‘rtacha qiymati haqida emas. (d) Noto‘g‘ri. Parametrni qamrab olishga ko‘proq ishonch hosil qilish uchun kengroq interval kerak bo‘ladi. Murakkab ko‘lda baliqni ushlashga ko‘proq ishonch hosil qilish uchun katta tarmoqqa ehtiyoj borligini tasavvur qiling. (e) To‘g‘ri. Ixtiyoriy tushuntirish. Bu to‘g‘ri, chunki normal model tanlanmaning o‘rtachani modellashtirish uchun ishlatilgan. Xatolik chegarasi intervalning kengligining yarmi va tanlanmaning o‘rtacha intervalning o‘rtasidir. (f) Noto‘g‘ri. Standart xatolikni hisoblashda standart og‘ish tanlanma hajmining kvadrat ildiziga bo‘linadi. SX (yoki xatolik chegarasi) ni yarmiga qisqartirish uchun dastlabki tanlanmadagi odamlar sonining $2^2 = 4$ marta ko‘pini tanlash kerak.

5.13 (a) Tashrifchilar oddiy tasodifiy tanlanmadan olingan, shuning uchun bog‘liqsizlik sharti bajariladi. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi, chunki 64 va $752 - 64 = 688$ 10 dan yuqori. Shuning uchun, $\hat{p}$ ni modellashtirish va ishonch intervalini qurish uchun normal taqsimotdan foydalanishimiz mumkin. (b) tanlanma ulushi $\hat{p} = \frac{64}{752} = 0{,}085$. Standart xatolik:

$$SX = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \approx \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}085(1-0{,}085)}{752}} = 0{,}010$$

(c) 90% ishonch intervallari uchun, $z^\star = 1{,}6449$ ni ishlating. Ishonch intervali: $0{,}085 \pm 1{,}6449 \times 0{,}010 \rightarrow (0{,}0683; 0{,}1017)$. Biz yangi dizayn bilan birinchi marta saytga tashrif buyuruvchilarning 6,83% dan 10,17% gacha ro‘yxatdan o‘tishiga 90% ishonamiz.

5.15 (a) $H_0 : p = 0{,}5$ (Talabalar baholari yaxshilanganlarining ko‘pchiligi yoki ozchiligi yo‘q) $H_A : p \neq 0{,}5$ (Talabalar baholari yaxshilanganlarining ko‘pchiligi yoki ozchiligi mavjud)
(b) $H_0 : \mu = 15$ (Har bir xodim Mart Madness uchun ishlamaydigan o‘rtacha vaqt 15 daqiqani tashkil etadi.) $H_A : \mu \neq 15$ (Har bir xodim Mart Madness uchun ishlamaydigan o‘rtacha vaqt 15 daqiqadan farq qiladi.)

5.17 (1) Gipotezalar bosh to‘plam ulushi (p) haqida bo‘lishi kerak, tanlanma ulushi haqida emas. (2) Nol gipotezada tenglik belgisi bo‘lishi kerak. (3) Muqobil gipotezada tenglikka qarshi belgi bo‘lishi kerak va (4) u kuzatilgan tanlanma ulushiga emas, nol qiymatga $p_0 = 0{,}6$ ishora qilishi kerak. To‘g‘ri yo‘l bilan gipotezalarni tuzish: $H_0 : p = 0{,}6$ va $H_A : p \neq 0{,}6$.

5.19 (a) Bu da’vo mantiqiy, chunki interval to‘liq 50% dan yuqorida joylashgan. (b) 70% qiymati intervaldan tashqarida, shuning uchun biz tadqiqotchining taxmini noto‘g‘ri ekanligiga ishonchli dalillarimiz bor. (c) 90% ishonch intervali 95%
ishonch intervaliga qaraganda torroq bo‘ladi. Intervalni hisoblamasdan ham, 70% bu intervalga kirmasligini bilamiz, va biz tadqiqotchining taxminini 90% ishonch darajasiga asoslanib ham rad qilamiz.

5.21 (i) Gipotezalarni tuzish. H_0: $p = 0{,}5$, H_A: $p \neq 0{,}5$. Biz $\alpha = 0{,}05$ ahamiyat darajasidan foydalanamiz. (ii) Shartlarni tekshirish: oddiy tasodifiy tanlanma bog‘liksizlikni ta’minlaydi, va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajariladi, chunki $0{,}5 \times 1000 = 500$ har bir guruh uchun kamida 10. (iii) Keyin, hisoblaymiz: $SX = \sqrt{0{,}5(1-0{,}5)/1000} = 0{,}016$. $Z = \frac{0{,}42-0{,}5}{0{,}016} = -5$, bu taxminan 0,000 000 3 bir tomonli maydonni beradi, shuning uchun p-qiymat ikki tomonli maydonning ikki barobariga teng, ya’ni 0,000 000 6. (iv) Xulosa qilish: Chunki p-qiymat $\alpha = 0{,}05$ dan kichik, biz nol gipotezani rad qilamiz va quyidagi xulosaga kelamiz: AQSh kattalarining minimal ish haqini oshirish iqtisodiyotga yordam beradi, degan fikriga ega bo‘lgan ulushi 50% emas. Kuzatilgan qiymat 50% dan kam bo‘lganligi va biz nol gipotezani rad etganimiz sababli, bu fikr AQSh kattalarining 50% dan kamrog‘i tomonidan qo‘llab-quvvatlanadi, degan xulosaga kelishimiz mumkin. (Istisnoda, so‘rov minimal ish haqini o‘zgartirishni qo‘llab-quvvatlashni ham o‘rganadi, bu iqtisodiyotga yordam beradi, degan fikrdan boshqacha savol.)

5.23 Agar p-qiymat 0,05 bo‘lsa, bu test statistikasi $Z = -1{,}96$ yoki $Z = 1{,}96$ ekanligini anglatadi. Hisoblashlarni $Z = 1{,}96$ uchun ko‘rsatamiz. Standart xatolik: $SX = \sqrt{0{,}3(1-0{,}3)/90} = 0{,}048$. Nihoyat,

test statistikasi formulasini tuzing va $\hat{p}$ ni toping: $1{,}96 = \frac{\hat{p}-0{,}3}{0{,}048} \rightarrow \hat{p} = 0{,}394$ Yoki, agar $Z = -1{,}96$ ishlatilsa: $\hat{p} = 0{,}206$.

5.25 (a) H_0: Antidepressantlar Fibromiyalgiya simptomlariga ta'sir qilmaydi. H_A: Antidepressantlar Fibromiyalgiya simptomlariga ta'sir qiladi (yaxshilaydi yoki yomonlashtiradi). (b) Antidepressantlar Fibromiyalgiya simptomlarini yaxshilaydi yoki yomonlashtiradi, degan xulosaga kelish, aslida ular ta'sir qilmasa. (c) Antidepressantlar Fibromiyalgiya simptomlariga ta'sir qilmaydi, degan xulosaga kelish, aslida ular ta'sir qilganda.

5.27 (a) Biz amerikaliklar o'rtacha kuniga 1,38 dan 1,92 soatgacha dam olish yoki o'zlari yoqtirgan faoliyat bilan shug'ullanishlariga 95% ishonamiz. (b) Ularning ishonch darajasi yuqoriroq bo'lishi kerak, chunki ishonch darajasi oshgani sari ishonch intervalining kengligi oshadi. (c) Yangi xatolik chegarasi kichikroq bo'ladi, chunki tanlanmaning hajmi oshgani sari standart xatolik kamayadi, bu esa xatolik chegarasini kamaytiradi.

5.29 (a) H_0: Restoran oziq-ovqat xavfsizligi va sanitariya qoidalariga javob beradi. H_A: Restoran oziq-ovqat xavfsizligi va sanitariya qoidalariga javob bermaydi. (b) Oziq-ovqat xavfsizligi inspektori restoran oziq-ovqat xavfsizligi va sanitariya qoidalariga javob bermaydi, degan xulosaga kelib, restoranni yopadi, aslida restoran xavfsiz bo'lsa. (c) Oziq-ovqat xavfsizligi inspektori restoran oziq-ovqat xavfsizligi va sanitariya qoidalariga javob beradi, deb xulosa qiladi va restoran ochiq qoladi, aslida restoran xavfsiz bo'lmasa. (d) 1-turdagi xatolik restoran egasi uchun ko'proq muammo bo'lishi mumkin, chunki uning restorani oziq-ovqat xavfsizligi va sanitariya qoidalariga javob berganiga qaramay yopiladi. (e) 2-turdagi xatolik ovqatlanayotgan odamlar uchun ko'proq muammo bo'lishi mumkin, chunki inspektor xavfsiz deb hisoblagan restoran aslida xavfsiz emas. (f) Kuchli dalil. Ovqatlanayotgan odamlar qoidalarga javob beradigan restoranning yopilishini, qoidalarga javob bermaydigan restoranning yopilmasligiga qaraganda afzal ko'rishadi.

5.31 (a) $H_0 : p_{unemp} = p_{underemp}$: Ishsiz va ishga yaratilmagan odamlar orasida munosabat muammolariga duch kelish ulushi teng. $H_A : p_{unemp} \neq p_{underemp}$: Ishsiz va ishga yaratilmagan odamlar orasida munosabat muammolariga duch kelish ulushi farqli. (b) Agar aslida ikkita bosh to'plam ulushi teng bo'lsa, tanlanma ulushlari orasida kamida 2% farqni kuzatish ehtimoli taxminan 0,35. Bu yuqori ehtimollik bo'lgani sababli, nol gipotezani rad qila olmaymiz. Ma'lumotlar ishsiz va ishga yaratilmagan odamlar orasidagi munosabat muammolariga ega ulushlarning farqli ekanligi haqida ishonchli dalillar taqdim etmaydi.

5.33 130 ishonch intervalida bo'lganligi sababli, haqiqiy o'rtacha qiymat oziq-ovqat yorlig'ida ko'rsatilganidan farq qiladi, degan ishonchli dalillarimiz yo'q.

5.35 To'g'ri. Agar tanlanma hajmi doimiy ravishda oshib boradigan bo'lsa, standart xatolik kamayadi. Oxir-oqibat, tanlanma hajmi yetarlicha katta bo'lganda va standart xatolik juda kichik bo'lganda, nol qiymat bilan nuqta bahosi orasidagi juda kichik, lekin statistik jihatdan muhim farqlarni topishimiz mumkin (agar ular aniq teng bo'lmasa).

5.37 (a) Aslida biz tekshirmoqchimiz: erkaklar ayollarga qaraganda ko'proq maosh oladimi (yoki aksincha) va bu natijalarni nol gipoteza ostida tasodif bilan kutish mumkin:

$$H_0 : p = 0{,}5 \qquad H_A : p \neq 0{,}5$$

p ni erkaklar ayollarga qaraganda ko'proq maosh olgan hollarning ulushi sifatida belgilaymiz.
(b) Gipoteza testining davomiyligi quyida keltirilgan.

- Bog'liqsizlikni bu yerda tekshirishning yaxshi usuli yo'q, chunki ishlar oddiy tasodifiy tanlanma emas. Biroq, shaxslar har bir ishda bir-biridan bog'liqsiz bo'lgani uchun bog'liqsizlik mantiqiy tuyuladi. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti nol ulushdan foydalanib tekshiriladi: $p_0 n = (1 - p_0)n = 10{,}5$, bu 10 dan katta.
- Tanlanma ulushi SX va test statistikasi hisoblanadi:

$$\hat{p} = 19/21 = 0{,}905$$
$$SX = \sqrt{\frac{0{,}5 \times (1 - 0{,}5)}{21}} = 0{,}109$$
$$Z = \frac{0{,}905 - 0{,}5}{0{,}109} = 3{,}72$$

  Test statistikasi Z ning yuqori quyruq maydoni taxminan 0,0001 ga teng, shuning uchun p-qiymat bu qiymatning 2 barobari: 0,0002.
- Chunki p-qiymat 0,05 dan kichik, biz barcha gender maosh farqlari tasodifga bog'liq, degan fikrni rad qilamiz. Erkaklar yuqori ulushdagi hollarda ko'proq maosh olayotganligini va bu faqat tasodif bilan tushuntirib bo'lmasligini xulosa qilamiz.

6 Kategorik ma'lumotlar uchun chiqindilar

6.1 (a) Noto'g'ri. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartini bajarmaydi. (b) To'g'ri. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilmaydi. Ko'pgina tanlanmalar uchun $\hat{p}$ haqiqiy bosh to'plam ulushi bo'lgan 0,08 ga yaqin bo'lishi kutiladi. $\hat{p}$
0,08 dan ancha yuqori bo'lishi mumkin, lekin 0 dan past bo'lishi mumkin emas, bu esa o'ngga siljigan shaklni keltirib chiqaradi. Tanlanma olish taqsimotini chizish bu gumonni tasdiqlaydi. (c) Noto'g'ri. $SX_{\hat{p}} = 0{,}0243$ va $\hat{p} = 0{,}12$ faqat $\frac{0{,}12-0{,}08}{0{,}0243} = 1{,}65$ SX uzoqlikda bo'ladi, bu esa noodatiy deb hisoblanmaydi. (d) To'g'ri. $\hat{p} = 0{,}12$ o'rtachadan 2,32 standart xatolik uzoqlikda, bu odatda noodatiy hisoblanadi. (e) Noto'g'ri. SX ni $1/\sqrt{2}$ faktoriga kamaytiradi.

6.3 (a) To'g'ri. 6.1(b) dagi mantiqni ko'ring. (b) To'g'ri. SX formulasida tanlanma hajmining kvadrat ildizini olamiz. (c) To'g'ri. bog'liqsizlik va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartlari bajariladi. (d) To'g'ri. Bog'liqsizlik va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartlari bajariladi.

6.5 (a) Noto'g'ri. Ishonch intervali tanlanma ulushini emas, bosh to'plam ulushini baholash uchun qurilgan. (b) To'g'ri. 95% ishonch intervali: 82% ± 2%. (c) To'g'ri. Ishonchlilik darajasi ta'rifi bo'yicha. (d) To'g'ri. tanlanma hajmini to'rt barobar oshirish SX va ME ni $1/\sqrt{4}$ faktoriga kamaytiradi. (e) To'g'ri. 95% ishonch intervali to'liq 50% dan yuqorida.

6.7 Tasodifiy tanlanma bilan bog'liqsizlik sharti bajariladi. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi. $ME = z^\star\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}56\times 0{,}44}{600}} = 0{,}0397 \approx 4\%$

6.9 (a) Yo'q. Tanlanma faqat SAT topshirgan talabalarni ifodalaydi va bu onlayn so'rov edi. (b) (0,5289; 0,5711). Biz SAT topshirgan o'rta maktab bitiruvchilarining 53% dan 57% gacha kollejda chet elda o'qish dasturida qatnashishlariga 90% ishonchdamiz. (c) Shunday tasodifiy tanlanmalarining 90% haqiqiy ulushni o'z ichiga olgan 90% ishonch intervalini hosil qiladi. (d) Ha. Interval to'liq 50% dan yuqorida.

6.11 (a) Biz ko'pchilikni (yoki ozchilikni) tekshirmoqchimiz, shuning uchun quyidagi gipotezalardan foydalanamiz:

$$H_0 : p = 0{,}5 \qquad H_A : p \neq 0{,}5$$

Bizda $\hat{p} = 0{,}55$ tanlanma ulushi va $n = 617$ bog'liksiz respondentlar soni mavjud. Bu tasodifiy tanlanma bo'lgani uchun bog'liksizlik sharti bajariladi. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi: $617 \times 0{,}5$ va $617 \times (1 - 0{,}5)$ har biri kamida 10 ga teng (bu bir ulushli gipoteza testi uchun nol ulush $p_0 = 0{,}5$ bilan tekshiriladi).
Shuning uchun, $\hat{p}$ ni standart xatolik bilan normal taqsimotdan modellashtirishimiz mumkin:

$$SX = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}02$$

(Bir ulushli gipoteza testi uchun standart xatolikni hisoblashda nol ulush $p_0 = 0{,}5$ ishlatiladi.) Keyin, test statistikasini hisoblaymiz:

$$Z = \frac{0{,}55 - 0{,}5}{0{,}02} = 2{,}5$$

Bu 0,0062 bir tomonlama maydonni beradi va p-qiymat $2 \times 0{,}0062 = 0{,}0124$.
Chunki p-qiymat 0,05 dan kichik, biz nol gipotezani rad qilamiz. Biz qo'llab-quvvatlashning 0,5 dan farqli ekanligi haqida kuchli dalilga egamiz va ma'lumotlar 0,5 dan yuqori nuqta bahosini taqdim etganligi sababli, biz TV sharhlovchisining da'vosini qo'llab-quvvatlaymiz.
(b) Yo'q. Odatda, gipoteza testi va ishonch intervali mos kelishini kutamiz, shuning uchun ishonch intervali 0,5 dan yuqori bo'lgan qiymatlar oralig'ini ko'rsatishini kutamiz. Biroq, agar ishonch darajasi mos kelmasa (masalan, 99% ishonch darajasi va $\alpha = 0{,}05$ ahamiyat darajasi), bu holat umumiy qoida bo'lishni to'xtatadi.

6.13 (a) $H_0 : p = 0{,}5$. $H_A : p \neq 0{,}5$. Bog'liqsizlik (tasodifiy tanlanma) bajariladi, shuningdek muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik shartlari ham bajariladi ($p_0 = 0{,}5$ bilan hisoblaganda, 40 muvaffaqiyat va 40 muvaffaqiyatsizlik kutiladi). $Z = 2{,}91 \rightarrow$ bir tomonlama maydon 0,0018, shuning uchun p-qiymat 0,0036. P-qiymat $< 0{,}05$ bo'lgani uchun, nol gipotezani rad qilamiz. Nol gipotezani rad qilganimizdan va nuqta bahosi odamlarning tasodifiy taxmindan yaxshiroq ekanligini ko'rsatganidan, bu odamlarning soda to'g'ri aniqlash ko'rsatkichi oddiy tasodifiy taxmindan sezilarli darajada yaxshiroq ekanligini xulosa qilishimiz mumkin. (b) Agar odamlar diet va oddiy soda o'rtasidagi farqni aniqlay olmasa va ular tasodifiy taxmin qilgan bo'lsa, 80 ta odamdan iborat tasodifiy tanlanmaning 53 tasi yoki undan ko'prog'i soda to'g'ri aniqlagan holatini (53 tasi yoki undan ko'prog'i noto'g'ri aniqlagan holatini) kuzatish ehtimoli 0,0036 bo'ladi.

6.15 tanlanma ulushi ($\hat{p} = 0{,}55$) mavjud bo'lgani uchun, biz tanlanmaning hajm hisob-kitoblari uchun bundan foydalanamiz. 90% ishonch intervalidagi xatolik chegarasi quyidagicha: $1{,}6449 \times SX = 1{,}6449 \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$. Bu 0,01 dan kichik bo'lishini xohlaymiz, bunda p o'rniga $\hat{p}$ ni ishlatamiz:

$$1{,}6449 \times \sqrt{\frac{0{,}55(1-0{,}55)}{n}} \leq 0{,}01,$$
$$1{,}6449^2 \times \frac{0{,}55(1-0{,}55)}{0{,}01^2} \leq n\ .$$

Bundan n kamida 6697 bo'lishi kerakligini olamiz.

6.17 Bu tasodifiylashtirilgan tajriba emas va odamlar o‘z tengdoshlarining xulq-atvori ta’sirida bo‘ladimi yoki yo‘qmi, aniq emas. Bu bog‘liqsizlik sharti bajarilmasligini anglatishi mumkin. Bundan tashqari, 5 ta intervensiya mavjudligi sababli muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilmaydi. Agar biz ulushlarni birlashtirgan gipoteza testini ko‘rib chiqsak ham, muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajarilmaydi. Shartlardan biri shubhali va ikkinchisi bajarilmaganligi sababli, tanlanma ulushlari farqi deyarli normal taqsimotga amal qilmaydi.

6.19 (a) Noto‘g‘ri. Ishonch intervali to‘liq 0 dan yuqorida. (b) To‘g‘ri. (c) To‘g‘ri. (d) To‘g‘ri. (e) Noto‘g‘ri. Bu shunchaki teskari va qayta tartiblangan qiymatlar: (-0,06;-0,02).

6.21 (a) Standart xatolik:

$$SX = \sqrt{\frac{0{,}79(1-0{,}79)}{347} + \frac{0{,}55(1-0{,}55)}{617}} = 0{,}03$$

$z^\star = 1{,}96$ bilan hisoblab chiqamiz:

$$0{,}79 - 0{,}55 \pm 1{,}96 \times 0{,}03 \to (0{,}181;\ 0{,}299).$$

Biz demokratlar rejani qo‘llab-quvvatlash ulushi mustaqillarni qo‘llab-quvvatlash ulushidan 18,1% dan 29,9% gacha yuqori ekaniga 95% ishonamiz. (b) To‘g‘ri.

6.23 (a) Kollej bitiruvchilari: 23,7%. Kollejni tugatmaganlar: 33,7%. (b) p_{CG} va p_{NCG} ni kolleji bitirgan va bitirmaganlarning “bilmayman” deb javob bergan ulushlari sifatida belgilaymiz. H_0 : $p_{CG} = p_{NCG}$. $H_A : p_{CG} \neq p_{NCG}$. bog‘liqsizlik sharti bajariladi (tasodifiy tanlanma), shuningdek birlashtirilgan ulush bilan tekshiriladigan muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ($\hat{p}_{pool} = 235/827 = 0{,}284$) ham bajariladi. $Z = -3{,}18 \to$ p-qiymat $= 0{,}0014$. P-qiymat juda kichik bo‘lgani uchun H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar kollej bitiruvchilarining ushbu masala bo‘yicha fikri yo‘q bo‘lgan ulushi kollejni tugatmaganlarga qaraganda farqli ekanligiga kuchli dalillar beradi. Ma’lumotlar shuningdek, kolleji bitiruvchilar “bilmayman” deb javob bergan ulushi kollejni tugatmaganlarga qaraganda kamroq ekanligini ko‘rsatadi (yani, H_0 ni rad qilganimizdan keyin yo‘nalishni aniqlaymiz).

6.25 (a) Kollej bitiruvchilari: 35,2%. Kollejni tugatmaganlar: 33,9%. (b) p_{CG} va p_{NCG} ni kolleji bitirgan va bitirmaganlarning offshore qazishni qo‘llab-quvvatlagan ulushlari sifatida belgilaymiz. $H_0 : p_{CG} = p_{NCG}$. $H_A : p_{CG} \neq p_{NCG}$. Bog‘liqsizlik sharti bajariladi (tasodifiy tanlanma), shuningdek muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi, bu birlashtirilgan ulush ($\hat{p}_{pool} = 286/827 = 0{,}346$) bilan tekshiriladi. $Z = 0{,}39 \to$ p-qiymat $= 0{,}6966$. P-qiymat $> \alpha$ (0,05) bo‘lgani uchun H_0 ni rad qilmaymiz. Ma’lumotlar Kaliforniyada offshore qazishni qo‘llab-quvvatlovchi kolleji bitirganlar va bitirmaganlar ulushlari o‘rtasida farq mavjudligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar bermaydi.

6.27 Subscript $_C$ nazorat guruhini anglatadi. Subscript $_T$ yuk mashinasi haydovchilarini anglatadi. $H_0 : p_C = p_T$. $H_A : p_C \neq p_T$. bog‘liqsizlik sharti bajariladi (tasodifiy tanlanmalar), shuningdek muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi, bu birlashtirilgan ulush ($\hat{p}_{pool} = 70/495 = 0{,}141$) bilan tekshiriladi. $Z = -1{,}65 \to$ p-qiymat $= 0{,}0989$. P-qiymat yuqori bo‘lgani sababli (odatiy $\alpha = 0{,}05$), H_0 ni rad qilmaymiz. Ma’lumotlar transportdan tashqari ishchilar va yuk mashinasi haydovchilari uchun uyqu tanqisligi darajasi farqli ekanligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar bermaydi.

6.29 (a) Tadqiqotning umumiy ko‘rinishi:

		Virusologik muvaffaqiyatsizlik		
		Ha	Yo‘q	Jami
Davolash	Nevaripin	26	94	120
	Lopinavir	10	110	120
	Jami	36	204	240

(b) $H_0 : p_N = p_L$. Nevaripin va Lopinavir guruhlari o‘rtasida virusologik muvaffaqiyatsizlik ko‘rsatkichlarida farq yo‘q. $H_A : p_N \neq p_L$. Nevaripin va Lopinavir guruhlari o‘rtasida virusologik muvaffaqiyatsizlik ko‘rsatkichlarida farq mavjud. (c) Tasodifiy tayinlash ishlatilgan, shuning uchun har bir guruhdagi kuzatuvlar bog‘liqsiz. Agar tadqiqotdagi bemorlar umumiy bosh to‘plamdagi bemorlarni ifodalasa (berilgan ma’lumotlar bilan tekshirish mumkin emas), biz topilmalarni bosh to‘plamga ishonch bilan umumlashtira olamiz. Birlashtirilgan ulush bilan tekshiriladigan muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ($\hat{p}_{pool} = 36/240 = 0{,}15$) bajariladi. $Z = 2{,}89 \to$ p-qiymat $= 0{,}0039$. P-qiymat past bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad qilamiz. Nevaripin va Lopinavir guruhlari o‘rtasida virusologik muvaffaqiyatsizlik ko‘rsatkichlarida farq mavjudligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar mavjud. Davolash va virusologik muvaffaqiyatsizlik mustaqil emasga o‘xshaydi.

6.31 (a) Noto‘g‘ri. Xi-kvadrat taqsimoti daraja erkinligi deb nomlangan bitta parametrga ega. (b) To‘g‘ri. (c) To‘g‘ri. (d) Noto‘g‘ri. Daraja erkinligi oshgani sayin, Xi-kvadrat taqsimoti shakli yanada simmetrik bo‘lib boradi.

6.33 (a) H_0: Talabalar tomonidan foydalanilgan kitob formati taqsimoti professorning prognozlariga mos keladi. H_A: Talabalar tomonidan foydalanilgan kitob formati taqsimoti professorning prognozlariga mos kelmaydi. (b) $E_{hard\ copy} = 126 \times 0{,}60 = 75{,}6$. $E_{print} = 126 \times 0{,}25 = 31{,}5$. $E_{online} = 126 \times 0{,}15 = 18{,}9$. (c) Bog‘liqsizlik: tanlanma tasodifiy emas. Ammo, agar professor proporsiyalar bir semestrdan boshqasiga barqaror bo‘lganiga ishonsa va talabalar bir-birining o‘rganish odatlariga ta’sir qilmasa, bog‘liqsizlik asosli bo‘lishi mumkin. Tanlanma hajmi: Barcha kutilayotgan hisoblar kamida 5 ga teng. (d) $\chi^2 = 2{,}32$, $ed = 2$, p-qiymat $= 0{,}313$.

(e) P-qiymat katta bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad qilmaymiz. Ma’lumotlar professorning prognozlari statistik jihatdan noto‘g‘ri ekanligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillarni bermaydi.

6.35 (a) Ikki yoqlama jadval:

	Chekishni tashlash		
Davolash turi	Ha	Yo‘q	Jami
Plastir + qo‘llab-quvvatlash guruhi	40	110	150
Faqat plastir	30	120	150
Jami	70	230	300

(b-i) $E_{row_1,col_1} = \frac{(row\ 1\ total)\times(col\ 1\ total)}{table\ total} = 35$. Bu kuzatilgan qiymatdan pastroq.
(b-ii) $E_{row_2,col_2} = \frac{(row\ 2\ total)\times(col\ 2\ total)}{table\ total} = 115$. Bu kuzatilgan qiymatdan pastroq.

6.37 H_0: Kollejni bitirganlar va bitirmaganlarning Kaliforniya sohillarida neft va tabiiy gaz qazib olish bo‘yicha fikrlari farq qilmaydi. H_A: Kaliforniya sohillarida neft va tabiiy gaz qazib olish bo‘yicha fikrlar kollej darajasi olish bilan bog‘liq.

$$E_{row\ 1,col\ 1} = 151{,}5 \qquad E_{row\ 1,col\ 2} = 134{,}5$$
$$E_{row\ 2,col\ 1} = 162{,}1 \qquad E_{row\ 2,col\ 2} = 143{,}9$$
$$E_{row\ 3,col\ 1} = 124{,}5 \qquad E_{row\ 3,col\ 2} = 110{,}5$$

Bog‘liqsizlik: tanlanma tasodifiy, bir-biriga bog‘liq emas va bosh to‘plamning 10% dan kam qismi olingan, shuning uchun kuzatuvlar orasidagi bog‘liqsizlik asosli. Tanlanma hajmi: Barcha kutilayotgan qiymatlar kamida 5. $\chi^2 = 11{,}47$, $ed = 2 \to$ p-qiymat $= 0{,}003$. P-qiymat $< \alpha$ bo‘lgani sababli, H_0 ni rad qilamiz. Neft va tabiiy gaz qazib olishni qo‘llab-quvvatlash hamda kollej darajasiga ega bo‘lish o‘rtasida bog‘liqlik mavjudligini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar bor.

6.39 Yo‘q. Semestr boshidagi va oxiridagi tanlanmalar bog‘liqsiz emas, chunki so‘rov bir xil talabalar ustida o‘tkazilgan.

6.41 (a) H_0: Los-Anjeles aholisi yoshi kema tashuvchi afzallik o‘zgaruvchisiga bog‘liq emas. H_A: Los-Anjeles aholisi yoshi kema tashuvchi afzallik o‘zgaruvchisiga bog‘liq. (b) Shartlar bajarilmagan, chunki ba’zi kutilayotgan qiymatlar 5 dan kichik.

6.43 (a) Bog‘liqsizlik sharti bajariladi (tasodifiy tanlanma), muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti ham bajariladi (40 chekuvchi, 160 chekmaydigan). 95% ishonch intervalidagi qiymatlar: (0,145; 0,255). Biz universitetdagi barcha talabalar orasida 14,5% dan 25,5% gacha chekuvchi borligiga 95% ishonamiz. (b) 95% ishonch darajasi uchun $z^\star SX$ 0,02 dan katta bo‘lmasligi kerak. $z^\star = 1{,}96$ ni ishlatamiz va $\hat{p} = 0{,}2$ ni SX formulasiga qo‘shamiz: $1{,}96\sqrt{0{,}2(1-0{,}2)/n} \le 0{,}02$. tanlanma hajmi n kamida 1537 ga teng bo‘lishi kerak.

6.45 (a) Ushbu universitetni bitirgan va bitirganidan bir yil o‘tmay ish topganlarning ulushi. $\hat{p} = 348/400 = 0{,}87$. (b) Bu tasodifiy tanlanma, shuning uchun kuzatuvlar bog‘liqsiz. Muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajariladi: 348 tasi muvaffaqiyatli, 52 tasi esa muvaffaqiyatsizlik, har ikkalasi ham 10 dan ancha yuqori. (c) (0,8371; 0,9029). Biz 95% ishonamizki, ushbu universitetni bitirganlarning taxminan 84% dan 90% gacha bakalavr darajasini olganidan bir yil o‘tmay ish topadi. (d) Shunday tasodifiy tanlanmalarining 95% haqiqiy ulushni o‘z ichiga olgan 95% ishonch intervalini hosil qiladi. (e) (0,8267; 0,9133). Oldingidek tushuntirish. (f) 99% ishonch intervali kengroq, chunki haqiqiy ulush intervalda ekanligiga ishonchli bo‘lish uchun kengroq diapazonni qamrab olish kerak.

6.47 Xi-kvadrat moslik sinovidan foydalaning. H_0: Har bir variant bir xil ehtimolga ega. H_A: Ba’zi variantlar boshqalarga nisbatan afzalroqdir. Jami tanlanma hajmi: 99. Kutilayotgan qiymatlar: (1/3)*99 = 33 har bir variant uchun. Bularning barchasi 5 dan yuqori, shuning uchun shartlar bajariladi. $ed = 3 - 1 = 2$ va $\chi^2 = \frac{(43-33)^2}{33} + \frac{(21-33)^2}{33} + \frac{(35-33)^2}{33} = 7{,}52 \to$ p-qiymat $= 0{,}023$. P-qiymat 5% dan kam bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar ba’zi variantlarning boshqalarga nisbatan afzalroq ekanligini ko‘rsatuvchi ishonchli dalillarni beradi.

6.49 (a) $H_0 : p = 0{,}38$. $H_A : p \neq 0{,}38$. Bog‘liqsizlik sharti (tasodifiy tanlanma) va muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti bajariladi. $Z = -20{,}5 \to$ p-qiymat ≈ 0. P-qiymat juda kichik bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar amerikaliklarning faqat mobil telefonlaridan foydalanib internetga kirish ulushi Xitoydagi 38% ulushdan farq qilishi va ma’lumotlar AQShda bu ulush pastroq ekanligini ko‘rsatadi. (b) Agar haqiqatan ham 38% amerikaliklar internetga kirish uchun faqat mobil telefonlaridan foydalansa, 2254 ta amerikalikdan iborat tasodifiy tanlanmaning 17% yoki undan kam, yoki 59% yoki undan ko‘proq faqat mobil telefonidan foydalangan holda internetga kirishi ehtimoli taxminan 0 ga teng bo‘ladi. (c) (0,1545; 0,1855). Biz amerikaliklarning taxminan 15,5% dan 18,6% gacha faqat mobil telefonlaridan foydalangan holda internetga kirishiga 95% ishonamiz.

7 Sonli ma’lumotlar uchun chiqindilar

7.1 (a) $ed = 6-1 = 5$, $t^\star_5 = 2{,}02$ (ikki dumli 0,10 ustuni, $ed = 5$ qatori). (b) $ed = 21-1 = 20$; $t^\star_{20} = 2{,}53$ (ikki dumli 0,02 ustuni, $ed = 20$ qatori). (c) $ed = 28$; $t^\star_{28} = 2{,}05$. (d) $ed = 11$; $t^\star_{11} = 3{,}11$.

7.3 (a) 0,085, H_0 ni rad qilmaymiz. (b) 0,003; H_0 ni rad qilamiz. (c) 0,438; H_0 ni rad qilmaymiz. (d) 0,042; H_0 ni rad qilamiz.

7.5 O‘rtacha qiymat markaziy nuqta: $\bar{x} = 20$. Xatolik chegarasini aniqlang: $ME = 1{,}015$ keyin $t^\star_{35} = 2{,}03$ va $SX = s/\sqrt{n}$ ni xatolik formulasida ishlatib,

$s = 3$ ni aniqlang.

7.7 (a) H_0: $\mu = 8$ (Nyu-Yorkliklar o‘rtacha 8 soat uxlashadi.) H_A: $\mu \neq 8$ (Nyu-Yorkliklar o‘rtacha 8 soatdan ko‘p yoki kam uxlashadi.) (b) bog‘liqsizlik: tanlanma tasodifiy. Minimal/maksimal qiymatlar tashvishli chiqib ketmalar yo‘qligini ko‘rsatadi. $T = -1{,}75$. $ed = 25 - 1 = 24$. (c) p-qiymat = 0,093. Agar haqiqiy bosh to‘plam o‘rtachasi Nyu-Yorkliklar kechasi o‘rtacha 8 soat uxlashini ko‘rsatsa, 25 Nyu-Yorklikdan iborat tasodifiy tanlanmada 7,73 soatdan kam yoki 8,27 soatdan ko‘p bo‘lgan uyqu miqdorini olish ehtimoli 0,093 ga teng. (d) Chunki p-qiymat $> 0{,}05$ H_0 ni rad qilmaymiz. Ma’lumotlar Nyu-Yorkliklar kechasi o‘rtacha 8 soatdan ko‘p yoki kam uxlashini ko‘rsatuvchi kuchli dalillar bermaydi. (e) Yo‘q, chunki p-qiymat $1 - 0{,}90 = 0{,}10$ dan kichik.

7.9 T -2,09 yoki 2,09 bo‘lishi mumkin. Shunda $\bar{x}$ quyidagilardan biri bo‘ladi:

$$-2{,}09 = \frac{\bar{x} - 60}{\frac{8}{\sqrt{20}}} \rightarrow \bar{x} = 56{,}26$$

$$2{,}09 = \frac{\bar{x} - 60}{\frac{8}{\sqrt{20}}} \rightarrow \bar{x} = 63{,}74$$

7.11 (a) Biz 1-tanlanmali t-sinovni o‘tkazamiz. H_0: $\mu = 5$. H_A: $\mu \neq 5$. $\alpha = 0{,}05$ ni ishlatamiz. Bu tasodifiy tanlanma, shuning uchun kuzatuvlar bog‘liqsiz. Davom etish uchun pianino darslari yillari taqsimoti taxminan normal ekanligini faraz qilamiz. $SX = 2{,}2/\sqrt{20} = 0{,}4919$. Sinov statistikasi $T = (4{,}6 - 5)/SX = -0{,}81$. $ed = 20 - 1 = 19$. Bir quyruqli sohaning yuzasi taxminan 0,21 shuning uchun p-qiymat taxminan 0,42 ga teng bu esa $\alpha = 0{,}05$ dan katta va H_0 ni rad qilmaymiz. Bu shuni anglatadiki, o‘rtacha qiymat 5 yil ekanligini rad qilish uchun yetarlicha asosli dalillar yo‘q.
(b) $SX = 0{,}4919$ va $t^\star_{ed=19} = 2{,}093$ ni ishlatib, ishonch intervali (3,57; 5,63) bo‘ladi. Biz pianino darslari uchun bolalar o‘rtacha yillari 3,57 dan 5,63 yilgacha ekanligiga 95% ishonamiz.
(c) Ular mos keladi, chunki biz nol gipotezani rad qilmadik va nol qiymati (5) t-intervalidan o‘tgan.

7.13 Agar tanlanma katta bo‘lsa, xatolik chegarasi taxminan $1{,}96 \times 100/\sqrt{n}$ ga teng bo‘ladi. Bu qiymat 10 dan kichik bo‘lishini xohlaymiz, bu esa $n \geq 384{,}16$ ga olib keladi, ya’ni tanlanmaning hajmi kamida 385 bo‘lishi kerak (tanlanma hajmini hisoblash uchun yuqoriga yaxlitlang!).

7.15 Juftlangan, ma’lumotlar bir xil shaharlarda ikki xil vaqtda yozib olingan. Shahardagi harorat bir vaqtda boshqasidan bog‘liqsiz emas.

7.17 (a) Chunki bu semestr boshidagi va oxiridagi bir xil talabalar, ularning boshida va oxirida olgan baholari bir-biriga bog‘liq. (b) Mavzular tasodifiy tanlanganligi sababli, erkaklar guruhidagi har bir kuzatuvning boshqa (ayollar) guruhidagi kuzatuv bilan alohida bog‘liqligi yo‘q. (c) Chunki bu bir xil mavzular semestr boshida va oxirida, ular arteriyalar qalinligi bo‘yicha ma’lumotlar bir-biriga bog‘liq. (d) Chunki bu bir xil mavzular semestr boshida va oxirida, ularning vazni bo‘yicha ma’lumotlar bir-biriga bog‘liq.

7.19 (a) Bitta ma’lumot to‘plamidagi har bir kuzatuv, boshqa ma’lumot to‘plamidagi xuddi shu geografik joylashuv uchun aynan bitta alohida mos kuzatuvga ega. Ma’lumotlar juftlangan. (b) H_0 : $\mu_{\text{diff}} = 0$ (1948 va 2018 yillar uchun NOAA stansiyalarida 90°F dan oshgan kunlarning o‘rtacha sonida farq yo‘q.) H_A : $\mu_{\text{diff}} \neq 0$ (Farq mavjud.) (c) Joylar tasodifiy tanlangan, shuning uchun bog‘liqsizlik asosli. Tanlanma hajmi kamida 30 ga teng, shuning uchun biz faqat ekstremal chiqib ketmalarni izlayapmiz: mavjud emas (gistogrammada chap tomondagi kuzatuv ochiq chiqib ketma deb qaraladi, lekin ayniqsa ekstremal emas). Shuning uchun, shartlar bajariladi. (d) $SX = 17{,}2/\sqrt{197} = 1{,}23$. $T = \frac{2{,}9-0}{1{,}23} = 2{,}36$ daraja erkinligi $ed = 197 - 1 = 196$. Bu 0,0096 quyruqli sohaga olib keladi va p-qiymati taxminan 0,019. (e) P-qiymati 0,05 dan kichik bo‘lganligi sababli, H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar NOAA stansiyalarida 2018 yilda 1948 ga qaraganda ko‘proq 90°F kunlari kuzatilganligini ko‘rsatuvchi asosli dalillarni beradi. (f) I tur xato (Type 1 Error), chunki biz H_0 ni noto‘g‘ri rad etgan bo‘lishimiz mumkin. Bu xato NOAA stansiyalari aslida kamayishni kuzatmagan bo‘lishi mumkinligini ammo biz olgan tanlanma tasodifan kamayish mavjuddek ko‘rsatganini anglatadi. (g) Yo‘q, chunki biz nol gipotezani (H_0) rad etdik va uning nol qiymati 0 ga teng edi.

7.21 (a) $SE = 1{,}23$ va $t^\star = 1{,}65$. $2{,}9 \pm 1{,}65 \times 1{,}23 \rightarrow$ (0,87; 4,93).
(b) Biz 90% ishonch bilan aytamizki, 2018-yilda 1948-yilga nisbatan NOAA stansiyalarida 90°F ga yetgan kunlarning o‘rtacha soni 0,87 dan 4,93 gacha oshgan.
(c) Ha, chunki interval to‘liq 0 dan yuqorida joylashgan.

7.23 (a) Ushbu ma’lumotlar juftlangan. Masalan, 1991-yil sentabr oyidagi 13-juma, ehtimol, 1991-yil sentabr oyidagi 6-jumaga boshqa oy yoki yilning 6-jumasiga qaraganda yaqinroq bo‘ladi.
(b) Let $\mu_{diff} = \mu_{oltinchi} - \mu_{o'n\ uchinchi}$. $H_0 : \mu_{diff} = 0$. $H_A : \mu_{diff} \neq 0$.
(c) Bog‘liqsizlik: Tanlangan oylar tasodifiy emas. Ammo, agar ushbu sanalarni barcha 6-juma va 13-juma juftliklari tasodifiy tanlanmasi deb hisoblasak, bog‘liqsizlik asosli bo‘lishi mumkin. Davom etish uchun biz ushbu asosli taxminni qabul qilishimiz kerak, ammo natijalarni hisoblashda ushbu taxminni e’tiborga olish lozim. Normal taqsimot: Agar kuzatuvlar soni 10 dan kam bo‘lsa, aniq chiqib ketmalarni kuzatsak xavotirga tushishimiz mumkin. Farqlar gistogrammasining o‘ng tomonida chegara

chiqib ketma bor, shuning uchun bu holatni rasmiy tahlil natijalarida qayd etish kerak.
(d) $T = 4{,}93$ uchun $ed = 10 - 1 = 9 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}001$.
(e) Chunki p-qiymat $< 0{,}05$ H_0 ni rad qilamiz. Ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, 6-juma kuni chorrahadan o'tgan o'rtacha avtomobillar soni 13-juma kuniga qaraganda yuqori. (Bu talqinlarni barcha chorrahalarga yoki yo'llarga umumlashtirishda ehtiyot bo'lish kerak.)
(f) Agar 6-juma va 13-juma kunlari chorrahadan o'tgan avtomobillar soni haqiqatda bir xil bo'lsa, sinov statistikasi nolga nisbatan shunchalik uzoq bo'lgan natijani kuzatish ehtimoli 0,01 dan kichik bo'ladi.
(g) Biz 1-turdagi xatoga yo'l qo'ygan bo'lishimiz mumkin, ya'ni nol gipotezani noto'g'ri rad qilgan bo'lishimiz mumkin.

7.25 (a) $H_0 : \mu_{diff} = 0$. $H_A : \mu_{diff} \neq 0$. $T = -2{,}71$. $ed = 5$. p-qiymat $= 0{,}042$. p-qiymat $< 0{,}05$ bo'lgani uchun H_0 ni rad qilamiz. Ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, 6-juma va 13-juma kunlari yo'l-transport hodisalari bilan bog'liq shoshilinch yordamga murojaatlar sonining o'rtacha miqdori turlicha. Shuningdek, ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, 6-juma kuni hodisalar soni 13-juma kuniga qaraganda kamroq.
(b) (-6,49; -0,17).
(c) Bu kuzatuv tadqiqoti bo'lib, eksperiment emas, shuning uchun bu bayonotdan kelib chiqadigan sababiy aralashuvni osonlik bilan aniqlay olmaymiz. To'g'ri, farq mavjud. Biroq, masalan, bu mas'uliyatli kattalar 13-juma kuni tashqariga chiqsa, boshqa kechalarga qaraganda katta xavf ostida bo'ladi degani emas.

7.27 (a) Linsid (inglizcha: linseed) bilan oziqlangan tovuqlar o'rtacha 218,75 gramm vaznga ega bo'lishgan, otbo'yin (inglizcha: horsebean) bilan oziqlanganlar esa o'rtacha 160,20 gramm vaznga ega bo'lishgan. Ikkala taqsimot ham nisbatan simmetrik bo'lib, aniq chiqib ketmalar yo'q. Linsid bilan oziqlangan tovuqlar vaznida ko'proq o'zgaruvchanlik mavjud.
(b) $H_0 : \mu_{lin} = \mu_{otb}$. $H_A : \mu_{lin} \neq \mu_{otb}$.
Shartlarni ko'rib chiqishni sizga qoldiramiz.
$T = 3{,}02$, $ed = min(11, 9) = 9 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}014$. p-qiymat $< 0{,}05$ bo'lgani uchun H_0 ni rad qilamiz. Ma'lumotlar linsid va otbo'yin bilan oziqlangan tovuqlar vaznining o'rtacha miqdorida ahamiyatli farq mavjudligini ko'rsatadi.
(c) 1-turdagi xato, chunki biz H_0 ni rad qildik.
(d) Ha, chunki p-qiymat $> 0{,}01$, biz H_0 ni rad qilmagan bo'lardik.

7.29 $H_0 : \mu_C = \mu_S$. $H_A : \mu_C \neq \mu_S$. $T = 3{,}27$, $ed = 11 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}007$. p-qiymat $< 0{,}05$ bo'lgani uchun H_0 ni rad qilamiz. Ma'lumotlar kazein bilan oziqlangan tovuqlar vazni soya bilan oziqlangan tovuqlar vazniga nisbatan turli ekanligini ko'rsatadi (kazein bilan oziqlanganlarning vazni yuqoriroq). Bu tasodifiy eksperiment bo'lgani uchun kuzatilgan farq ratsionga bog'liq bo'lishi mumkin.

7.31 $\mu_{diff} = \mu_{pre} - \mu_{post}$ deb olamiz. $H_0 : \mu_{diff} = 0$: Davolash (treatment) hech qanday ta'sir ko'rsatmaydi. $H_A : \mu_{diff} \neq 0$: Davolash P.D.T. ballariga ijobiy yoki salbiy ta'sir ko'rsatadi. Shartlar: Ishtirokchilar tasodifiy ravishda davolash guruhlariga taqsimlangan, shuning uchun guruh ichida ham, guruhlar orasida ham bog'liqsizlik sharti bajarilgan. Uchala tanlama hajmi ham 30 dan kichik, shuning uchun aniq ajralib turuvchi (outlier) qiymatlarni tekshiramiz. Birinchi davolash guruhida chegaraviy (borderline) outlier mavjud. U chegaraviy bo'lgani sababli tahlilni davom ettiramiz, lekin natijalarni bayon qilayotganda bu cheklovni albatta qayd etishimiz kerak. Uchta guruh uchun: $ed = 13$. $T_1 = 1{,}89 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}081$, $T_2 = 1{,}35 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}200$, $T_3 = -1{,}40 \rightarrow$ p-qiymat $= 0{,}185$. Biz hech bir guruh uchun nol gipotezani rad qilmaymiz. Yuqorida ta'kidlanganidek, birinchi guruh uchun qo'llanilgan usul mantiqiy ekanligi borasida ba'zi noaniqliklar mavjud.

7.33 Bizni qiziqtirgan farq: 40 ga teng. 90% uchun bir quyruq: $1{,}28 \times SX$. Rad etish mintaqasi chegaralari: $\pm 1{,}96 \times SX$ (agar 5% ahamiyat darajasi bo'lsa). $3{,}24 \times SX = 40$ ni o'rnatib, $SX = \sqrt{\frac{94^2}{n} + \frac{94^2}{n}}$ ni qo'yib va tanlanma hajmini n hisoblab, har bir o'g'it uchun 116 ta yer uchastkasini beradi.

7.35 Muqobil.

7.37 H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_6$. H_A: O'rtacha vazn ba'zi (yoki barcha) guruhlarda farq qiladi. Bog'liqsizlik: Jo'jalar ozuqa turlari bo'yicha tasodifiy tanlangan (ehtimol, bir-biridan ajratilgan), shuning uchun kuzatuvlarning bog'liqsizligi asosli. Taxminiy normal: har bir ozuqa turi bo'yicha vazn taqsimotlari nisbatan simmetrik. Doimiy dispersiya: Yonma-yon box-plotlarga asoslanib, doimiy dispersiya taxmini asosli ko'rinadi. Haqiqiy standart chetlashuvlardagi farqlar mavjud, lekin bu kichik tanlanmalar bo'lgani uchun tasodif bilan izohlanishi mumkin. $F_{5,65} = 15{,}36$ va p-qiymat taxminan 0. Bunday kichik p-qiymat bilan biz H_0 ni rad qilamiz. Ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, jo'jalar ozuqa turlari bo'yicha o'rtacha vazni ba'zi (yoki barcha) guruhlarda farq qiladi.

7.39 (a) H_0: Har bir guruh uchun MET ko'rsatkichining bosh to'plam o'rtachasi boshqa guruhlarnikiga teng. H_A: Kamida bitta juft o'rtacha qiymatlar o'zaro farq qiladi.
(b) Bog'liqsizlik: Ma'lumotlar qanday yig'ilgani haqida ma'lumot yo'q, shuning uchun bog'liqsizlikni baholay olmaymiz. Davom etish uchun har bir guruhdagi ishtirokchilar bog'liqsiz deb faraz qilamiz. Amalda esa qo'shimcha ma'lumot so'rash zarur

bo‘ladi. Normallik: Ma’lumotlar pastdan nol bilan chegaralangan va standart og‘ishlar o‘rtacha qiymatlardan katta, bu esa juda asosli og‘ish (skewness) borligini ko‘rsatadi. Biroq tanlanma hajmlari juda katta bo‘lgani sababli, hatto asosli og‘ish ham qabul qilinadi.
Dispersiyalarning tengligi: Bu shart yetarli darajada bajarilgan, chunki standart og‘ishlar guruhlar bo‘yicha deyarli bir xil.
(c) Quyida keltirilgan (oxirgi ustun kiritilmagan):

	ed	Kvadratlar yig‘indisi	O‘rtacha O‘ kvadrat	F qiymat
coffee	4	10508	2627	5,2
Qoldiqlar	50734	25564819	504	
Jami	50738	25575327		

(d) p-qiymat juda kichik bo‘lgani sababli H_0 rad etiladi. Ma’lumotlar kamida bitta guruh juftligi o‘rtacha MET qiymatlari o‘zaro farq qilishini ishonchli tarzda ko‘rsatadi.

7.41 (a) H_0: O‘rtacha GPA barcha yo‘nalishlar uchun bir xil. H_A: Kamida bir juftlikning o‘rtacha qiymatlari farq qiladi. (b) Chunki p-qiymat $> 0{,}05$ H_0 ni rad qilmaymiz. Ma’lumotlar uchta yo‘nalish guruhi bo‘yicha o‘rtacha GPA o‘rtasida farq borligini isbotlaydigan dalil taqdim etmaydi. (c) Umumiy erkinlik darajasi $195 + 2 = 197$ shuning uchun tanlanmaning hajm $197 + 1 = 198$.

7.43 (a) Noto‘g‘ri. Guruhlar soni oshgani sayin taqqoslashlar soni ham oshadi, shuning uchun o‘zgartirilgan ahamiyat darajasi kamayadi. (b) To‘g‘ri. (c) To‘g‘ri. (d) Noto‘g‘ri. Tanlanmaning hajmdan qat’iy nazar kuzatuvlar bog‘liqsiz bo‘lishi kerak.

7.45 (a) H_0: O‘rtacha ball farqi barcha davolash usullari uchun bir xil. H_A: Kamida bir juftlikning o‘rtacha qiymatlari farq qiladi. (b) Shartlarni tekshirishimiz kerak. Oldingi mashqni eslasak, bemorlar tasodifiy tanlangan, shuning uchun bog‘liqsizlik ta’minlangan. Uchinchi guruhda og‘ish bilan bog‘liq kichik muammolar mavjud, ammo bu maqbul bo‘lishi mumkin. Guruhlar o‘rtasidagi standart og‘ishlar o‘xshash. P-qiymat 0.05 dan kichik bo‘lgani uchun, H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar davolash usullari orasida o‘rtacha ballning kamayishi o‘rtasida farq borligini isbotlaydi. (c) Biz (b)-qismda kamida ikki o‘rtacha qiymat farq qilishini aniqladik, shuning uchun biz endi $K = 3 \times 2/2 = 3$ juftlik t-testlarni o‘tkazamiz, har biri $\alpha = 0{,}05/3 = 0{,}0167$ ahamiyat darajasidan foydalanadi. Har bir juftlik testi uchun quyidagi gipotezalardan foydalaning. H_0: Ikki o‘rtacha qiymat teng. H_A: Ikki o‘rtacha qiymat farq qiladi. tanlanma o‘lchamlari teng va biz birlashtirilgan SD ni ishlatamiz, shuning uchun $SX = 3{,}7$ ni $ed = 39$ bilan hisoblashimiz mumkin. Trmt 1 va Trmt 3 uchun p-qiymat 0,05 dan kichik: p-qiymat = 0,035 (yoki s_{pooled} dan foydalanib 0,024, lekin bu yakuniy xulosaga ta’sir qilmaydi). P-qiymat $0{,}05/3 = 1{,}67$ dan katta, shuning uchun bu juftlikning aniq farqlanishini aniqlash uchun yetarlicha kuchli dalil yo‘q. Demak, barcha guruhlar bir xil emas degan tushunchani rad qilgan bo‘lsak ham, qaysi guruhlar aniq farq qilishini aniqlay olmaymiz!

7.47 $H_0 : \mu_T = \mu_C$. $H_A : \mu_T \neq \mu_C$. $T = 2{,}24$, $ed = 21 \rightarrow$ p-qiymat = 0,036. P-qiymat $< 0{,}05$ bo‘lgani uchun, H_0 ni rad qilamiz. Ma’lumotlar davolash va nazorat guruhlari orasidagi o‘rtacha oziq-ovqat iste’moli farq qilishini isbotlaydi. Bundan tashqari, ma’lumotlar chalg‘itilgan ovqatlanish (davolash) guruhidagi bemorlar nazorat guruhidagilarga qaraganda ko‘proq oziq-ovqat iste’mol qilishlarini ko‘rsatadi.

7.49 Noto‘g‘ri. To‘g‘ri, juftlik tahlili teng tanlanma o‘lchamlarini talab qiladi, lekin faqat teng tanlanma o‘lchamlariga ega bo‘lish juftlik testini amalga oshirish uchun yetarli emas. Juftlik testlari ikki guruhdagi har bir juft kuzatuvlar o‘rtasida maxsus bog‘lanishni talab qiladi.

7.51 (a) Biz tanlanmaning statistikalar taqsimotini qurmoqdamiz, bu holda bu tanlanmaning o‘rtacha qiymat. Bunday taqsimot tanlanmaning taqsimot deb ataladi. (b) Chunki biz tanlanmaning o‘rtacha qiymatlar taqsimoti bilan ishlayapmiz, biz markaziy limit teorema amal qilish yoki qilmasligini tekshirishimiz kerak. Bizning tanlanmamiz hajmi 30 dan katta va tasodifiy tanlov qo‘llanilganligi aytilgan. Ushbu shartlar bajarilgan holda, tanlanmaning o‘rtacha qiymat taqsimoti deyarli normal va simmetrik bo‘ladi. (c) Chunki biz tanlanmaning taqsimot bilan ishlayapmiz, uning o‘zgaruvchanligini standart xatolik bilan o‘lchaymiz. $SX = 18{,}2/\sqrt{45} = 2{,}713$. (d) tanlanmaning kichikroq hajmi bilan tanlanmaning o‘rtacha qiymatlar ko‘proq o‘zgaruvchan bo‘ladi.

7.53 (a) Biz 1,0% ni 2,8 standart xatolik bilan tenglashtirishimiz kerak: $2{,}8 \times SX_{desired} = 1{,}0\%$ (80 foizlik kuch uchun tanlanmaning o‘lcham bo‘yicha 262-betdagi 7.37-misolga qarang). Bu standart xatolik taxminan $SX = 0.36\%$ bo‘lishi kerakligini anglatadi kutilgan statistik kuchga erishish uchun.
(b) Xatolik marjasi $0{,}5 \times (2{,}6\% - (-0{,}2\%)) = 1{,}4\%$, shuning uchun tajribadagi standart xatolik $1{,}96 \times SX_{original} = 1{,}4\% \rightarrow SX_{original} = 0{,}71\%$.
(c) Standart xatolik tanlanmaning o‘lchamning kvadrat ildizi bilan kamayadi, shuning uchun biz tanlanmaning o‘lchamni $1{,}97^2 = 3{,}88$ marta oshirishimiz kerak.
(d) Jamoa tajribani 3,88 marta kattaroq hajmda amalga oshirishi kerak, shuning uchun yangi tajriba guruhlarida foydalanuvchilarning har birida 3,88 foizlik tasodifiy tanlanma bo‘lishi kerak.

7.55 Bog‘liqsizlik: bu tasodifiy tanlov, shuning uchun biz tanlanmadagi talabalar o‘zaro bog‘liqsiz deb taxmin qilishimiz mumkin, ular biror eksklyuziv munosabatlar soniga nisbatan. Diqqat qilish kerakki, tanlanmada hech qanday eksklyuziv munosabatlarda bo‘lmagan talabalar yo‘q, bu esa ba’zi ta-

labalar javoblari ehtimol yo‘qolganligini ko‘rsatadi (balki faqat ijobiy qiymatlar xabar qilingan bo‘lishi mumkin). Tanlanmaning hajmi kamida 30 ga teng va hech qanday juda ekstremal chetdan chiqishlar yo‘q, shuning uchun normal taqsimot sharti maqbul. 90% IS: (2,97; 3,43). Biz 90% ishonch bilan ayta olamizki, bakalavr talabalari o‘rtacha 2,97 dan 3,43 gacha eksklyuziv munosabatlarda bo‘lganlar.

7.57 Gipotezalar bosh to‘plam o‘rtacha qiymati (μ) haqida bo‘lishi kerak, tanlanma o‘rtacha qiymati haqida emas. Nol gipotezada tenglik belgisi bo‘lishi kerak va muqobil gipoteza nol gipotezaga nisbatan qiymat haqida bo‘lishi kerak, kuzatilgan tanlanma o‘rtacha qiymati haqida emas. To‘g‘rilash:

$$H_0 : \mu = 10 \; soat$$
$$H_A : \mu \neq 10 \; soat$$

Ikki tomonlama test ma’lumotlar bizni hayratga soladigan natijalarni ko‘rsatishi mumkinligini hisobga olish imkonini beradi.

8 Kirish: Chiziqli Regressiya

8.1 (a) Qoldiq grafigi qoldiqlarning 0 atrofida tasodifiy taqsimlanganligini ko‘rsatadi. Dispersiya ham taxminan barqaror. (b) Qoldiqlar fan shaklini ko‘rsatadi, bunda kichik x uchun o‘zgaruvchanlik yuqori bo‘ladi. O‘ng tarafda chiziqdan yuqorida ko‘plab nuqtalar mavjud bo‘ladi. Bu yerda modelni moslashda muammo bor.

8.3 (a) Asosli bog‘lanish ammo ma’lumotlarga to‘g‘ri chiziq mos kelmaydi. (b) Asosli bog‘lanish va chiziqli moslashish o‘rinli bo‘ladi. (c) Zaif bog‘lanish va chiziqli moslashishni sinab ko‘rish o‘rinli bo‘ladi. (d) O‘rtacha bog‘lanish ammo ma’lumotlarga to‘g‘ri chiziq mos kelmaydi. (e) Asosli bog‘lanish va chiziqli moslashish o‘rinli bo‘ladi. (f) Asossiz bog‘lanish va chiziqli moslashishni sinab ko‘rish o‘rinli bo‘ladi.

8.5 (a) 2-imtihon, chunki yakuniy imtihon bahosi va 2-imtihon orasidagi grafikda tarqoq nuqtalar kamroq. Yakuniy imtihon va 1-imtihon o‘rtasidagi bog‘lanish biroz chiziqli emasdek tuyuladi. (b) 2-imtihon va yakuniy imtihon bir-biriga vaqt bo‘yicha yaqinroq, yoki 2-imtihon umumlashtirilgan bo‘lib, yakuniy imtihon materiallari bilan ko‘proq o‘xshashlikka ega bo‘lishi mumkin. Javoblar farq qilishi mumkin.

8.7 (a) $r = -0{,}7 \rightarrow$ (4). (b) $r = 0{,}45 \rightarrow$ (3). (c) $r = 0{,}06 \rightarrow$ (1). (d) $r = 0{,}92 \rightarrow$ (2).

8.9 (a) Bog‘lanish ijobiy, zaif va ehtimol chiziqli. Ammo, chap tomonda ayrim g‘ayrioddiy kuzatishlar mavjud, bir nechta talabalar balandliklari bir xil bo‘lib, qolgan nuqtalar bulutidan sezilarli darajada uzoq. Bundan tashqari, ko‘plab talabalar mashina haydamagan ko‘rinadi va ular grafikning pastki qismida joylashgan nuqtalar to‘plami bilan tasvirlangan. (b) Faqat baland bo‘lish odamni tezroq haydashga olib kelishi kerak ekanligiga hech qanday aniq tushuntirish yo‘q. Ammo, bir confounding omil bu jinsdir. Erkaklar odatda ayollardan balandroq bo‘lishadi va shaxsiy tajribalar (anekdotik) ular tezroq haydashini ko‘rsatishi mumkin. Agar biz bu gumonni kuzatsak, sotsiologik tadqiqotlar bu gumonni tasdiqlaydi. (c) Erkaklar odatda balandroq va ular tezroq haydashadi. Jins o‘zgaruvchisi haqiqatan ham muhim confounding o‘zgaruvchi hisoblanadi.

8.11 (a) Sayohat masofasi va vaqt o‘rtasida zaif, ijobiy, ehtimol chiziqli bog‘lanish mavjud. Pastki chap burchakda to‘planish bor, bu holatga alohida e’tibor qaratishimiz kerak. (b) o‘lchov birliklarini o‘zgartirish ikki o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanish shakli, yo‘nalishi yoki kuchiga ta’sir qilmaydi. Agar uzun masofalar milyalarda o‘lchanganida uzunroq vaqt talab qilsa, kilometrlarda o‘lchangan uzun masofalar soatlarda o‘lchanadigan uzoqroq vaqt bilan bog‘liq bo‘ladi. (c) Birliklarni o‘zgartirish korrelyatsiyaga ta’sir qilmaydi: $r = 0{,}636$.

8.13 (a) Yelkadan o‘lchangan aylana va bo‘y o‘rtasida o‘rtacha, ijobiy va chiziqli bog‘lanish mavjud. (b) Birliklarni o‘zgartirish, hatto faqat bitta o‘zgaruvchida bo‘lsa ham, ikki o‘zgaruvchi orasidagi bog‘lanish shakli, yo‘nalishi yoki kuchiga ta’sir qilmaydi.

8.15 Har bir qismda er yoshini xotin yoshining chiziqli funksiyasi sifatida yozishimiz mumkin.
(a) $age_H = age_W + 3$.
(b) $age_H = age_W - 2$.
(c) $age_H = 2 \times age_W$.
Tuzilmalar ijobiy bo‘lganligi sababli va bu mukammal chiziqli bog‘lanish bo‘lganligi sababli, barcha uch qismda korrelyatsiya aynan 1 ga teng bo‘ladi. Bu yechimni tushunish uchun yana bir usul bu misol ma’lumot to‘plamini yaratishdir. Masalan: 26, 27, 28, 29 va 30 yoshdagi 5 ayol, keyin har bir qism uchun er yoshlarini topish va grafik yaratish.

8.17 Korrelyatsiya: birliklar yo‘q. Intercept: kg. Slope: kg/sm.

8.19 Haddan tashqari baholash. Qoldiq *observed* − *predicted* sifatida hisoblanganligi sababli, salbiy qoldiq bashorat qilingan qiymat kuzatilgan qiymatdan yuqori ekanligini anglatadi.

8.21 (a) Turistlar soni va sarflar orasida ijobiy, juda kuchli, chiziqli bog‘lanish mavjud. (b) Tushuntiruvchi o‘zgaruvchi: turistlar soni (minglarda). Javob o‘zgaruvchisi: sarflar (million AQSh dollarida). (c) Biz regressiya chizig‘idan foydalangan holda ma’lum turistlar soni uchun sarflarni bashorat qilishimiz mumkin. Bu mamlakatning chet elda reklama uchun qancha sarflashni rejalashtirishi yoki turizmdan kutilayotgan daromadlarni prognoz qilish uchun foydali ma’lumot bo‘lishi mumkin. (d) Grafikda bog‘lanish chiziqli bo‘lib tuyulsa ham, qoldiq grafik

aslida chiziqli bo‘lmagan bog‘lanishni ko‘rsatadi. Bu ziddiyat emas: qoldiq grafiklari nuqtali diagrammada ko‘rinishi qiyin bo‘lgan chiziqlilikdan chekinishlarni ko‘rsatishi mumkin. Ushbu ma’lumotlarni modellashtirish uchun oddiy chiziqli model yetarli emas. Shuningdek, ushbu ma’lumotlar ketma-ket kuzatilganligini hisobga olish muhim, ya’ni hozirgi grafiklarda ko‘rinmaydigan, ammo e’tiborga olish muhim bo‘lgan yashirin tuzilma mavjud bo‘lishi mumkin.

8.23 (a) Avval qiyalikni hisoblang: $b_1 = R \times s_y/s_x = 0{,}636 \times 113/99 = 0{,}726$. Keyin regressiya chizig‘i nuqta orqali o‘tishini bilamiz $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{y} = b_0 + b_1 \times \bar{x}$. $\bar{x}$, $\bar{y}$, va b_1 ni qo‘shib, b_0 ni hisoblang: 51. Yechim: $\widehat{travel\ time} = 51 + 0{,}726 \times distance$. (b) b_1: Har bir qo‘shimcha masofa milya uchun model sayohat vaqtiga qo‘shimcha 0,726 daqiqa bashorat qiladi. b_0: Sayohat masofasi 0 milya bo‘lsa, sayohat vaqti 51 daqiqa bo‘lishi kutiladi. Biroq, ushbu konteksdagi 0 milya masofa mantiqiy emas. Bu yerda y-tutashuvi faqat chiziqning balandligini sozlash uchun ishlatiladi va o‘z-o‘zidan ma’nosizdir. (c) $R^2 = 0{,}636^2 = 0{,}40$. Sayohat vaqtidagi o‘zgaruvchanlikning taxminan 40% i model tomonidan hisobga olinadi, ya’ni bosib o‘tilgan masofa bilan tushuntiriladi. (d) $\widehat{travel\ time} = 51 + 0{,}726 \times distance = 51 + 0{,}726 \times 103 \approx 126$ daqiqa. (Eslatma: Ushbu model yordamida bashorat qilayotganimizda ehtiyot bo‘lishimiz kerak, chunki hali modelning moslashuvi yaxshi ekanligini baholamadik.) (e) $e_i = y_i - \hat{y}_i = 168 - 126 = 42$ daqiqa. Ijobiy qoldiq model sayohat vaqtini kam baholaganligini anglatadi. (f) Yo‘q, bu hisoblash ekstrapolyatsiyani talab qiladi.

8.25 (a) $\widehat{murder} = -29{,}901 + 2{,}559 \times poverty\%$. (b) Qashshoqlik darajasi 0 bo‘lgan metropolitendagi kutilayotgan qotillik darajasi -29.901 har millionga. Bu aniq mantiqiy emas, faqat regressiya chizig‘ining balandligini sozlash uchun ishlatiladi. (c) Har bir foiz qashshoqlik oshishi uchun, millionga nisbatan qotilliklar o‘rtacha 2,559 ga yuqori bo‘lishi kutiladi. (d) Qashshoqlik darajasi metropolitendagi qotillik darajasidagi o‘zgaruvchanlikning 70,52% ini tushuntiradi. (e) $\sqrt{0{,}7052} = 0{,}8398$.

8.27 (a) Quyi o‘ngda bitta anomal nuqta bor. U ma’lumotlarning markazidan uzoq bo‘lganligi sababli, bu yuqori leveragega ega nuqta. Bu shuningdek, ta’sirchan nuqta, chunki ushbu kuzatishsiz regressiya chizig‘i butunlay boshqa qiyalikka ega bo‘ladi.
(b) Quyi o‘ngda bitta anomal nuqta bor. U ma’lumotlarning markazidan uzoq bo‘lganligi sababli, bu yuqori leveragega ega nuqta. Ammo, u chiziqqa unchalik ta’sir qilmayotgan ko‘rinadi, shuning uchun u ta’sirchan nuqta emas.
(c) Kuzatish ma’lumotlarning markazida joylashgan (x-o‘qi bo‘yicha), shuning uchun bu nuqta yuqori leveragega ega emas. Bu nuqta chiziqning qiyaligiga katta ta’sir qilmaydi va shu sababli ta’sirchan nuqta emas.

8.29 (a) 2010-yilda uyga egalik qiluvchi oilalar foizi va urban joylarda yashovchi aholining foizi o‘rtasida salbiy, o‘rtacha kuchli, biroz chiziqli bog‘lanish mavjud. Birta anomal nuqta bor: aholisining 100% urban bo‘lgan bir shtat. Uyga egalik foizining o‘zgaruvchanligi grafikda chapdan o‘ngga o‘tishda ortadi. (b) Anomal nuqta grafikning quyi o‘ng burchagida joylashgan bo‘lib, boshqa nuqtalar markazidan gorizontal bo‘yicha uzoq, shuning uchun u yuqori leveragega ega nuqta. Bu ta’sirchan nuqta, chunki ushbu nuqtani analizdan chiqarib tashlash regressiya chizig‘ining qiyaligini sezilarli darajada o‘zgartiradi.

8.31 (a) Bog‘lanish ijobiy, o‘rtacha kuchli va chiziqli. Bir nechta anomal nuqtalar mavjud, ammo ta’sirchan nuqtalar yo‘q.
(b) $\widehat{weight} = -105{,}0113 + 1{,}0176 \times height$.
Qiyalik: Har bir qo‘shimcha santimetr balandlik uchun model o‘rtacha vaznni 1,0176 kilogrammga oshishini bashorat qiladi (taxminan 2,2 funt).
Intercept: Balandligi 0 santimetr bo‘lgan odamning vazni -105,0113 kilogramm bo‘lishi kutiladi. Bu, albatta, mumkin emas. Bu yerda y- tutashuvi faqat chiziqning balandligini sozlash uchun ishlatiladi va o‘z-o‘zidan ma’nosizdir.
(c) H_0: Haqiqiy qiyalik koeffitsienti nolga teng ($\beta_1 = 0$).
H_A: Haqiqiy qiyalik koeffitsienti noldan farq qiladi ($\beta_1 \neq 0$).
Ikki tomonlama muqobil gipoteza uchun p-qiymati ($\beta_1 \neq 0$) juda kichik, shuning uchun H_0 ni rad etamiz. Ma’lumotlar balandlik va vazn ijobiy bog‘langanligini ishonchli isbotlaydi. Haqiqiy qiyalik parametri haqiqatan ham nolga qaraganda katta.
(d) $R^2 = 0{,}72^2 = 0{,}52$. Vaznning o‘zgaruvchanligining taxminan 52% ini shaxslarning balandligi bilan tushuntirish mumkin.

8.33 (a) H_0: $\beta_1 = 0$. H_A: $\beta_1 \neq 0$. Jadvalda berilgan p-qiymati juda kichik va 0,05 dan kichikroq, shuning uchun H_0 ni rad etamiz. Ma’lumotlar xotin va erlarning bo‘ylari ijobiy bog‘langanligini ishonchli isbotlaydi.
(b) $\widehat{height}_W = 43{,}5755 + 0{,}2863 \times height_H$.
(c) Qiyalik: Erning har bir qo‘shimcha dyum bo‘yi uchun, xotin bo‘yi o‘rtacha 0,2863 dyumga oshishi kutiladi. Ushlamoq: Bo‘yi 0 dyum bo‘lgan erkaklar o‘rtacha 43,5755 dyum bo‘yli xotinlarga ega bo‘lishi kutiladi. Bu yerda ushlamoq ma’nosizdir va faqat chiziqning balandligini sozlash uchun xizmat qiladi.
(d) Qiyalik ijobiy bo‘lganligi sababli, r ham ijobiy bo‘lishi kerak. $r = \sqrt{0{,}09} = 0{,}30$.
(e) 63,33. R^2 past bo‘lganligi sababli, ushbu regressiya modeliga asoslangan bashorat juda ishonchli emas.
(f) Yo‘q, biz ekstrapolyatsiyadan qochishimiz kerak.

8.35 (a) $H_0 : \beta_1 = 0; H_A : \beta_1 \neq 0$ (b) Ushbu test uchun p-qiymat taxminan 0 ga teng, shuning

uchun H_0 ni rad etamiz. Ma'lumotlar qashshoqlik foizi qotillik darajasining muhim prediktori ekanligini tasdiqlaydi. (c) $n = 20, ed = 18, T^*_{18} = 2{,}10$; $2{,}559 \pm 2{,}10 \times 0{,}390 = (1{,}74;\ 3{,}378)$; Qashshoqlik foizi har bir foizga oshganida, millionga nisbatan qotilliklar o'rtacha 1,74 dan 3,378 gacha oshishi kutiladi. (d) Ha, biz H_0 ni rad etdik va ishonch oralig'i 0 ni o'z ichiga olmaydi.

8.37 (a) To'g'ri. (b) Noto'g'ri, korrelyatsiya ikki raqamli o'zgaruvchi orasidagi chiziqli bog'lanish o'lchovidir.

8.39 (a) Nuqta bahosi va standart xato $b_1 = 0{,}9112$ va $SX = 0{,}0259$. T-reytingni hisoblashimiz mumkin: $T = (0{,}9112 - 1)/0{,}0259 = -3{,}43$. $ed = 168$ dan foydalangan holda p-qiymati taxminan 0,001 bo'lib, $\alpha = 0{,}05$ dan kichik. Bu shuni anglatadiki, ma'lumotlar erlar va xotinlar yoshlarining o'rtacha farqi vaqt davomida o'zgarganligini ishonchli isbotlaydi. (b) $\widehat{age}_W = 1{,}5740 + 0{,}9112 \times age_H$. (c) Qiyalik: Erning har bir qo'shimcha yoshi uchun, model xotin yoshining o'rtacha 0,9112 yilga oshishini bashorat qiladi. Bu shuni anglatadiki, xotinlar yoshining katta yoshdagi odamlarda nisbatan pastroq ekanligini ko'rsatadi, bu esa er va xotinlar yoshidagi o'rtacha farq kattaroq ekanligini anglatadi. Ushlamoq: Yosh bo'yicha 0 yoshli erkaklar o'rtacha 1,5740 yoshli xotinlarga ega bo'lishi kutiladi. Bu yerda ushlamoq ma'nosizdir va faqat chiziqning balandligini sozlash uchun xizmat qiladi. (d) $R = \sqrt{0{,}88} = 0{,}94$. Xotinlarning yoshlarini erlarning yoshlariga regressiyasi ijobiy qiyalikka ega, shuning uchun korrelyatsiya koeffitsienti ham ijobiy bo'ladi. (e) $\widehat{age}_W = 1{,}5740 + 0{,}9112 \times 55 = 51{,}69$. R^2 yuqori bo'lganligi sababli, ushbu regressiya modeliga asoslangan bashorat ishonchli. (f) Yo'q, biz 85 yoshli erkakning xotin yoshini bashorat qilish uchun bir xil modeldan foydalanmasligimiz kerak. Bu ekstrapolyatsiyani talab qiladi. Oldingi mashqlardan biridagi grafik erlarning ushbu ma'lumot to'plamidagi yoshi taxminan 20 dan 65 yoshgacha ekanligini ko'rsatadi. Regressiya modeli ushbu diapazondan tashqarida mos bo'lmasligi mumkin.

8.41 O'suvchi tendensiya mavjud. Ammo, kaloriyalar soni oshgani sayin o'zgaruvchanlik ortadi va o'ng tomonda chiziqning yuqori va pastida ikkita klaster bo'lishi mumkin, shuning uchun ushbu ma'lumotlarga chiziqli modelni moslashtirishda ehtiyot bo'lishimiz kerak.

8.43 (a) $r = -0{,}72 \rightarrow$ (2) (b) $r = 0{,}07 \rightarrow$ (4) (c) $r = 0{,}86 \rightarrow$ (1) (d) $r = 0{,}99 \rightarrow$ (3)

9 Ko'p o'lchovli va logistik regressiyasi

9.1 (a) $\widehat{baby_weight} = 123{,}05 - 8{,}94 \times smoke$ (b) Chekuvchi onalardan tug'ilgan chaqaloqlarning o'rtacha vazni chekmaydigan onalarnikidan 8.94 untsiya kamroq deb baholanadi. Chekuvchi: $123{,}05 - 8{,}94 \times 1 = 114{,}11$ untsiya. Chekmaydigan: $123{,}05 - 8{,}94 \times 0 = 123{,}05$ untsiya. (c) H_0: $\beta_1 = 0$. H_A: $\beta_1 \neq 0$. $T = -8{,}65$, va p-qiymati taxminan 0. P-qiymat juda kichik bo'lganligi sababli, H_0 ni rad etamiz. Ma'lumotlar haqiqiy qiyalik parametri 0 dan farq qilganligini va tug'ilgan vazn bilan chekish o'rtasida bog'liqlik mavjudligini ishonchli tasdiqlaydi. Bundan tashqari, H_0 ni rad etganimizdan so'ng, chekish pastroq tug'ilgan vazn bilan bog'liq deb xulosa qilishimiz mumkin.

9.3 (a) $\widehat{baby_weight} = -80{,}41 + 0{,}44 \times gestation - 3{,}33 \times parity - 0{,}01 \times age + 1{,}15 \times height + 0{,}05 \times weight - 8{,}40 \times smoke$. (b) $\beta_{gestation}$: Model har bir qo'shimcha homiladorlik kuni uchun chaqaloqning tug'ilgan vazni 0,44 untsiyaga oshishini bashorat qiladi, boshqa barcha o'zgaruvchilar o'zgarmas deb hisoblanadi. β_{age}: Model onaning har bir qo'shimcha yoshi uchun chaqaloqning tug'ilgan vazni 0,01 untsiyaga kamayishini bashorat qiladi, boshqa barcha o'zgaruvchilar o'zgarmas deb hisoblanadi. (c) Parity modeldagi boshqa o'zgaruvchilar bilan bog'liq bo'lishi mumkin, bu esa modelni baholashni qiyinlashtiradi. (d) $\widehat{baby_weight} = 120{,}58$. $e = 120 - 120{,}58 = -0{,}58$. Model bu chaqaloqning tug'ilgan vaznini ortiqcha baholagan. (e) $R^2 = 0{,}2504$. $R^2_{adj} = 0{,}2468$.

9.5 (a) (-0,32; 0,16). Biz 95% ishonch bilan aytishimiz mumkinki, boshqa barcha o'zgaruvchilarni nazorat qilib, erkak talabalar o'rtacha GPAlari ayollar GPAlaridan 0,32 punkt past yoki 0,16 punkt yuqori bo'lishi mumkin. (b) Ha, barcha holatlarda p-qiymat 0,05 dan katta bo'lganligi sababli (interceptdan tashqari).

9.7 Yoshni olib tashlang.

9.9 Faqat p-qiymatga asoslanib, modelga birinchi bo'lib gestation yoki smoke qo'shilishi kerak. Ammo, gestation uchun moslashgan R^2 yuqori bo'lganligi sababli, forward-selection algoritmida birinchi bosqichda gestation qo'shilishi afzalroq bo'ladi. (Boshqa tushuntirishlar ham mumkin. Masalan, faqat moslashgan R^2 dan foydalanish mantiqiy bo'ladi.)

9.11 U p-qiymat tanlashdan foydalanishi kerak, chunki u faqat muhim prediktorlarni aniqlash bilan qiziqadi, bashoratni optimallashtirish emas.

9.13 Qoldiqlarning deyarli normal taqsimoti: Ma'lumotlar to'plamida ko'p kuzatuvlar mavjud bo'lganligi sababli, biz g'oyat chetga chiqadigan anomaliyalarni qidiramiz va gistogrammada hech qanday bunday holatni ko'rmayapmiz. Qoldiqlarning o'zgaruvchanligi: Qoldiqlar va moslangan qiymatlar o'rtasidagi grafik umumiy tuzilmani ko'rsatmaydi. Ammo, juda past yoki juda yuqori moslangan

qiymatlarga ega bo‘lgan qiymatlar biroz kattaroq anomaliyalarga ega ko‘rinadi. Shuningdek, qoldiqlar parity va chekish holati guruhlari o‘rtasida doimiy o‘zgaruvchanlikka ega ko‘rinadi, ammo bu masalalar relativ ravishda kichik.

Qoldiqlarning mustaqilligi: Qoldiqlarning ma’lumotlarni yig‘ish tartibiga nisbatan grafigi tasodifiy sochilganlikni ko‘rsatadi, bu esa ma’lumotlarni yig‘ish tartibiga bog‘liq hech qanday tuzilmalar yo‘qligini bildiradi.

Javob o‘zgaruvchisi va raqamli tushuntiruvchi o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi chiziqli bog‘lanishlar: Qoldiqlar onaning bo‘yi va vazni grafiklari bo‘yicha 0 atrofida tasodifiy taqsimlangan. Homiladorlik uzunligi bo‘yicha grafik ham aniq yoki kuchli qoldiq tuzilmalarga ega emas, ehtimol juda qisqa yoki uzoq homiladorliklardan tashqari. Qoldiqlarning qolganlari 0 atrofida tasodifiy taqsimlangan ko‘rinadi.

Bu yerda ko‘tarilgan barcha masalalar nisbatan yengil. Ba’zi anomaliyalar mavjud, ammo ma’lumotlar shunchalik ko‘pki, bunday kuzatishlarning ta’siri juda kichik bo‘ladi.

9.15 (a) Bir nechta potentsial anomaliyalar mavjud, masalan, chap tomonda `total_length` o‘zgaruvchisi uchun, ammo bunday katta ma’lumotlar to‘plamida jiddiy xavotirga sabab bo‘ladigan hech narsa yo‘q. (b) Agar koeffitsient baholari modelga kiritilgan o‘zgaruvchilarga sezgir bo‘lsa, bu odatda ba’zi o‘zgaruvchilar kollinear ekanligini ko‘rsatadi. Masalan, posumning jinsi uning bosh uzunligi bilan bog‘liq bo‘lishi mumkin, bu esa `sex_male` o‘zgaruvchisi uchun koeffitsient (va p-qiymat) `head_length` o‘zgaruvchisi olib tashlanganida o‘zgarganligini tushuntiradi. Xuddi shunday, posumning bosh suyagi kengligi uning bosh uzunligi bilan bog‘liq bo‘lishi ehtimoldan yiroq emas, hatto bosh uzunligidan ko‘ra jinsga yaqinroq bog‘liq bo‘lishi mumkin.

9.17 (a) $\hat{p}_i$ ni bashorat qiluvchi model quyidagicha yozilishi mumkin: $\log\left(\frac{\hat{p}_i}{1-\hat{p}_i}\right) = 33{,}5095 - 1{,}4207 \times sex_male_i - 0{,}2787 \times skull_width_i + 0{,}5687 \times total_length_i - 1{,}8057 \times tail_length_i$. Faqatgina `total_length` posumning Viktoriya hududidan ekanligi bilan ijobiy bog‘liq. (b) $\hat{p} = 0{,}0062$. Ehtimol juda kichik bo‘lsa ham, biz hali model bo‘yicha diagnostika o‘tkazmadik. Model AQSh hayvonot bog‘ida topilgan posum uchun ham aniq bo‘lib qolishiga shubha qilishimiz mumkin. Masalan, hayvonot bog‘i maxsus xususiyatlarga ega posumni tanlagan bo‘lishi mumkin, ammo faqat bitta hududda qidirgan. Boshqa tomondan, posumning yovvoyi tabiatda ushlangani ijobiy dalil bo‘lishi mumkin. (Model ehtimoli haqida ishonchlilik bo‘yicha javoblar turlicha bo‘lishi mumkin.)

9.19 (a) Noto‘g‘ri. Bashorat qiluvchi o‘zgaruvchilar kollinear bo‘lsa, bu ularning bir-biri bilan korrelyatsiyalanganligini bildiradi va bitta o‘zgaruvchini kiritish boshqasining nuqta bahosi (va standart xatosi) ga sezilarli ta’sir ko‘rsatishi mumkin. (b) To‘g‘ri. (c) Noto‘g‘ri. Bu faqat ma’lumotlar eksperimentdan olingan bo‘lsa va x_1 tadqiqotchilar tomonidan belgilangan o‘zgaruvchi bo‘lgan taqdirda amalga oshadi. (Ko‘p o‘zgaruvchili regressiya sababiy bog‘lanishlar bo‘yicha gipotezalarni shakllantirish uchun foydali bo‘lishi mumkin, ammo u hech qanday kafolat bermaydi.) (d) Noto‘g‘ri. Biz bitta o‘rtacha qiymatga doir inference uchun normalniylikni tekshirganimiz kabi tekshirishimiz kerak: agar $n \geq 30$ bo‘lsa, juda ekstremal anomaliyalarni, yoki $n < 30$ bo‘lsa, aniq anomaliyalarni izlaymiz.

9.21 (a) `exclaim_subj` olib tashlanishi kerak, chunki uning olib tashlanishi AIC ni eng ko‘p kamaytiradi (va natijaviy modelning AIC qiymati hech narsa olib tashlanmagan modelga qaraganda pastroq). (b) Har qanday o‘zgaruvchini olib tashlash AIC ni oshiradi, shuning uchun ushbu to‘plamdan biror o‘zgaruvchini olib tashlashimiz kerak emas.

9.23 (a) Tenglama quyidagicha:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = -0{,}8124 \\ &- 2{,}6351 \times \texttt{to_multiple} \\ &+ 1{,}6272 \times \texttt{winner} \\ &- 1{,}5881 \times \texttt{format} \\ &- 3{,}0467 \times \texttt{re_subj}\end{aligned}$$

(b) Avval $\log\left(\frac{p}{1-p}\right)$ ni toping, keyin p uchun yeching:

$$\begin{aligned}&\log\left(\frac{p}{1-p}\right) \\ &\quad = -0{,}8124 - 2{,}6351 \times 0 + 1{,}6272 \times 1 \\ &\qquad - 1{,}5881 \times 0 - 3{,}0467 \times 0 \\ &\quad = 0{,}8148 \\ &\frac{p}{1-p} = e^{0{,}8148} \quad \rightarrow \quad p = 0{,}693.\end{aligned}$$

(c) Bu ehtimol juda yuqori bo‘lishi kerak, chunki elektron pochta xizmatidan foydalanayotgan odam uchun spam bo‘lmagan xabarlarni yo‘qotish juda bezovta qiluvchi holat bo‘lishi mumkin. Hatto biror xabar spam bo‘lishi ehtimoli 90% bo‘lsa ham, uni pochta qutisida qoldirishga arziydi. Ehtimol, 99% ehtimollik mantiqiy chegara bo‘ladi. Yana yaxshiroq qilish uchun boshqa g‘oyalar haqida o‘ylasak, xabar muhimligini tasniflashga harakat qiladigan ikkinchi model yaratish foydali bo‘lishi mumkin. Agar bizda spam modeli va muhimlik modeli bo‘lsa, xarajat-foyda savdosi haqida yaxshiroq fikrlash usuli bo‘ladi. Masalan, biz muhim emasligiga ishonchimiz komil bo‘lgan xabarlar uchun spam ehtimoli chegarasini pastroq qilishni xohlashimiz mumkin, va muhim bo‘lishiga ishonchimiz komil bo‘lgan xabarlar uchun yuqori ehtimollik chegarasini (masalan, 99,99%) xohlashimiz mumkin.

Appendix B

Matnda keltirilgan ma'lumotlar to'plamlari

Ushbu ilovada matnda keltirilgan har bir ma'lumotlar to'plami tasvirlangan va ushbu ma'lumotlar to'plamlarining har biri uchun tegishli sahifa mavjud: **openintro.org/data**. Ushbu sahifada shuningdek, ko'nikmalaringizni oshirish uchun qo'shimcha ma'lumotlar to'plamlari mavjud. Har bir ma'lumotlar to'plamining o'ziga xos sahifasi quyidagi ma'lumotlarni o'z ichiga oladi:

- Ma'lumotlar to'plamidagi o'zgaruvchilar ro'yxati.
- CSV faylini yuklab olish.
- R obyekt faylini yuklab olish.

B.1 Ma'lumotlarga kirish

1.1 `stent30 (ma'lumotlar to'plami)`, `stent365 (ma'lumotlar to'plami)` → Stent ma'lumotlari ikki to'plamga bo'lingan: biri 0-30 kunlik natijalar va ikkinchisi 0-365 kunlik natijalar uchun.
Chimowitz MI, Lynn MJ, Derdeyn CP va boshqalar. 2011. Intrakranial Arterial Stenoz uchun Stentlash va Aggressiv Tibbiy Davolash. New England Journal of Medicine 365:993-1003. www.nejm.org/doi/full/10.1056/NEJMoa1105335.
NY Times maqolasi: www.nytimes.com/2011/09/08/health/research/08stent.html.

1.2 `loan50 (ma'lumotlar to'plami)`, `loans_full_schema (ma'lumotlar to'plami)` → Ushbu ma'lumotlar Lending Club'dan olingan (lendingclub.com), ular o'z platformalari orqali kredit olgan odamlar to'g'risidagi katta ma'lumotlar to'plamini taqdim etadi. Darslikda foydalanilgan ma'lumotlar 2018-yilning 1-choragida (yanvar, fevral, mart) berilgan kreditlardan namunadir.

1.2 `county (ma'lumotlar to'plami)`, `county_complete (ma'lumotlar to'plami)` → Ushbu ma'lumotlar bir nechta hukumat manbalaridan olingan. County ma'lumotlar to'plamida keltirilgan o'zgaruvchilar uchun faqat eng so'nggi ma'lumotlar (2018-yil oxiridagi mavjud holatga ko'ra) keltirilgan. 2011-yilgacha bo'lgan ma'lumotlar barchasi census.gov dan, lekin Quick Facts sahifasi hozir mavjud emas. Eng yangi ma'lumotlar quyidagilardan keladi: USDA (ers.usda.gov), Bureau of Labor Statistics (bls.gov/lau), SAIPE (census.gov/did/www/saipe) va American Community Survey (census.gov/programs-surveys/acs).

1.3 Nurses' Health Study → Ushbu ma'lumotlar to'plami haqida ko'proq ma'lumot olish uchun qarang: www.channing.harvard.edu/nhs

1.4 Biz randomizatsiya (bloklashsiz) tadqiqot haqida gapirganda, Anturane Reinfarction Trial Research Group tomonidan o'tkazilgan quyidagi tadqiqotni nazarda tutdik. 1980. *Sulfinpyrazone miokard infarktidan keyingi to'satdan o'limni oldini olishda.* New England Journal of Medicine 302(5):250-256.

B.2 Ma'lumotlarni umumlashtirish

2.1 `loan50 (ma'lumotlar to'plami)`, `county (ma'lumotlar to'plami)` →
Bu ma'lumotlar to'plamlari Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

2.2 `loan50 (ma'lumotlar to'plami)`, `county (ma'lumotlar to'plami)` →
Bu ma'lumotlar to'plamlari Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

2.3 `malaria (ma'lumotlar to'plami)` → Lyke va boshq. 2017. PfSPZ vaksinasi heterolog boshqariladigan inson bezgak infektsiyasiga qarshi uzoq muddatli himoya va keng qamrovli T-hujayralarini rag'batlantiradi. PNAS 114(10):2711-2716. www.pnas.org/content/114/10/2711

B.3 Ehtimollik

3.1 `loan50 (ma'lumotlar to'plami)`, `county (ma'lumotlar to'plami)` →
Bu ma'lumotlar to'plamlari Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

3.1 `playing_cards (ma'lumotlar to'plami)` → Standart 52 ta kartadan iborat o'yin kartalari ma'lumotlar to'plami.

3.2 `family_college (ma'lumotlar to'plami)` → Haqiqiy bosh to'plam xulosalari asosida simulyatsiya qilingan ma'lumotlar, qarang
nces.ed.gov/pubs2001/2001126.pdf.

3.2 `smallpox (ma'lumotlar to'plami)` → Fenner F. 1988. Smallpox va uning yo'q qilinishi (Xalqaro Jamoat Sog'liqni Saqlash Tarixi, No. 6). Jeneva: Jahon sog'liqni saqlash tashkiloti. ISBN 92-4-156110-6.

3.2 Mammogram tekshiruvlari, ehtimolliklar → Hisobot qilingan ehtimolliklar quyidagi tadqiqotlardan olingan: www.breastcancer.org va www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1173421.

3.2 Jose kampus tashrifi, ehtimolliklar → Bu misol to'qib chiqilgan.

3.3 Ushbu bo'limda hech qanday ma'lumotlar to'plami tasvirlanmagan.

3.4 O'quv materiallari xaridlari va ehtimolliklar → Bu misol to'qib chiqilgan.

3.4 Televizor va tost uchun auktsionlar → Bu misol to'qib chiqilgan.

3.4 `stocks_18 (ma'lumotlar to'plami)` → Caterpillar, Exxon Mobil Corp va Google uchun 2015-yil noyabridan 2018-yil oktyabrigacha bo'lgan oylik daromadlar.

3.5 `fcid (ma'lumotlar to'plami)` → Ushbu namunani AQSh bosh to'plamidan oddiy tasodifiy tanlanma sifatida hisoblash mumkin. Bu USDA Oziq-ovqat Tovarlari Qabul Qilish Ma'lumotlar Bazasiga asoslanadi.

B.4 Tasodifiy miqdorlarning taqsimotlari

4.1 SAT va ACT ballarining taqsimotlari → SAT ballari 2018-yilgi taqsimotdan olingan, bu quyidagi manbada keltirilgan:
reports.collegeboard.org/pdf/2018-total-group-sat-suite-assessments-annual-report.pdf
ACT ballari ma'lumotlari quyida mavjud:
act.org/content/dam/act/unsecured/documents/cccr2018/P_99_999999_N_S_N00_ACT-GCPR_National.pdf
Shuni tan olamizki, haqiqiy ACT ballar taqsimoti deyarli normal emas. Ammo, mavzu juda tushunarli bo'lganligi sababli, biz kontekst va misollarni saqlashga qaror qildik.

4.1 Erkaklarning bo'ylari → Taqsimot USDA Oziq-ovqat Tovarlari Qabul Qilish Ma'lumotlar Bazasiga asoslangan.

4.1 `possum (ma'lumotlar to'plami)` → Taqsimot parametrlari Avstraliya va Yangi Gvineyadan olingan posum tanlanmalariga asoslangan. Ushbu ma'lumotlarning asl manbasi quyidagicha: Lindenmayer DB va boshq. 1995. *Morphological variation among columns of the mountain brushtail possum, Trichosurus caninus Ogilby (Phalangeridae: Marsupiala)*. Australian Journal of Zoology 43: 449-458.

4.2 Sug'urta chegirmasini oshirib yuborish → Ushbu statistikalar to'qib chiqilgan, ammo past chegirmali rejalarda kuzatilishi mumkin bo'lgan qiymatlardir.

4.3 Sug‘urta chegirmasini oshirib yuborish → Ushbu statistikalar to‘qib chiqilgan, ammo past chegirmali rejalarda kuzatilishi mumkin bo‘lgan qiymatlardir.

4.3 Chekuvchi do‘stlar → Afsuski, 30% statistik ma’lumotning manbasi haqida qo‘shimcha ma’lumot yo‘q, shuning uchun biz uni ishonchli manba sifatida tasdiqlay olmaymiz.

4.3 AQSh chekish darajasi → AQShda 15% chekish darajasi 2017-yilgi baholashga ko‘ra 14% ni bildirgan Centers for Disease Control and Prevention veb-saytidagi qiymatga yaqin: cdc.gov/tobacco/data_statistics/fact_sheets/adult_data/cig_smoking/index.htm

4.4 Futbol tepuvchisi → Bu misol to‘qib chiqilgan.

4.4 Yurak xurujlari bo‘yicha qabul qilinadigan bemorlar → Ushbu misol to‘qib chiqilgan, ammo yurak xurujlari bo‘yicha qabul qilinadigan bemorlar ba’zi shifoxonalar uchun realistikdir.

4.5 `ami_occurrences (ma’lumotlar to‘plami)` → Ushbu ma’lumotlar to‘plami simulyatsiya qilingan, ammo Nyu-York shahridagi tipik AMI (miokard infarkti) ko‘rsatkichlariga asoslangan haqiqiy AMI ma’lumotlariga o‘xshaydi.

B.5 Xulosa chiqarish asoslari

5.1 `pew_energy_2018 (ma’lumotlar to‘plami)` → Haqiqiy ma’lumotlar ushbu bobda qayd etilganidan ko‘proq kuzatuvlarni o‘z ichiga oladi. Boshqa misollarga ko‘proq o‘zgaruvchanlik kiritish uchun biz kichikroq namunadan foydalandik. `pew_energy_2018` ma’lumotlar to‘plami quyidagi energiya manbalari savollari uchun to‘liq ma’lumotlar to‘plamini o‘z ichiga oladi. Quyosh, shamol, dengizda burg‘ulash, gidravlik sindirish va yadro energiyasi. Ma’lumotlarni qurish uchun ishlatilgan statistikalar quyidagi sahifadan olingan:

www.pewinternet.org/2018/05/14/majorities-see-government-efforts-to-protect-the-environment-as-insufficient/

5.2 `pew_energy_2018 (ma’lumotlar to‘plami)` → Ushbu ma’lumotlar to‘plami bo‘yicha batafsil ma’lumotlar 5.1-bo‘limida keltirilgan.

5.2 `ebola_survey (ma’lumotlar to‘plami)` → 2014-yil 23-oktyabrda Nyu-York shahrida Gvineyada Ebola bemorlarini davolashda ishtirok etgan shifokor kasalxonaga engil isitma bilan borib, keyin Ebola tashxisi qo‘yildi. Shu vaqt ichida NBC 4 New York/The Wall Street Journal/Marist Poll tomonidan o‘tkazilgan so‘rovnoma Nyu-Yorkliklarning 82% “Ebola bemori bilan muloqotda bo‘lgan har bir kishi uchun majburiy 21 kunlik karantin”ni yoqlab chiqishini ko‘rsatdi. Ushbu so‘rovda 2014-yilning 26-28-oktyabr kunlari 1042 Nyu-Yorklik kattalar javob berdi. Poll ID NY141026 on maristpoll.marist.edu.

5.3 `pew_energy_2018 (ma’lumotlar to‘plami)` → Ushbu ma’lumotlar to‘plami bo‘yicha batafsil ma’lumotlar 5.1 bo‘limida keltirilgan.

5.3 Rosling savollari → Biz Roslinglarning Factfulness kitobida tasvirlanganidan kichikroq namunalarni ko‘rsatdik. Ko‘rsatilgan namunalar haqiqiy ko‘rsatkichlarga yaqin, lekin bir xil emas. Kitobda keltirilgan ikkita savolning taxminiy javob ko‘rsatkichlari:

- Dunyodagi 1 yoshli bolalarning 80% i biror kasallikka qarshi emlangan: 13% bu savolga to‘g‘ri javob beradi (AQShda 17%). gapm.io/q9
- 2100-yilga kelib dunyodagi bolalar soni: 9% to‘g‘ri javob beradi. gapm.io/q5

Yana bir necha savollar va taxminiy to‘g‘ri javob beruvchilar foizi:

- Bugungi kunda dunyo bo‘ylab past daromadli mamlakatlardagi qizlarning qanchasi boshlang‘ich maktabni tugatadi: 20%, 40% yoki 60%? Javob: 60%. 7% odamlar bu savolga to‘g‘ri javob beradi. gapm.io/q1
- Bugungi dunyo uchun o‘rtacha umr ko‘rish davomiyligi qanday: 50 yil, 60 yil yoki 70 yil? Javob: 70 yil. AQShda taxminan 43% odamlar bu savolga to‘g‘ri javob beradi. gapm.io/q4

– 1996-yilda yo'lbarslar, ulkan pandalar va qora karkidonlar xavf ostida deb tasniflangan edi. Bugungi kunda bu uch turning qanchasi ko'proq xavf ostida: ikkitasi, bittasi yoki hech biri? Javob: hech biri. 7% odamlar bu savolga to'g'ri javob beradi. gapm.io/q11
– Dunyoda qanchalik ko'p odam elektr energiyasiga ega: 20%, 50%, 80%. Javob: 80%. Taxminan 22% odamlar bu savolga to'g'ri javob beradi. gapm.io/q12

Ko'proq ma'lumot uchun, qarang Factfulness kitobi.

5.3 `pew_energy_2018 (ma'lumotlar to'plami)` → Ushbu ma'lumotlar to'plami bo'yicha batafsil ma'lumotlar 5.1 bo'limida keltirilgan.

5.3 `nuclear_survey (ma'lumotlar to'plami)` → 2013-yil mart oyida tasodifiy namunada 1028 AQSh kattalarining 56% i yadro qurollarini qisqartirishni qo'llab-quvvatladi. www.gallup.com/poll/161198/favor-russian-nuclear-arms-reductions.aspx

5.3 Avtomobil ishlab chiqarish → Bu misol to'qib chiqilgan.

5.3 `stent30 (ma'lumotlar to'plami)`, `stent365 (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plamlari Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

B.6 Toifali ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish

6.1 Payday loans → Statistikalar quyidagi manbadan olingan: pewtrusts.org/-/media/assets/2017/04/payday-loan-customers-want-more-protections-methodology.pdf

6.1 Shinalar zavodi → Bu misol to'qib chiqilgan.

6.2 `cpr (ma'lumotlar to'plami)` → Böttiger va boshq. *Trombolitik terapiyaning samaradorligi va xavfsizligi: dastlab muvaffaqiyatsiz bo'lgan yurak-qon tomir reanimatsiyasidan keyin perspektiv klinik tadqiqot.* The Lancet, 2001.

6.2 `fish_oil_18 (ma'lumotlar to'plami)` → Manson JE va boshq. 2018. *Dengiz n-3 yog' kislotalari va yurak-qon tomir kasalliklari va saratonni oldini olish.* NEJMoa1811403.

6.2 `mammogram (ma'lumotlar to'plami)` → Miller AB. 2014. *Kanada milliy ko'krak skrining tadqiqoti: randomizatsiyalangan skrining sinovining ko'krak saratoni holati va o'limi bo'yicha yigirma besh yillik kuzatuvi.* BMJ 2014;348:g366.

6.2 `drone_blades (ma'lumotlar to'plami)` → Kvadrakopter dron pichoqlarining sifat nazorati ma'lumotlar to'plami misol uchun to'qib chiqilgan ma'lumotlar to'plamidir. Simulyatsiya qilingan ma'lumotlar `drone_blades` ma'lumotlar to'plamida keltirilgan.

6.3 `jury (ma'lumotlar to'plami)` → Diskriminatsiyani tekshirish uchun sud hay'ati bo'yicha ma'lumotlar to'plami misol uchun to'qib chiqilgan. Simulyatsiya qilingan ma'lumotlar `jury` ma'lumotlar to'plamida keltirilgan.

6.3 `sp500_1950_2018 (ma'lumotlar to'plami)` → Ma'lumotlar quyidagi manbadan olingan: finance.yahoo.com.

6.4 `ask (ma'lumotlar to'plami)` → Minson JA, Ruedy NE, Schweitzer ME. *O'ylamasdan berilgan savol strategik muloqotda qanday ta'sir ko'rsatadi.* opim.wharton.upenn.edu/DPlab/papers/workingPapers/Minson_working_Ask%20(the%20Right%20Way)%20and%20You%20Shall%20Receive.pdf

6.4 `diabetes2 (ma'lumotlar to'plami)` → Zeitler P, va boshq. 2012. *2-turdagi qandli diabet bilan yoshlarda glikemik nazoratni saqlash uchun klinik sinov.* N Engl J Med.

B.7 Miqdoriy ma'lumotlar uchun xulosalar chiqarish

7.1 Risso delfinlari → Endo T va Haraguchi K. 2009. *Yaponiya baliq ovlash shaharchasi Taiji aholisining soch namunalarida yuqori simob darajalari.* Marine Pollution Bulletin 60(5):743-747.

Taiji *The Cove* filmida tasvirlangan va Yaponiyada delfin va kit go'shtining muhim manbai hisoblanadi. Har yili minglab delfinlar Taiji hududidan o'tadi va ushbu 19 ta delfin ushbu delfinlardan tasodifiy oddiy tanlanmani oqilona ifodalaydi deb taxmin qilinadi.

7.1 Croaker oq baliq → fda.gov/food/foodborneillnesscontaminants/metals/ucm115644.htm

7.1 `run17 (ma'lumotlar to'plami)` → www.cherryblossom.org

7.2 `textbooks (ma'lumotlar to'plami)`, `ucla_textbooks_f18 (ma'lumotlar to'plami)` → Ma'lumotlar OpenIntro xodimlari tomonidan 2010- va 2018- yillarda yig'ilgan. 2018-yilgi tanlamada 201 UCLA kurslari tanlab olindi. Ulardan 68 tasi Amazon'da topilgan kitoblarni talab qildi. Ma'lumotlar olingan veb-saytlar: sa.ucla.edu/ro/public/soc, ucla.verbacompare.com va amazon.com.

7.3 `stem_cells (ma'lumotlar to'plami)` → Menard C, va boshq. 2005. Yurak infarkti bo'lgan qo'y miokardiga yurakka yo'naltirilgan sichqoncha embrion ildiz hujayralarini ko'chirib o'tkazish: klinik oldi tadqiqot. The Lancet: 366:9490, p1005-1012.

7.3 `ncbirths (ma'lumotlar to'plami)` → 2004-yilda Shimoliy Karolina tomonidan chiqarilgan tug'ilish yozuvlari. Afsuski, ushbu ma'lumotlar to'plami manbasi haqida qo'shimcha ma'lumot hozircha mavjud emas.

7.3 Imtihon versiyalari → Bu misol to'qib chiqilgan.

7.4 Qon bosimi statistikasi → 140 dan 180 mmHg gacha bo'lgan qon bosimiga ega bemorlar uchun qon bosimi standart og'ishi taxmin qilingan va haqiqiy ma'lumotlarda kuzatiladigan qiymatlarga nisbatan ozgina (ammo sezilarli emas) noaniq bo'lishi mumkin.

7.5 `toy_anova (ma'lumotlar to'plami)` → 7.19-rasmdagi ma'lumotlar uchun ishlatilgan, bu ma'lumotlar to'qib chiqilgan.

7.5 `mlb_players_18 (ma'lumotlar to'plami)` → Ma'lumotlar quyidagi manbadan olingan: mlb.mlb.com/stats. Tahlil davomida kamida 100 ta zarbani amalga oshirgan o'yinchilar hisobga olindi.

7.5 `classdata (ma'lumotlar to'plami)` → Bu misol to'qib chiqilgan.

B.8 Chiziqli regressiyaga kirish

8.1 `simulated_scatter (ma'lumotlar to'plami)` → Dastlabki uchta grafik uchun to'qib chiqilgan ma'lumotlar. Mukammal chiziqli grafik `group` o'zgaruvchisi to'plamdagi `group` 4 ma'lumotlardan foydalanadi (8.1-rasm). Uchta nomukammal chiziqli grafiklar uchun `group` 1-3 ma'lumotlar ishlatiladi (8.2-rasm). Sinusoidal egri chiziq `group` 5 ma'lumotlardan foydalanadi (8.3-rasm). Qoldiq grafiklari bilan birga bo'lgan uchta sochma diagramma `group` 6-8 ma'lumotlardan foydalanadi (8.8-rasm). Korrelyatsiya grafiklari `group` 9-19 ma'lumotlardan foydalanadi (8.9-rasm va 8.10-rasm).

8.1 `possum (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plami Ma'lumotlar Ilovasi B.4 da tasvirlangan.

8.2 `elmhurst (ma'lumotlar to'plami)` → Ushbu ma'lumotlar Elmhurst kolleji 2011-yilgi sinfning barcha birinchi kurs talabalari uchun ma'lumotlar jadvalidan olingan bo'lib, "Talabalar kollejga borish uchun haqiqatan nimani to'lashadi" deb nomlangan maqola bilan birga chop etilgan. Ushbu maqola *The Chronicle of Higher Education* onlayn nashrida nashr etilgan: chronicle.com/article/What-Students-Really-Pay-to-Go/131435.

8.2 `simulated_scatter (ma'lumotlar to'plami)` → Chiziqli model bilan bog'liq muammolar grafiklari `group` 20-23 ma'lumotlardan foydalanadi (8.12-rasm).

8.2 `mariokart (ma'lumotlar to'plami)` → Ebay (ebay.com) orqali Nintendo Wii uchun Mario Kart o'yini bo'yicha auktsion ma'lumotlari. Ushbu ma'lumotlar 2009-yil oktyabr oyi boshida yig'ilgan.

8.3 `simulated_scatter (ma'lumotlar to'plami)` → Chiziqli regressiyadagi anomaliyalar turlari grafiklari `group` 24-29 ma'lumotlardan foydalanadi (8.18-rasm).

8.4 `midterms_house (ma'lumotlar to'plami)` → Ma'lumotlar Wikipediadan olingan.

B.9 Ko'p o'lchovli va logistik regressiya

9.1 `loans_full_schema (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plami Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

9.2 `loans_full_schema (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plami Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

9.3 `loans_full_schema (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plami Ma'lumotlar Ilovasi B.1 da tasvirlangan.

9.4 `mariokart (ma'lumotlar to'plami)` → Bu ma'lumotlar to'plami Ma'lumotlar Ilovasi B.8 da tasvirlangan.

9.5 `resume (ma'lumotlar to'plami)` → Bertrand M, Mullainathan S. 2004. *Emily va Greg Lakisha va Jamaldan ko'ra ishga yaroqliroqmi? Mehnat bozori diskriminatsiyasi bo'yicha dala tajribasi*. The American Economic Review 94:4 (991-1013). www.nber.org/papers/w9873

Ushbu tahlilda ba'zi ma'lumotlar strukturasini muhokama qilishdan voz kechildi. Eksperiment dizayni bloklashni o'z ichiga olgan bo'lib, har bir ish joyiga odatda to'rtta rezyume yuborilgan. Har bir taxmin qilingan irq/jins kombinatsiyasi uchun (ism asosida taxmin qilingan). Ushbu bloklash jihati haqida qayg'urmadik, chunki bloklash hisobga olinishi standart xatoni *kamaytiradi*, ammo `race` va `sex` o'zgaruvchilarining nuqta baholarini sezilarli darajada o'zgartirmasdan bo'limdagi tahlil natijalarini ta'sir qilmaydi. Ya'ni, ushbu tadqiqotning eng qiziqarli xulosalari, hatto yanada murakkab tahlilni amalga oshirgan holda ham o'zgarmaydi.

Appendix C

Taqsimot jadvallari

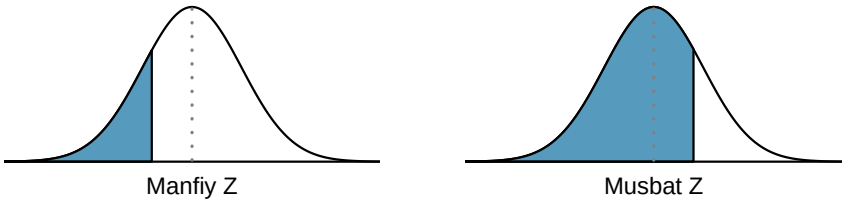
C.1 Normal ehtimollik jadvali

Normal ehtimollik jadvali yordamida normal taqsimotning foizlarini Z-balli yordamida topish yoki aksincha, foizlardan Z-balli topish mumkin. Ushbu jadval Z-ballari va ularning mos foizlarini ko‘rsatadi. Ushbu ilovadagi misollar uchun C.1-rasmda qisqartirilgan ehtimollik jadvali berilgan. To‘liq jadval 383-sahifada keltirilgan.

	Z ning ikkinchi o‘nlik joyi									
Z	*0,00*	0,01	0,02	0,03	**0,04**	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	**0,7995**	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	*0,8413*	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

C.1-rasm. Normal ehtimollik jadvalining bir qismi. $Z = 1,00$ bo‘lgan normal tasodifiy o‘zgaruvchining foizi *ajratilgan* va 0,8000 ga yaqin foiz ham **ajratilgan**.

Normal ehtimollik jadvalidan Z uchun foizni topishda (ikkita o‘nlik joygacha yaxlitlangan), jadvaldagi birinchi o‘nlik joy uchun tegishli qatorni aniqlang va so‘ngra ikkinchi o‘nlik qiymatini ifodalovchi ustunni toping. Ushbu qator va ustun kesishmasi kuzatuvning foizini beradi. Masalan, $Z = 0,45$ foizi C.1-rasmdagi qator 0,4 va ustun 0,05 da ko‘rsatilgan: 0,6736 yoki 67,36−foiz.

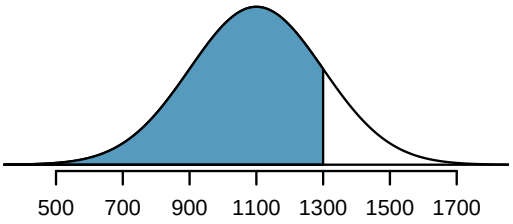


C.2-rasm. Z ning chap tomonidagi maydon kuzatuvning foizini ifodalaydi.

C.1-MISOL

SAT ballari normal taqsimotga amal qiladi, $N(1100, 200)$. Ann SAT imtihonida 1300 ball olib, unga mos Z-balli $Z = 1$ ga teng bo‘ldi. U barcha SAT topshiruvchilar orasida qaysi foizda ekanligini bilmoqchi.

Annning foizi SAT imtihonida undan past ball olgan odamlarning foizidir. Quyidagi grafikda ushbu shaxslarni ifodalovchi maydonni soyali qilib ko‘rsatamiz:



Normal egri chiziq ostidagi umumiy maydon har doim 1 ga teng va Annning SAT bo‘yicha undan past ball olgan odamlar foizi grafikdagi soyali *maydon* ga teng. Ushbu maydonni normal ehtimollik jadvalidan qator 1,00 va ustun 0,00 bo‘yicha topamiz: 0,8413. Boshqacha aytganda, Ann SAT topshiruvchilarining 84−foizida joylashgan.

C.2-MISOL

Yuqori dum maydonini qanday topamiz?

Normal ehtimollik jadvali *har doim* chap tomon maydonini beradi. Bu shuni anglatadiki, agar o‘ng tomondagi maydonni topmoqchi bo‘lsak, avval chap dumni topamiz va uni 1 dan ayiramiz. Masalan, SAT topshiruvchilarining 84,13% i Ann dan past ball olgan, bu esa 15,87% imtihon topshiruvchilar Ann dan yuqori ball olganligini bildiradi.

Biz, shuningdek, foizga mos keladigan Z-ballini ham topishimiz mumkin. Masalan, 80−foiz uchun Z ni aniqlash uchun, jadvalning o‘rtasidan 0,8000 ga eng yaqin qiymatni izlaymiz: 0,7995. 80−foiz uchun Z-ballini qator va ustun Z qiymatlarini birlashtirib aniqlaymiz: 0,84.

C.3-MISOL

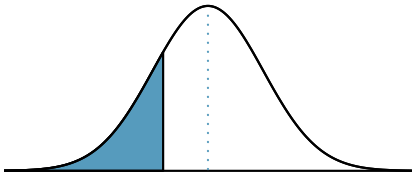
80−foiz uchun SAT ballini toping.

Jadvaldagi 0,8 ga eng yaqin qiymatni izlaymiz. Eng yaqin qiymat 0,7995 bo‘lib, u $Z = 0{,}84$ ga mos keladi. Bu yerda 0,8 qator qiymatidan, 0,04 esa ustun qiymatidan olinadi. Keyin, Z-balli va noma’lum qiymat x uchun tenglamani quyidagicha tuzamiz va x ni topamiz:

$$Z = 0{,}84 = \frac{x - 1100}{200} \quad \rightarrow \quad x = 1268 \ .$$

College Board ballarni 10 birlikka yaqinlashtiradi, shuning uchun 80−foiz 1270 ga teng. (Bizning maqsadimiz uchun 1268 ni ko‘rsatish ham to‘g‘ri bo‘lardi.)

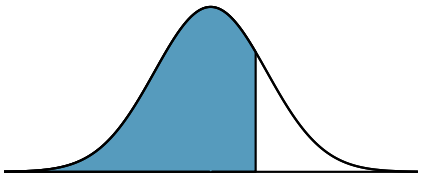
Normal taqsimot va normal ehtimollik jadvali bilan ishlash bo‘yicha qo‘shimcha ma’lumotlar uchun 4.1-bo‘limiga qarang. Bu bo‘lim 129-sahifadan boshlanadi.



Manfiy Z

Z ning ikkinchi o‘nlik joyi										
0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00	Z
0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	−3,4
0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005	0,0005	−3,3
0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0007	0,0007	−3,2
0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009	0,0010	−3,1
0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013	0,0013	−3,0
0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018	0,0019	−2,9
0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025	0,0026	−2,8
0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034	0,0035	−2,7
0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045	0,0047	−2,6
0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060	0,0062	−2,5
0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080	0,0082	−2,4
0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104	0,0107	−2,3
0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136	0,0139	−2,2
0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174	0,0179	−2,1
0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222	0,0228	−2,0
0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281	0,0287	−1,9
0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351	0,0359	−1,8
0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436	0,0446	−1,7
0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537	0,0548	−1,6
0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655	0,0668	−1,5
0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793	0,0808	−1,4
0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951	0,0968	−1,3
0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131	0,1151	−1,2
0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335	0,1357	−1,1
0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587	−1,0
0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841	−0,9
0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119	−0,8
0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420	−0,7
0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743	−0,6
0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085	−0,5
0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446	−0,4
0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821	−0,3
0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207	−0,2
0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602	−0,1
0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000	−0,0

*Agar $Z \leq -3{,}50$ bo‘lsa, ehtimollik 0,0002 yoki undan kichik.



Musbat Z

	Z ning ikkinchi o‘nlik xonasi									
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

*Agar $Z \geq 3,50$ bo‘lsa, ehtimollik $0,9998$ yoki undan katta.

C.2 *t*-Ehtimollik Jadvali

***t*-ehtimollik jadvali** yordamida t-taqsimotning quyruq maydonlarini T-balldan foydalanib topish yoki aksincha amalga oshirish mumkin. Ushbu jadval T-ballarni va ularning mos foizlarini ko‘rsatadi. Qisman ***t*-jadval** C.3-rasmda ko‘rsatilgan va to‘liq jadval 387-sahifadan boshlanadi. t-jadvaldagi har bir qator turli **erkinlik darajasi** (ed) bo‘lgan t-taqsimotni ifodalaydi. Ustunlar quyruq ehtimolliklariga mos keladi. Masalan, agar biz $ed = 18$ bo‘lgan t-taqsimot bilan ishlayotganimizni bilsak, 18-qatorni ko‘rib chiqishimiz mumkin, bu C.3-rasmda **ajratib ko‘rsatilgan**. Agar biz yuqori quyruq uchun 10% ehtimollikning T-ballini (chegara qiymatini) aniqlamoqchi bo‘lsak, *bir quyruq* 0,100 bo‘lgan ustunni tanlashimiz kerak. Ushbu chegaraviy qiymat 1,33 ga teng. Agar biz pastki 10% uchun chegarani istagan bo‘lsak, biz -1,33 qiymatidan foydalanamiz. Normal taqsimot singari, barcha t-taqsimotlar ham simmetrikdir.

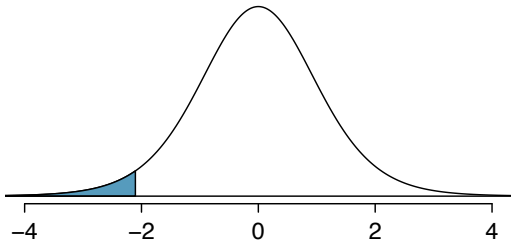
	bir quyruqli	0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
	ikki quyruqli	0,200	0,100	0,050	0,020	0,010
ed	1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
	2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
	3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
	18	**1,33**	**1,73**	**2,10**	**2,55**	**2,88**
	19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
	20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
	400	1,28	1,65	1,97	2,34	2,59
	500	1,28	1,65	1,96	2,33	2,59
	∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58

C.3-rasm. Qisqartirilgan t-jadvalga nazar. Har bir qator turli t-taqsimotni ifodalaydi. Ustunlar ma’lum quyruq maydonlari uchun chegara qiymatlarni tasvirlaydi. $ed = 18$ bo‘lgan qator **ajratib ko‘rsatilgan**.

M **C.4-MISOL**

18 daraja erkinlikka ega t-taqsimotdan -2,10 dan past qismning foizi qanday?

Normal ehtimollik masalalari kabi, avval rasmni chizamiz va -2,10 dan past maydonni soyali qilamiz:



Ushbu maydonni topish uchun, avval mos qatorni aniqlaymiz: $ed = 18$. Keyin, -2,10 ning absolyut qiymatini o‘z ichiga olgan ustunni aniqlaymiz; bu uchinchi ustun. Chunki biz faqat bir quyruq uchun qiymat izlayapmiz, jadvalning yuqori qatorini ko‘rib chiqamiz, bu yerda bir quyruq maydoni uchinchi qator uchun 0,025 ga teng ekanligi ko‘rsatilgan. Ya’ni, taqsimotning 2,5% qismi -2,10 dan past joylashgan.

Keyingi misolda, T-ball jadvalda mavjud bo‘lmagan holatni ko‘rib chiqamiz.

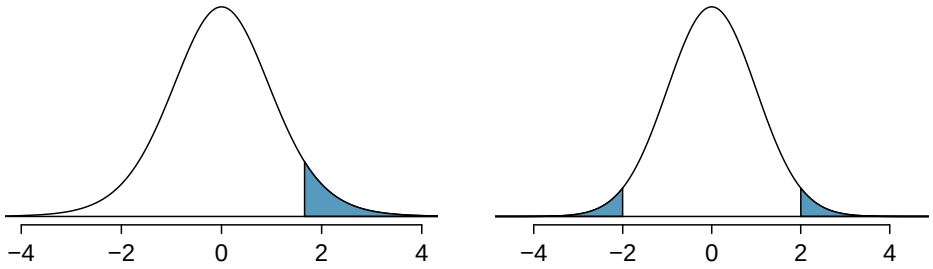
M **C.5-MISOL**

20 daraja erkinlikka ega t-taqsimot C.4-rasmning chap panelida ko‘rsatilgan. 1,65 dan yuqori

qismning foizini aniqlang.

---

t-jadvalda qatorni erkinlik darajasi orqali aniqlaymiz: $ed = 20$. Keyin 1,65 ni izlaymiz, bu jadvalda yo‘q. U birinchi va ikkinchi ustunlar orasida joylashgan. Ushbu qiymatlar 1,65 ni chegaralaydi, shuning uchun ularning quyruq maydonlari 1,65 uchun quyruq maydonini chegaralaydi. Birinchi va ikkinchi ustunlarning bir quyruq maydonlarini aniqlaymiz: 0,050 va 0,10 va xulosa qilamizki, taqsimotning 5% dan 10% gacha bo‘lgan qismi o‘rtacha qiymatdan 1,65 standart og‘ishdan yuqori joylashgan. Agar xohlasak, statistik dasturiy ta’minot yordamida aniq maydonni aniqlashimiz mumkin: 0,0573.



C.4-rasm. Chapda: 20 daraja erkinlikka ega t-taqsimot, 1,65 dan yuqori maydon soyali ko‘rsatilgan. o‘ngda: 475 daraja erkinlikka ega t-taqsimot, 0 dan 2 birlikdan uzoqroq maydon soyali ko‘rsatilgan.

M **C.6-MISOL**

475 daraja erkinlikka ega t-taqsimot C.4-rasmning o‘ng panelida ko‘rsatilgan. o‘rtacha qiymatdan 2 birlikdan uzoqroq (chap yoki o‘ng tomonda) joylashgan qismning foizini aniqlang.

Oldingi holat kabi, avval mos qatorni aniqlaymiz: $ed = 475$. Ushbu qator mavjud emas! Bunday holatda, biz keyingi kichik qatorni ishlatamiz, bu holda $ed = 400$. Keyin 2,00 ni o‘z ichiga olgan ustunlarni topamiz; chunki $1{,}97 < 2 < 2{,}34$, uchinchi va to‘rtinchi ustunlardan foydalanamiz. Nihoyat, quyruq maydonlari uchun chegaralarni ikki quyruq qiymatlaridan topamiz: 0,02 va 0,05. Biz ikki quyruq qiymatlaridan foydalanamiz, chunki biz t-taqsimotning ikki simmetrik quyruqini izlayapmiz.

Y **C.7-YO‘NALTIRILGAN MASHQ**

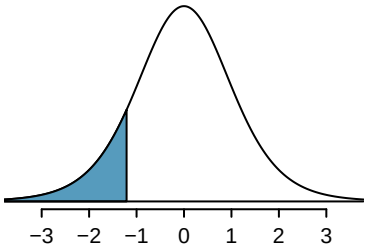
19 daraja erkinlikka ega t-taqsimotning -1,79 dan yuqori joylashgan qismi qanday foizni tashkil qiladi?[1]

M **C.8-MISOL**

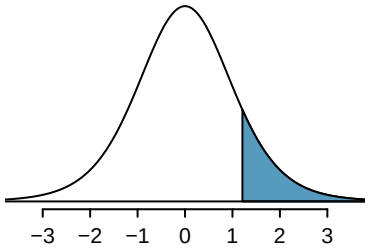
$t^\star_{18}$ qiymatini t-jadval yordamida toping, bu yerda $t^\star_{18}$ 18 daraja erkinlikka ega t-taqsimot uchun chegara bo‘lib, taqsimotning 95% qismi $-t^\star_{18}$ va $+t^\star_{18}$ orasida joylashgan.

95% ishonch oralig‘i uchun $t^\star_{18}$ qiymatini topish kerak, shunda t-taqsimotning 95% qismi $-t^\star_{18}$ va $t^\star_{18}$ orasida bo‘ladi; bu ikki quyruqlarning umumiy maydoni 0,05 ga teng bo‘lgan joyni bildiradi. 385-sahifadagi t-jadvalga qaraymiz, ikki quyruq maydoni 0,05 bo‘lgan ustunni topamiz (uchinchi ustun), va 18 daraja erkinlikka ega qatorni topamiz: $t^\star_{18} = 2{,}10$.

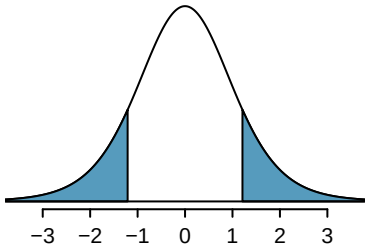
[1] Soyali maydonni *-1,79 dan yuqorida* topamiz (rasmni o‘zingiz chizing). Kichik chap quyruq maydoni 0,025 va 0,05 oralig‘ida, shuning uchun yuqori katta maydon 0,95 va 0,975 oralig‘ida bo‘lishi kerak.



Bir quyruqli

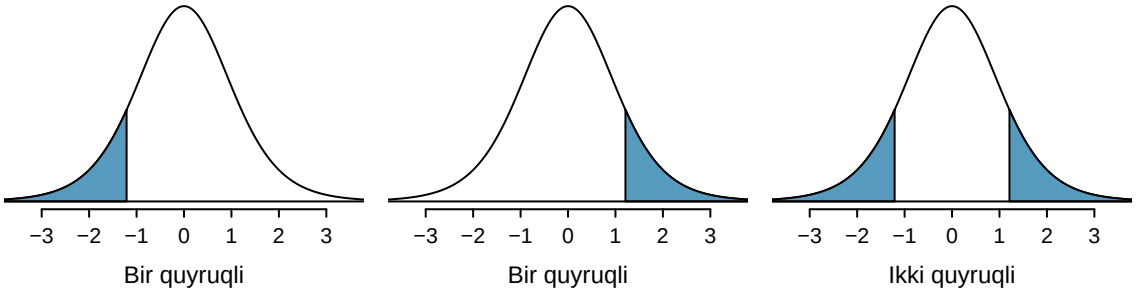


Bir quyruqli



Ikki quyruqli

bir quyruqli		0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
ikki quyruqli		0,200	0,100	0,050	0,020	0,010
ed	1	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66
	2	1,89	2,92	4,30	6,96	9,92
	3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84
	4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60
	5	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03
	6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71
	7	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50
	8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36
	9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25
	10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17
	11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11
	12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05
	13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01
	14	1,35	1,76	2,14	2,62	2,98
	15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95
	16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92
	17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90
	18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88
	19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86
	20	1,33	1,72	2,09	2,53	2,85
	21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83
	22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82
	23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81
	24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80
	25	1,32	1,71	2,06	2,49	2,79
	26	1,31	1,71	2,06	2,48	2,78
	27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77
	28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76
	29	1,31	1,70	2,05	2,46	2,76
	30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75



bir quyruqli		0,100	0,050	0,025	0,010	0,005
ikki quyruql		0,200	0,100	0,050	0,020	0,010
ed	31	1,31	1,70	2,04	2,45	2,74
	32	1,31	1,69	2,04	2,45	2,74
	33	1,31	1,69	2,03	2,44	2,73
	34	1,31	1,69	2,03	2,44	2,73
	35	1,31	1,69	2,03	2,44	2,72
	36	1,31	1,69	2,03	2,43	2,72
	37	1,30	1,69	2,03	2,43	2,72
	38	1,30	1,69	2,02	2,43	2,71
	39	1,30	1,68	2,02	2,43	2,71
	40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
	41	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
	42	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
	43	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70
	44	1,30	1,68	2,02	2,41	2,69
	45	1,30	1,68	2,01	2,41	2,69
	46	1,30	1,68	2,01	2,41	2,69
	47	1,30	1,68	2,01	2,41	2,68
	48	1,30	1,68	2,01	2,41	2,68
	49	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
	50	1,30	1,68	2,01	2,40	2,68
	60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66
	70	1,29	1,67	1,99	2,38	2,65
	80	1,29	1,66	1,99	2,37	2,64
	90	1,29	1,66	1,99	2,37	2,63
	100	1,29	1,66	1,98	2,36	2,63
	150	1,29	1,66	1,98	2,35	2,61
	200	1,29	1,65	1,97	2,35	2,60
	300	1,28	1,65	1,97	2,34	2,59
	400	1,28	1,65	1,97	2,34	2,59
	500	1,28	1,65	1,96	2,33	2,59
	∞	1,28	1,645	1,96	2,33	2,58

C.3 Xi-kvadrat ehtimollik jadvali

Xi-kvadrat ehtimollik jadvali Xi-kvadrat taqsimotining quyruq maydonlarini topish uchun ishlatiladi. **Xi-kvadrat jadvali** qisman C.5-rasmda ko‘rsatilgan va to‘liq jadvalni 391-sahifada topish mumkin. Xi-kvadrat jadvalidan foydalanayotganda, turli erkinlik darajalariga ega taqsimotlar uchun ma’lum bir qatorni tekshiramiz va maydonlar uchun oralig‘ni aniqlaymiz (masalan: 0,025 dan 0,05 gacha). Shuni yodda tutingki, Xi-kvadrat jadvali yuqori quyruq qiymatlarini taqdim etadi, bu normal va t-taqsimot jadvallaridan farq qiladi.

Yuqori quyruq		0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
df	2	2,41	**3,22**	**4,61**	5,99	7,82	9,21	10,60	13,82
	3	*3,66*	*4,64*	6,25	*7,81*	*9,84*	*11,34*	*12,84*	*16,27*
	4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,86	18,47
	5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,75	20,52
	6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	18,55	22,46
	7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	20,28	24,32

C.5-rasm. Xi-kvadrat jadvalining bir qismi. To‘liq jadvalni Appendix C.3 da topish mumkin.

Ⓜ **C.9-MISOL**

C.6(a)-rasm 3 daraja erkinlikka ega Xi-kvadrat taqsimotini ko‘rsatadi va 6,25 da boshlanadigan yuqori soyali quyruq maydonini ifodalaydi. Soyali maydonni taxmin qilish uchun C.5-rasmdan foydalaning.

Ushbu taqsimot uch daraja erkinlikka ega. Shuning uchun faqat 3 erkinlik daraja (ed) bo‘lgan qatorni ko‘rib chiqamiz. Ushbu qator jadvalda kursiv qilib yozilgan. Keyingi qadamda, biz 6,25 qiymati yuqori quyruq maydoni 0,1 bo‘lgan ustunda joylashganini ko‘ramiz. Ya’ni, C.6(a)-rasmdagi yuqori soyali quyruq maydoni 0,1 ga teng.

Ushbu misol noodatiy edi, chunki biz jadvalda *aniq* qiymatni kuzatdik. Keyingi misollarda, quyruq maydonini aniq aniqlashning imkoni bo‘lmagan holatlarni ko‘rib chiqamiz va buning o‘rniga qiymatlar oralig‘ini taqdim etamiz.

Ⓜ **C.10-MISOL**

C.6(b)-rasm erkinlik darajasi 2 ga teng bo‘lgan Xi-kvadrat taqsimotining yuqori quyruqini ko‘rsatadi. 4,3 dan yuqori maydon soyali. Ushbu quyruq maydonini toping.

4,3 qiymati erkinlik darajasi 2 ga teng bo‘lgan qatorida ikkinchi va uchinchi ustunlar orasida joylashgan. Ushbu ustunlar quyruq maydonlarini 0,2 va 0,1 sifatida belgilaydi. Shuning uchun C.6(b)-rasmdagi soyali maydon 0,1 va 0,2 oralig‘ida ekanligini aniqlaymiz.

Ⓜ **C.11-MISOL**

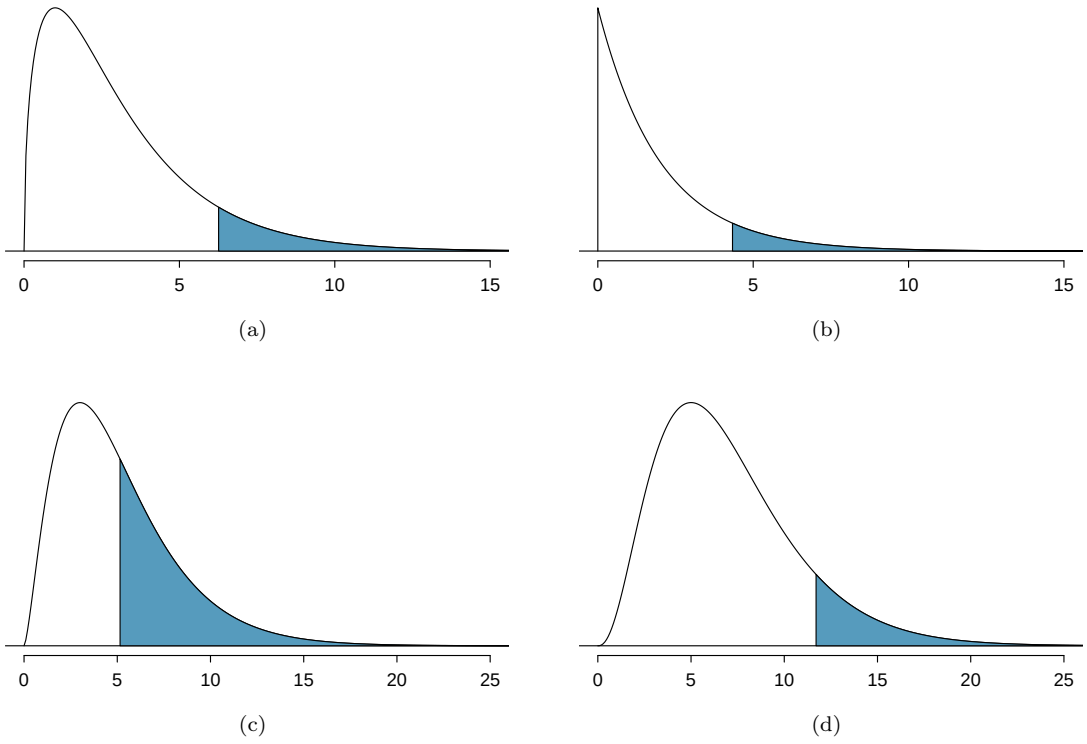
C.6(c)-rasm erkinlik darajasi 5 ga ega bo‘lgan Xi-kvadrat taqsimotining yuqori quyruqi va 5,1 qiymat kesimini ko‘rsatadi. Quyruq maydonini toping.

Erkinlik darajasi 5 ga ega bo‘lgan qatorida qarab, 5,1 ushbu qator uchun eng kichik chegara (6,06) dan past joylashganligini ko‘ramiz. Bu shuni anglatadiki, maydon faqat *0,3 dan katta* ekanligini ayta olamiz.

Ⓜ **C.12-MISOL**

C.6(d)-rasm erkinlik darajasi 7 ga ega bo‘lgan Xi-kvadrat taqsimotida 11,7 kesimini ko‘rsatadi. Yuqori quyruq maydonini toping.

11,7 qiymati erkinlik darajasi 7 ga ega bo‘lgan qatorida 9,80 va 12,02 oralig‘ida joylashgan. Shunday qilib, maydon 0,1 va 0,2 oralig‘ida.



C.6-rasm. **(a)** erkinlik darajasi 3 ga ega Xi-kvadrat taqsimoti, 6,25 dan yuqori maydon soyali. **(b)** erkinlik darajasi 2 ga, 4,3 dan yuqori maydon soyali. **(c)** erkinlik darajasi 5 ga ega, 5,1 dan yuqori maydon soyali. **(d)** erkinlik darajasi 7 ga ega, 11,7 dan yuqori maydon soyali.

Yuqori quyruq		0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,001
df	1	1,07	1,64	2,71	3,84	5,41	6,63	7,88	10,83
	2	2,41	3,22	4,61	5,99	7,82	9,21	10,60	13,82
	3	3,66	4,64	6,25	7,81	9,84	11,34	12,84	16,27
	4	4,88	5,99	7,78	9,49	11,67	13,28	14,86	18,47
	5	6,06	7,29	9,24	11,07	13,39	15,09	16,75	20,52
	6	7,23	8,56	10,64	12,59	15,03	16,81	18,55	22,46
	7	8,38	9,80	12,02	14,07	16,62	18,48	20,28	24,32
	8	9,52	11,03	13,36	15,51	18,17	20,09	21,95	26,12
	9	10,66	12,24	14,68	16,92	19,68	21,67	23,59	27,88
	10	11,78	13,44	15,99	18,31	21,16	23,21	25,19	29,59
	11	12,90	14,63	17,28	19,68	22,62	24,72	26,76	31,26
	12	14,01	15,81	18,55	21,03	24,05	26,22	28,30	32,91
	13	15,12	16,98	19,81	22,36	25,47	27,69	29,82	34,53
	14	16,22	18,15	21,06	23,68	26,87	29,14	31,32	36,12
	15	17,32	19,31	22,31	25,00	28,26	30,58	32,80	37,70
	16	18,42	20,47	23,54	26,30	29,63	32,00	34,27	39,25
	17	19,51	21,61	24,77	27,59	31,00	33,41	35,72	40,79
	18	20,60	22,76	25,99	28,87	32,35	34,81	37,16	42,31
	19	21,69	23,90	27,20	30,14	33,69	36,19	38,58	43,82
	20	22,77	25,04	28,41	31,41	35,02	37,57	40,00	45,31
	25	28,17	30,68	34,38	37,65	41,57	44,31	46,93	52,62
	30	33,53	36,25	40,26	43,77	47,96	50,89	53,67	59,70
	40	44,16	47,27	51,81	55,76	60,44	63,69	66,77	73,40
	50	54,72	58,16	63,17	67,50	72,61	76,15	79,49	86,66

Index

n tadan k tani tanlash, 143
t-jadvali, **236**
t-taqsimot, **235**

ahamiyatlilik darajasi, 182, 186–187
    ko‘p taqqoslashlar, 270–273
AIC, 347
Akaike axborot mezoni, 347
almashtirib yaqinlashtirish, 164
amaliy ahamiyatli, 187
ami_occurrences (ma’lumotlar to‘plami), **377**
anekdotik dalillar, 24
arifmetik o‘rtacha, 45
ask (ma’lumotlar to‘plami), **378**

baholash, 160
baholashdagi xatolik, 160
barqaror statistika, 54
bashorat intervali, **332**
bashoratlovchi interval, 310
bashoratlovchi o‘zgaruvchi, 283
Bayes statistikasi, 107
Bayes teoremasi, **106**, 103–107
bemorlar, 36
bimodal, 49
bir tomonli gipoteza testi, 188
birgalikdamas, 84–85
birinchi kvartil, 53
birlamchi, 102
birlashgan nisbat, 205
bloklar, 34
bloklash, 34
bog‘liq o‘zgaruvchi, 20
bog‘liq o‘zgaruvchilar, 18
bog‘liqsiz, 90
bog‘liqsiz o‘zgaruvchi, 20
bog‘liqsiz o‘zgaruvchilar, 19
bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan (bbt), 140
bog‘liqsizlik, 162
Bonferroni tuzatishi, 272
bosh to‘plam, 24–26
bosqichli, 327
bo‘sh gistogramma, 121–122

chalkashtiruvchi, 27
chalkashtiruvchi omil, 27
chalkashtiruvchi o‘zgaruvchi, 27
chegaralash, 335
chegaraviy ehtimol, **96**, 97
cheklangan bosh to‘plam tuzatish koeffitsienti, 163
chetlashganlar, 53
chiziqli kombinatsiyasi, 117
chiziqli regressiya, *shuningdek, qarang* regressiya
classdata (ma’lumotlar to‘plami), **379**
county (ma’lumotlar to‘plami), **375**, **376**
county_complete (ma’lumotlar to‘plami), **375**
cpr (ma’lumotlar to‘plami), **378**

daraxt diagrami, 102
daraxt diagramma, **102**, 102, 107
davolash guruhi, **12**, 36
df, *see* degrees of freedom (df)
diabetes2 (ma’lumotlar to‘plami), **378**
diagnostik grafiklar, **332**
diskret, 165
diskret o‘zgaruvchi, 17
dispersiya, 50, 114
dispersiyani tahlil qilish (ANOVA), 264–273
doira diagrammasi, 68
drone_blades (ma’lumotlar to‘plami), **378**

ebola_survey (ma’lumotlar to‘plami), **377**
egri chiziq, **336**
ehtimollik, 81–107
    taqsimot, **87**
    zichlik funksiyasi, **122**
ehtimollik jadvali, 132
eksperiment, **34**
eksperiment, 20
eksponensial, 140
ekstrapolyatsiya, 299
elementar hodisalar fazosi, 88
elmhurst (ma’lumotlar to‘plami), **379**
eng kichik kvadratlar chizig‘i, 295
eng kichik kvadratlar mezoni, 295
eng kichik kvadratlar regressiyasi, 298
    R^2 (R-kvadrat), **299**, 299
    ekstrapolyatsiya, 299
    parametrlarni talqin qilish, 298–299
    R-kvadrat (R^2), 300
eng kichik kvadratlar usuli, 294
erkinlik darajasi (ed)
    t-taqsimot, **235**

ANOVA, 268
regressiya, **323**
Xi-kvadrat, **215**
erksiz o‘zgaruvchilar, 18
etalon daraja, 319, 320

F-test, **268**
family_college (ma’lumotlar to‘plami), **376**
fcid (ma’lumotlar to‘plami), **376**
fish_oil_18 (ma’lumotlar to‘plami), **378**
foizlik, **53**

gipoteza testi, 177–187, 189
ahamiyatlilik darajasi, 182, 186–187
p-qiymat, **182**, 182
gipotezalar, 178
gistogramma, 48
GLM, 343
guruhlar orasidagi o‘rtacha kvadrat, 268

himoyalangan toifalar, 343
hodisa, **85**, 85

ichi bo‘sh gistogramma, **69**
ijobiy bog‘liqlik, 19
ikki tomonlama ko‘r, 36
ikki tomonli gipoteza testlari, 188
indikator o‘zgaruvchi, 300, 318, 319, 339, 345
intensivlik xaritasi, 56
intervali
regressiya, 309–310
ishonch, **170**
95% ishonch, **170**
ishonch intervali, **159**, 170–175
95%, 171
ishonch darajasi, 171–172
talqin qilish, 175
izohlovchi o‘zgaruvchi, **20**

jadval ulushlari, 96
javob bermaslik og‘ishi, 26
javob bermaslik ulushi, 26
javob o‘zgaruvchi, **20**
juft, 243–246
juft kuzatuvlar, 244
jury (ma’lumotlar to‘plami), **378**

KAO, **52**
katta sonlar qonuni, 83
kod izohi, 161
kohorta, 20
kollinear, 340
kontingensiya jadvali, 63
satr bo‘yicha jami, 63
satr ulushi, **64**
ustun bo‘yicha jami, 63
ustun ulushi, **64**
korrelyatsiya, 283, **288**, 288–289
ko‘ngillilar, 36

ko‘p o‘lchovli regressiya, *shuningdek, qarang* regressiya
ko‘p taqqoslashlar, 272
ko‘paytirish qoidasi, **91**
ko‘r, 36
kutilma qiymat, 114
kuzatuv birligi, 14
kuzatuv ma’lumotlari, 26
kuzatuv tadqiqoti, 20
kvartil
birinchi kvartil, 53
Q_1, 53
Q_3, 53
uchinchi kvartil, 53
kvartillar aro oraliq, 52, 53

loan50 (ma’lumotlar to‘plami), **375**, **376**
loans_full_schema (ma’lumotlar to‘plami), **375**, **379**, **380**
logistik regressiya, *shuningdek, qarang* regressiya
logit transformatsiyasi, 346

ma’lumotlar, 11
ma’lumotlar matritsasi, 15
ma’lumotlar to‘plami, 375–380
baby_smoke, 250–252
bezgak vaksinasi, 75
cdc, 121–124
coal power support, 182–185
county, 15–20, 56, 68–70
CPR and blood thinner, 204
CPR va qon suyultiruvchi vosita, 203
delfinlar va simob, 237–238
diabet, 227
Ebola so‘rovi, 173–174
ikki imtihon solishtirishi, 253–254
ildiz hujayralari, yurak funksiyasi, 248–250
insult, 12
iPod, 222–225
juri tarkibining irqiy ko‘rinishi, 213–218
ko‘krak bezi saratoni, 205–207
loan50, 14–15, 44–54
loans, 63–68, 84–85, 87
malaria vaccine, 72
mammografiya, 205–207
mario_kart, 336
mikroqarz regulation poll, 195–199
MLB batting, 270
MLB zarba, 266
nuclear arms reduction, 185–186
oq baliq va simob, 238–239
o‘quv materiallari, 243–246
o‘rta muddatli saylovlar, 309
photo_classify, 95–99
possum, 284–287
qarzlar, 318
quyosh so‘rovi, 175
quyosh tadqiqoti, 160
resume, 343–350

S&P500 aksiyalar ma'lumotlari, 219–221
shamol turbinalari so'rovi, 175
shamol turbinasi so'rovi, 174
shinalar sifati xatosi, 199
smallpox, 99–102
stroke, 13, 17
talabalar futbol stadioni, 198–199
ma'lumotlar transformatsiyasi, 55
ma'lumotlar zichligi, 48
ma'lumotlarni o'zlashtirish, 267
ma'lumotlarni qidirish, 267
malaria (ma'lumotlar to'plami), **376**
mammogram (ma'lumotlar to'plami), **378**
manfiy bog'liq, **19**
mariokart (ma'lumotlar to'plami), **379**, **380**
markaziy limit teorema, 162, 233
bog'liqsizlik, 162
normal ma'lumotlar, 234
matematik kutilma, 113
ma'lumot
o'rta muddatli saylovlar, 307
mediana, 52
mediana, 52
midterms_house (ma'lumotlar to'plami), **379**
miqdoriy o'zgaruvchi, 17
mlb_players_18 (ma'lumotlar to'plami), **379**
moda, 49
model tanlash, 326–330
mozaik diagramma, 67
mo'ylovlar, 53
multimodal, 49
muqobil gipoteza (H_M), 178
muvaffaqiyat, 139
muvaffaqiyat ehtimoli, 139
muvaffaqiyat-muvaffaqiyatsizlik sharti, 162, 195
muvaffaqiyatsizlik, 139

natijalar to'plamlari, 85
nazorat, 34
nazorat guruhi, **12**, 36
ncbirths (ma'lumotlar to'plami), **379**
nochiziqli, 45, 284
nol gipoteza (H_0), 178
nol qiymat, 178
nol taqsimoti, 184
nominal o'zgaruvchi, 17
normal ehtimollik jadvali, 381
normal taqsimot, **129**, 129–138
standart, **130**, 173
nuclear_survey (ma'lumotlar to'plami), **378**
nuqta bahosi
bitta nisbat, 195
nisbatlar farqi, 202
o'rtacha qiymatlar farqi, 248
yagona o'rtacha, 233
nuqta-burchak koeffitsiyenti, 297
nuqtalar buluti, 284
nuqtali diagramma, 45
nuqtaviy baho, 47, 160–162

oddiy tasodifiy tanlanma, 25
og'ish, 25, **26**, 50, 160
og'ishgan
kuchli, 53
oldinga tanlash, 328
ordinal o'zgaruvchi, 17
orqa tomondan yo'qotish, **327**
o'rniga qo'yish prinsipi, **164**
o'rta muddatli saylovlar, 307
o'rtacha, 45
arifmetik o'rtacha, 45
vaznli o'rtacha, 48
o'rtacha javob qiymati, 310
o'rtacha kvadratik xatolik (inglizcha: mean square error MSE), 268
o'rtacha oraliq, 62
o'zaro istisno, 84–85
o'zaro ta'sir hadi, **336**
o'zgaruvchilar, **14**
o'zgaruvchining darajalari, 17

p-qiymat, 182
parametr, **130**, 160, 283, 296
persentil, 132, 134
pew_energy_2018 (ma'lumotlar to'plami), **377**, **378**
plasebo, 20, 36
plasebo ta'siri, 36
playing_cards (ma'lumotlar to'plami), **376**
possum (ma'lumotlar to'plami), **376**, **379**
probability sample, *see* sample
prokurorning xatosi, 267
prospektiv tadqiqot, 27

qatlamlar, 29
qayd, 14
qimorboz xatosi, 101
qiyshaygan
kuchli, 54
qiziqish natijasi, 97
qoldiq, **286**, 286–288
qoldiq grafigi, 287
qo'shish qoidasi, 84
qo'shma ehtimol, **96**, 96–97
qo'shma standart chetlanish, 254
qulay tanlanma, 26
qutili diagramma, 52
yonma-yon qutilar diagrammasi, 69
quvvat, 260
quyruq, **49**

R, 161
R-kvadrat (R^2), **299**
rad etish sohalari, 259
regressiya, **282**, 282–310, 318–350
ko'p, **321**, 318–321
ko'p o'zgaruvchili, 336
logistik, **343**, 350

model baholari, 331–336
model sharoitlari, 331
model shartlari, 336
sharoitlar, 331
shartlar, 336
texnik sharoitlar, 331
texnik shartlar, 336
replikatsiya, 34
reprezentativ, 26
resume (ma'lumotlar to'plami), 349, **380**
retrospektiv tadqiqot, 27
run17 (ma'lumotlar to'plami), **379**

satr bo'yicha jami, 63
shart, 97
shartli ehtimol, 97–99
shartli ehtimollik, 97, 107
siljish
chapga siljigan, **49**
kuchli, 48
o'ngga siljigan, **49**
quyruq, 49
simmetrik, 49
uzun quyruq, **49**
simmetrik, 49
simulated_scatter (ma'lumotlar to'plami), **379**
simulyatsiya, **73**, 73
smallpox (ma'lumotlar to'plami), **376**
sochma diagramma, 18, 44
soxta operatsiya, 36
sp500_1950_2018 (ma'lumotlar to'plami), **378**
standart chetlanish, 114
standart normal taqsimot, 130, 173
standart og'ish, 50
standart xatolik (SE)
bitta nisbat, 195
standart xatolik (SX), **161**, **170**
nisbatlar farqi, 203
o'rtacha qiymatlar farqi, 249
statistik ahamiyatli, 187
statistika, *shuningdek, qarang* umumlashtiruvchi statistika
stem_cells (ma'lumotlar to'plami), **379**
stent30 (ma'lumotlar to'plami), **375**, **378**
stent365 (ma'lumotlar to'plami), **375**, **378**
stocks_18 (ma'lumotlar to'plami), **376**
suratli kartalar, **85**

t-ball, 240
t-ehtimollik jadvali, **385**
t-jadval, **385**
t-taqsimot, 233, 235–237
ta'sir kuchi, 304
ta'sir o'lchami, 260
tadqiqot ishtirokchilari, 36
tajriba, 139
takroran, 111
takrorlarsiz, 111
tanlanma, 24–26
javob bermaslik og'ishi, **26**
javob bermaslik ulushi, **26**
klaster, **29**
klasterli tanlash, **29**, 30
ko'p bosqichli tanlash, **29**, 30
oddiy tasodifiy tanlash, 28, **29**
og'ish, 26
og'ishgan, **25**
qatlam, **29**
qatlamli tanlash, 28, **29**
qulay tanlanma, 26
siljish, 26
tasodifiy tanlanma, 25–26
tanlanma hajmi, 160
tanlanma statistika, 53
tanlanma taqsimot, 161
tanlanma ulushi, 139
tanlanma xatolik, **160**
tanlanmadagi noaniqlik, **160**
taqsimot, 45, 122
Bernulli, **139**, 139
binomial, **142**, **143**, 142–147
normal yaqinlashuv, 145–147
geometrik, **139**, **140**, 139–141
normal, **129**, 129–138
standart, 173
Puasson, **154**, 153–154
salbiy binomial, **150**, 150–153
t, 235–237
tarafkash, 168
tarafkashlik, 175
tarqoqlik, 50, 52
tasodifiy jarayon, 82–84
tasodifiy miqdor, 112–120
tasodifiy shovqin, 73
tasodifiy taqsimlash, 73
tasodifiylashtirilgan eksperiment, 20, 34
tavsifiy statistikalar, 18
ta'sirchan nuqta, 304
tejamkor, 326
test statistic, 133
textbooks (ma'lumotlar to'plami), **379**
tezlik, 154
toifali o'zgaruvchi, 17, 318
toy_anova (ma'lumotlar to'plami), **379**
to'ldiruvchi, 89
to'liq model, 326
transformatsiya
chegaralash, 335
kvadrat ildiz, 333
log, 333
teskari, 335
tushuntiruvchi o'zgaruvchi, 283
tuzatilgan R^2 (R^2_{tuz}), **323**, 323–324

uchinchi kvartil, 53
ucla_textbooks_f18 (ma'lumotlar to'plami), **379**
umumiy ko'paytirish qoidasi, 100

umumiy kvadratlar yig‘indisi SST (inglizcha: sum of squares total), 268
umumiy qo‘shish qoidasi, 86
umumiy statistika, 53
umumlashgan chiziqli model, **154**
umumlashtirilgan chiziqli model, 343
umumlashtiruvchi statistika, 13
unimodal, 49
ustun bo‘yicha jami, 63
ustunli diagramma, 63
  qatlamlangan ustunli diagramma, **66**
  segmentlangan ustunli diagramma, 66
  yonma-yon ustunlar diagrammasi, **66**
uzatuv birligi, 14
uzluksiz o‘zgaruvchi, 17
uzun quyruq, 49

vaqtli qatorlar, 296, 332
vaznli o‘rtacha, 48
venn diagrammalari, 86

xatolar kvadratlar yig‘indisini (inglizcha: sum of squared errors SSE), 268
xatolik chegarasi, 173, 198–199
xi-kvadrat ehtimollik jadvali, 389
xi-kvadrat jadvali, 389
xi-kvadrat statistikasi, 215
xi-kvadrat taqsimoti, 215

yaqqol, 50
yashirin o‘zgaruvchi, 27
yolg‘on ijobiy, 104
yolg‘on salbiy, 104
yonma-yon qutilar diagrammasi, 69
Yunon tili
  alpha (α), 182
  beta (β), 283
  epsilon (ε), 283
  lambda (λ), 154
  mu (μ), 46, 114
  sigma (σ), 51, 115
yuqori ta’sirga ega nuqtalar, 304

Z, 130
z-ball, 130
zichlik, 122

TARJIMA VA ILMIY TAHRIR

Mualliflari



Dilshod R. Mansurov

Navoiy davlat universiteti
«Matematika» kafedrasi dotsenti

Ilmiy faoliyati ehtimollar nazariyasi, matematik statistika va statistik modellashtirish sohalari bilan chambarchas bog‘liq. Tadqiqotlari asosan senzurlangan tanlanmalar, yashovchanlik tahlili va zamonaviy statistik modellashtirish muammolariga qaratilgan. U ilmiy aniqlik, ravon bayon va amaliy yondashuv uyg‘unligiga alohida e’tibor qaratadi.



Xalmurza S. Sagidullayev

Toshkent Kimyo xalqaro universiteti
«Aniq fanlar» kafedrasi mudiri

Ilmiy faoliyati ehtimollar nazariyasi va matematik statistikani qamrab oladi. To‘liq va senzurlangan kuzatuvlar bo‘yicha taqsimotlar funksional xarakteristikalarining statistik yadroviy baholarining asimptotik xossalarini o‘rganadi. Fizika-matematika fanlari nomzodi. Bir qancha ilmiy maqolalar, o‘quv qo‘llanmalar va darsliklar muallifi, xalqaro va respublika ilmiy loyihalari ishtirokchisi.



Suxrob B. Bozorov

Guliston davlat universiteti
«Matematika» kafedrasi dotsenti

Ilmiy-tadqiqot faoliyati ehtimollar nazariyasi, matematik statistika va statistik modellashtirish sohalari bilan uzviy bog‘liq. Ilmiy ishlari senzurlangan tanlanmalar, yadro funksiyalari asosida umr davomiyligi funksiyasini tahlil qilish muammolariga bag‘ishlangan. Respublika va xalqaro ilmiy jurnallarda maqolalar chop etgan, ilmiy-amaliy konferensiyalarda faol ishtirok etgan.



Aleksey V. Min

Myunxen Texnika Universiteti
Matematika fakulteti professori

Ilmiy qiziqishlari amaliy va matematik statistika, ekonometrika hamda mashinali o‘rganish sohalarini qamrab oladi. Ilmiy ishlari Journal of the American Statistical Association, Journal of Econometrics, Journal of Financial Econometrics va Journal of Machine Learning Research kabi yetakchi xalqaro jurnallarda chop etilgan.